

# Domácí cvičení 1

Vlastnosti funkcí, optimalizační úlohy  
22. 9. 2023

1) Určete definiční obor a obor hodnot následujících funkcí

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$$

$$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{24x}{3x - 12}$$

$$h(x) = 5^{\frac{1+x}{1-x}}$$

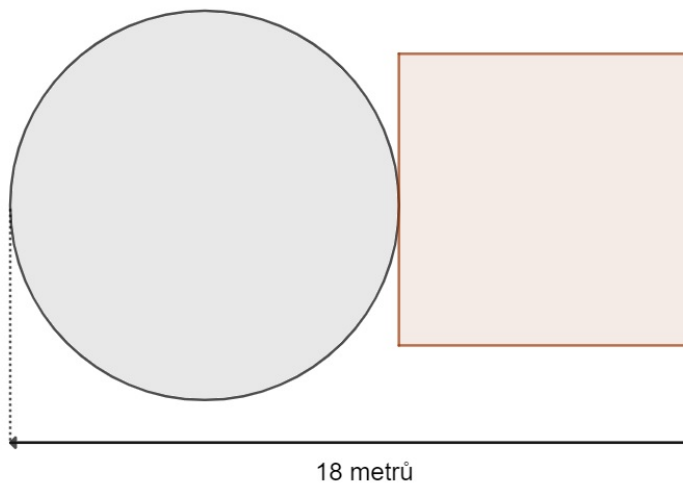
2) Nakreslete graf daných funkcí a určete jejich obor hodnot. Dále rozhodněte, zda jsou omezené, prosté, spojité, diferencovatelné.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & x \in (-1, 2) \\ 2^{-x} & x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} - 1 & x \in (-\infty, 4] \\ e^{4-x} - 2 & x \in (4, +\infty) \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \in (-\infty, 1) \\ \ln x & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

3) Zahradní architekt navrhl záhon ve tvaru kruhu a čtverce na délce 18 metrů v bezprostřední blízkosti vedle sebe tak, že strana čtverce je tečnou dané kružnice (a jejich středy leží na téže kolmici ke straně čtverce). Jak má volit stranu čtverce a poloměr kružnice, aby takto navržený záhon měl minimální plošný obsah?



Výsledky:

1)  $D_f = [-1, 5]$ ,  $H_f = [0, 3]$ ;

$D_g = (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ ,  $H_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ;

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $H_h = (0, +\infty) \setminus \{\frac{1}{5}\}$ ;

2) Obor hodnot  $H_f = [-4, \frac{1}{4}] \setminus \{0\}$ ; funkce je omezená, není prostá, v bodě  $x = 2$  není spojitá a tedy ani diferencovatelná.

Obor hodnot  $H_g = (-2, +\infty)$ ; funkce je zdola omezená, je prostá, v bodě  $x = 4$  je spojitá, ale není diferencovatelná.

Obor hodnot  $H_h = [-\frac{1}{4}, +\infty)$ ; funkce je zdola omezená, není prostá, v bodě  $x = 1$  je spojitá i diferencovatelná.

3) Obsah záhonu bude minimální v případě, když kruhový záhon bude mít poloměr  $\frac{36}{4+\pi}$  metrů.