ALGEBRA II (NMAG202) – TEST, 21. ZÁŘÍ 2017

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 90 minut.

(1) Kolik prvků má faktor algebry $(\mathbb{Z}, +)$ podle nejmenší možné kongruence takové, že $3 \sim 4$? Kolik prvků má faktor algebry $(\mathbb{N}, +)$ podle nejmenší kongruence takové, že $3 \sim 4$? V obou případech popište bloky kongruence.

(10 bodů)

(2) Rozhodněte, které z následujících dvojic grup jsou isomorfní:
(a) $\mathbb{Z}_{12}^*$ a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,
(b) $\mathbb{Z}_{31}^*$ a $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6$,
(c) $\mathbb{Z}_9$ a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.
Je-li dvojice grup isomorfní, popište konkrétní isomorfismus. V opačném případě neisomorfnost stručně zdůvodněte.

(10 bodů)

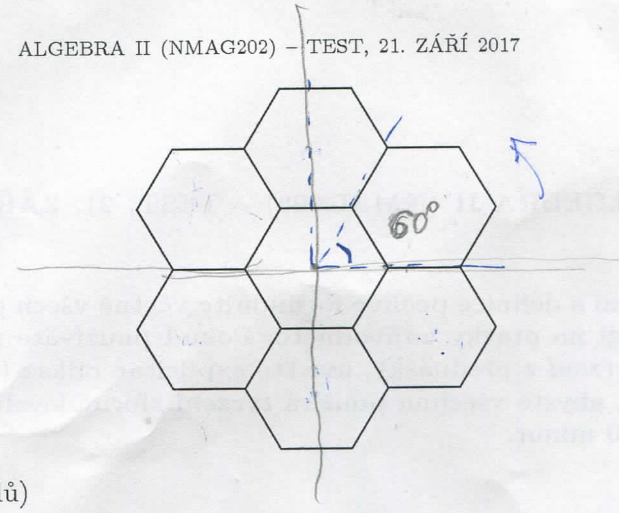
(3) Uvažujte polynom $f = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Je faktorokruh $R = \mathbb{Z}_3[x]/(f)$ tělesem? Proč? Ukažte, že grupa invertibilních prvků $(R^*, \cdot, ^{-1}, 1)$ je cyklická a najděte nějaký její generátor.

(15 bodů)

(4) Buď T těleso a $f \in T[x]$ polynom. Definujte pojem rozkladového nadtělesa polynomu f a formulujte větu o jeho existenci.
Spočítejte stupeň rozšíření rozkladového nadtělesa polynomu $f = x^3 - 2$ v konkrétních případech, kdy a) $T = \mathbb{Q}$ a b) $T = \mathbb{R}$. Použitá tvrzení z přednášky přesně formulujte.

(15 bodů)

(5) Přesně formulujte Burnsideovu větu. Kolika způsoby lze políčka plástve níže obarvit třemi barvami? Dvě obarvení považujeme za stejná, pokud se liší jen o otočení.



(15 bodů)

(6) Přesně formulujte a dokažte Lagrangeovu větu o řádu podgrupy konečné grupy.
(20 bodů)

sousední musí mít stejnou barvu

• uprostřed

$2 \cdot 9$ ot. o $\pm 60^\circ$

$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ ot. o $\pm 120^\circ$

3^4 ot. o 180°

3^7 ot o $360^\circ \equiv id$

$2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3^4 + 3^7$

6

ALGEBRA II (NMAG202) – TEST, 12. ČERVNA 2017

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 90 minut.

(1) Jaké všechny řády prvků se vyskytují v grupách a) S_7, b) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$? U obou grup uveďte příklad prvku každého řádu, který se vyskytuje, a stručně zdůvodněte (i s použitím tvrzení z přednášky), proč se prvky jiných řádů nevyskytují.

(10 bodů)

(2) Definujte pojem cyklické grupy. Rozhodněte, které z následujících grup jsou cyklické: a) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$, b) $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$, c) $\mathbb{Z}_{31}^*$. U cyklických grup najděte generátor. U necyklických stručně zdůvodněte, proč nejsou cyklické.

