Funkce dvou proměnných

Matematika B2 (MS710P55)

7. 5. 2024

1) Vypočtěte gradient dané funkce v bodě A

a) $f(x,y) = xy + 3x^2 - y^2, \quad A = [2,-4]$

b) $f(x,y) = \frac{x}{y-x}, \quad A = [1,2]$

2) Vypočtěte směrovou derivaci funkce f v bodě A ve směru vektoru $\vec{u}$.

a) $f(x,y) = 5x^2y, \quad A = [-1,1], \quad \vec{u} = (3,4)$

b) $f(x,y) = y^2\cos(2x), \quad A = [\frac{\pi}{8}, 0], \quad \vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

3) Najděte extrémy a sedlové body funkce

a) $f(x,y) = x^3 + \frac{1}{2}y^2 - 3xy - 4y$

b) $f(x,y) = 6xy - \frac{y}{x} + e^y$

c) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

d) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2} + \sqrt{4-y^2}$

e) $f(x,y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$

f) $f(x,y) = 2\ln(xy) - x^2 - y$

g) $f(x,y) = x^2(1+2y^2) - 2x$

h) $f(x,y) = y + \frac{1}{y} - 2\ln^2 x$

4) Sestavte rovnici tečné roviny ke grafu funkce

a) $f(x,y) = x^3y - xy^2 + 2xy - x^2 - 5x + 1$ v bodě $A = [1,2]$

b) $f(x,y) = \frac{e^{3x}}{x^2+xy+y^2}$ v bodě $A = [0,1]$

c) $f(x,y) = \operatorname{tg} \frac{x}{1+x^2+y^2}$ v bodě $A = [0,1]$

d) $f(x,y) = \cos(x+y)\sin(x-y)$ v bodě $A = [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

e) $f(x,y) = \ln\frac{xy}{x+y}$, aby byla rovnoběžná s rovinou $x + y - 2z + 3 = 0$.

f) $f(x,y) = \operatorname{arccotg}\frac{x}{1+\sqrt{y}}$, aby byla kolmá na přímku procházející body $[2,3,7]$ a $[1,3,4]$.

5) Zakreslete definiční obor a určete obor hodnot následujících funkcí.

a) $f(x,y) = \arcsin(x+y)$

b) $f(x,y) = \arcsin(|x| + |y|)$

c) $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2)$

d) $f(x,y) = \arcsin(x^2-y^2)$

e) $f(x,y) = \arcsin(x+y^2)$

f) $f(x,y) = \arccos(\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2)$

g) $f(x,y) = \arcsin(\frac{x}{4}) + \arccos(\frac{y}{9})$

h) $f(x,y) = \arcsin(xy) + \arccos(xy)$

i) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{xy})$

Výsledky:

1)

a) $\nabla f(A) = (8, 10)$

b) $\nabla f(A) = (2, -1)$

2)

a) -2

b) 0

3)

a) $[4, 16]$ (lok. min.), $[-1, 1]$ (sedlový bod)

b) $[-\frac{1}{2}, 0]$ a $[\frac{1}{3}, 0]$ (sedlové body)

c) $[-2, -1]$ (lok. max.), $[2, 1]$ (lok. min.), $[1, 2]$ a $[-1, -2]$ (sedlové body)

d) $[0, 0]$ (lok. max.)

e) $[\frac{1}{2}, -1]$ (lok.min)

f) $[1, 2]$ (lok. max.)

g) $[1, 0]$ (lok. min.)

h) $[1, -1]$ (lok. max.), $[1, 1]$ (sedlový bod)

4)

a) $z = -x - y$

b) $z = 2x - 2y + 3$

c) $z = \frac{1}{2}x$

d) $z = -x + y$

e) $z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - 1 - \ln 2$

f) $z = -\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{2}$

5)

a) $D_f = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2;\ -1 - x \leq y \leq 1 - x\}$ (oblast mezi přímkami), $H_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

b) $D_f = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2;\ -1 - |x| \leq |y| \leq 1 - |x|\}$ (čtverec s vrcholy $[1, 0], [0, 1], [-1, 0], [0, -1]$), $H_f = [0, \frac{\pi}{2}]$

c) $D_f = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ (kruh o poloměru 1 se středem $[0, 0]$), $H_f = [0, \frac{\pi}{2}]$

d) $D_f = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2;\ -1 \leq x^2 - y^2 \leq 1\}$ (oblast mezi hyperbolami), $H_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

