Lineární algebra - shrnutí

1) Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Určete determinant.

b) Určete inverzní matici.

c) Určete hodnost.

d) Pokud to lze, vyjádřete poslední řádkový vektor jako lineární kombinaci zbylých řádkových vektorů. Pokud to nelze, vysvětlete proč.

e) Rozhodněte a zdůvodněte, zda je matice regulární či singulární.

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \end{matrix} = 1\cdot 8\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 4 + (-1)\cdot 5\cdot 6 - \left((-1)\cdot 8\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 6 + 2\cdot 5\cdot 2\right)$$

$$= 16 + 8 - 30 - (-32 + 6 + 20) = $$

$$= -6 - (-6) = 0$$

b) + e) Matice je singulární $\Rightarrow A^{-1}$ neexistuje

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \leftarrow \oplus \\ \leftarrow \oplus \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 3 \\ \leftarrow \oplus \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$h(A) = 2$$

d) $$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \overset{=5}{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \overset{=-3}{b} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-4) \\ \cdot(-5) \\ \leftarrow \oplus \\ \leftarrow \oplus \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow b = -3$$

$$a + 2\cdot 3 = -1$$
$$a = 5$$

2) Řešte maticovou rovnici

$$2X - A^2 = BX$$

s neznámou maticí X, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2X - BX = A^2$$

$$(2I - B)\cdot X = A^2 \quad \Big| \cdot (2I-B)^{-1} \text{ zleva}$$

$$\boxed{X = (2I-B)^{-1}\cdot A^2}$$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2I - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 1:2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{(2I-B)^{-1}}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2

Zkouška: L: $2X - A^2 = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

P: $BX = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$