(10 bodů)

6 8 4 8 4 6 8

(3) Ukažte, že grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_8^*$, S_3 a D_8 jsou po dvou neisomorfní.

(15 bodů)

(4) Buď T množina všech komplexních čísel, která jsou algebraická nad $\mathbb{Q}$. Ukažte, že

(a) T je podtěleso $\mathbb{C}$ a

(b) T je algebraicky uzavřené (Základní větu algebry použijte bez důkazu).

(15 bodů)

(5) Přesně formulujte Burnsideovu větu. Kolika způsoby lze z bílých, červených a modrých kuliček poskládat náhrdelník s devíti kuličkami? Nezáleží na otočení a překlopení.

(15 bodů)

(6) Definujte pojmy homomorfismu a kongruence pro obecné algebry. Formulujte a ukažte větu o homomorfismu a první větu o isomorfismu.

(20 bodů)

ALGEBRA II (NMAG202) - TEST, 26. ZÁŘÍ 2016

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 90 minut.

(1) Definujte pojem normální podgrupy grupy $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$. Kolik netriviálních normálních podgrup H (tj. $\{1\} \subsetneq H \subsetneq G$) má grupa
(a) $G = \mathbb{Z}_6$ (cyklická grupa řádu šest),
(b) $G = S_3$ (permutační grupa na třech prvcích).
Vše stačí bez důkazů.

(10 bodů)

(2) Definujte pojem algebraického uzávěru a přesně formulujte větu o jeho existenci a jednoznačnosti. Jak vypadají algebraické uzávěry těles $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$? Vše stačí bez důkazů.

(10 bodů)

(3) Definujte minimální polynom algebraického prvku nad daným tělesem. Formulujte a dokažte tvrzení o vztahu minimálního polynomu prvku a a stupni rozšíření $[T(a) : T]$.

(15 bodů)

(4) Uvažujte konečné těleso $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2(a)$, kde $m_{a,\mathbb{F}_2} = x^4+x^3+x^2+x+1$. Kolik prvků má těleso $\mathbb{F}_2(a^3+a^2)$? Použitá tvrzení z přednášky pouze bez důkazu přesně formulujte.

(15 bodů)

(5) Nechť S je rozkladové nadtěleso polynomu $f = 3x^3 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$. Najděte všechna mezitělesa $\mathbb{Q} \subseteq U \subseteq S$. U každého takového mezitělesa U
(a) určete, kolik prvků mají Galoisovy grupy $\mathrm{Gal}(S/U)$ a $\mathrm{Gal}(U/\mathbb{Q})$,
(b) vyjádřete U jako $U = \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_n)$ pro konečně mnoho komplexních čísel $a_1, \dots, a_n$.

(15 bodů)

(6) Přesně formulujte a dokažte větu o existenci a jednoznačnosti rozkladového nadtělesa nekonstantního polynomu $f \in T[x]$ (kde T je libovolné těleso).

(20 bodů)

1.písemka z algebry

Odpovědi na otázky vždy zdůvodněte. Časový limit je 30 minut.

1. Dokažte, že algebry $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{20}, +)$ a $(\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{15}, +)$ nejsou izomorfní (operace $+$ jsou definovány po složkách modulo příslušné přirozené číslo).

5 bodů

2. Najděte nějaký izomorfismus grupy $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot, ^{-1}, 1)$ na grupu $(\mathbb{Z}_6, +, -, 0)$.

5 bodů

3. Označme $\mathbb{C}_n = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1\}$, kde $\mathcal{C}^* = (\mathbb{C}^*, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa nenulových komplexních čísel s násobením, Dokažte, že $\mathbb{C}_{10}$ a $\mathbb{C}_{80}$ jsou normální podgrupy grupy $\mathcal{C}^*$, dále, že $\mathbb{C}_{10}$ je normální podgrupa grupy $\mathbb{C}_{80}$ a určete počet prvků faktorgrupy $\mathbb{C}_{80}/\mathbb{C}_{10}$.

5 bodů

4. Najděte a spočítejte všechny homomorfismy grupy $(\mathbb{Z}_3, +, -, 0)$ do grupy $(\mathbb{S}_5, \circ, ^{-1}, \mathrm{Id})$.

5 bodů