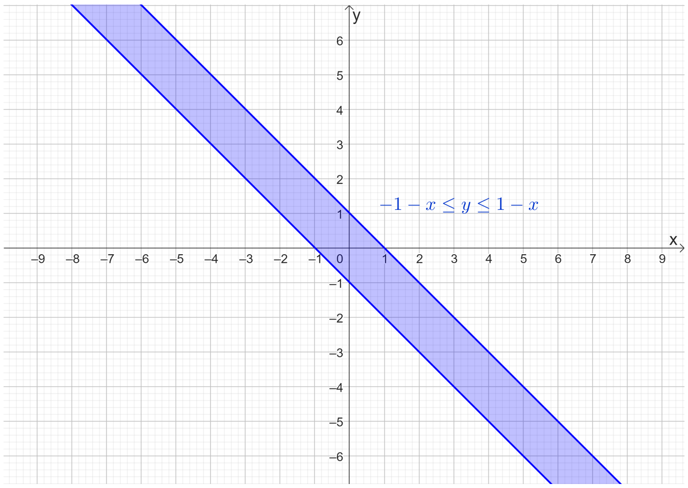
e) $D_f = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2;\ -1 \leq x + y^2 \leq 1\}$ (oblast mezi parabolami), $H_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

f) $D_f = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2;\ \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1\}$ (elipsa se středem $[0, 0]$ a poloosami 3 a 2), $H_f = [0, \frac{\pi}{2}]$

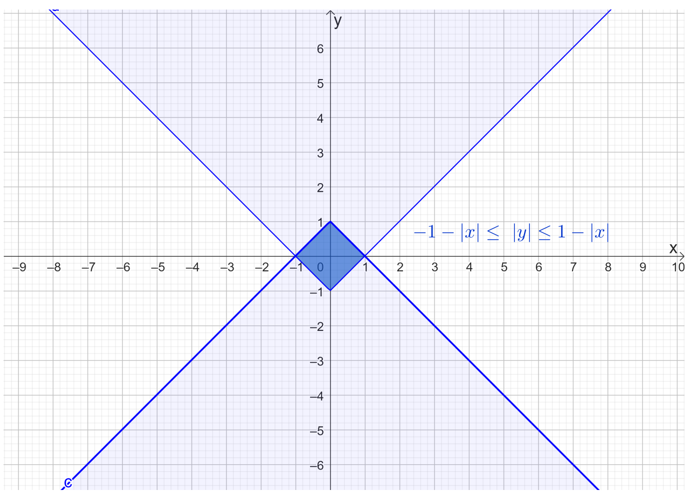
g) $D_f = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2;\ -2 \leq x \leq 2;\ -3 \leq y \leq 3\}$ (obdélník), $H_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

h) $D_f = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2;\ -1 \leq xy \leq 1\}$ (oblast mezi hyperbolami), $H_f = \{\frac{\pi}{2}\}$ (konstantní funkce)

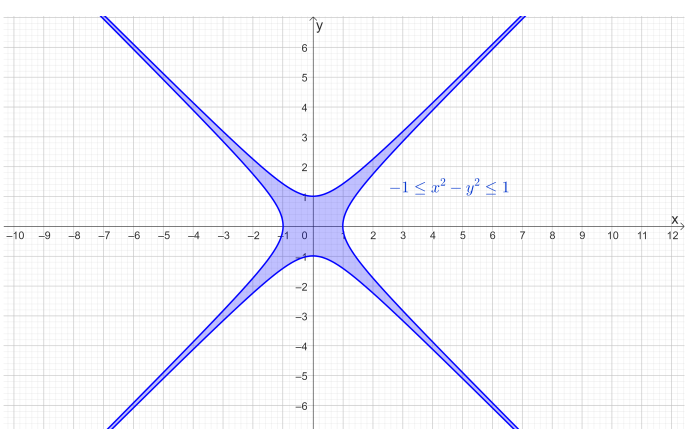
i) $D_f = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2;\ xy \geq 0\}$ (1. a 3. kvadrant), $H_f = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$



Obrázek 1: a) $D_f = \{(x,y) \in \mathsf{R}^2;\ -1-x \leq y \leq 1-x\}$



Obrázek 2: b) $D_f = \{(x,y) \in \mathsf{R}^2;\ -1-|x| \leq |y| \leq 1-|x|\}$



Obrázek 3: d) $D_f = \{(x,y) \in \mathsf{R}^2;\ -1 \leq x^2 - y^2 \leq 1\}$