Funkce dvou proměnných

Taylorův polynom

Matematika pro geoinformatiky, 11. 12. 2024

1) Sestavte rovnici tečné roviny (Taylorův polynom 1. stupně) pro funkci

a) $f(x,y) = x^3y - xy^2 + 2xy - x^2 - 5x + 1$ v bodě $A = [1,2]$

b) $f(x,y) = \frac{e^{3x}}{x^2+xy+y^2}$ v bodě $A = [0,1]$

c) $f(x,y) = \operatorname{tg} \frac{x}{1+x^2+y^2}$ v bodě $A = [0,1]$

d) $f(x,y) = \cos(x+y)\sin(x-y)$ v bodě $A = [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

e) $f(x,y) = \ln \frac{xy}{x+y}$, aby byla rovnoběžná s rovinou $x + y - 2z + 3 = 0$.

f) $f(x,y) = \operatorname{arccotg} \frac{x}{1+\sqrt{y}}$, aby byla kolmá na přímku procházející body $[2,3,7]$ a $[1,3,4]$.

2) Sestavte Taylorův polynom 2. stupně funkce

a) $f(x,y) = \frac{\cos x}{1+\sin y}$ v bodě $A = [0,0]$

b) $f(x,y) = \operatorname{tg}(2x+3y)$ v bodě $A = [0,0]$

3) Sestavte Taylorův polynom 3. stupně funkce

a) $f(x,y) = 6\sin x \cos y$ v bodě $A = [0,0]$

b) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ v bodě $A = [0,0]$

b) $f(x,y) = 6e^{-x}\ln(1+y)$ v bodě $A = [0,0]$

4) Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně k vhodně zvolené funkci ve vhodně zvoleném bodě vypočtěte přibližnou hodnotu čísel

a) $3\,e^{0,02}\ln 0,95$

b) $1,03^8 \operatorname{arctg} 0,1$

c) $\ln\sqrt{0,96^2 + 0,03^2}$

d) $e^{0,04}\cos^2 0,02$

Výsledky:

1)

a) $z = -x - y$

b) $z = 2x - 2y + 3$

c) $z = \frac{1}{2}x$

d) $z = -x + y$

e) $z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - 1 - \ln 2$

f) $z = -\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{2}$

2)

a) $\mathbf{T}^2_{f,A}(x, y) = 1 - y - \frac{1}{2}x^2 + y^2$

b) $\mathbf{T}^2_{f,A}(x, y) = 2x + 3y$

3)

a) $\mathbf{T}^3_{f,A}(x, y) = 6x - x^3 - 3xy^2$

b) $\mathbf{T}^3_{f,A}(x, y) = 1 + x^2 - y^2$

c) $\mathbf{T}^3_{f,A}(x, y) = 6y - 6xy - 3y^2 + 3x^2y + 3xy^2 + 2y^3$

4)

a) Pro funkci $f(x, y) = 3\,e^x \ln y$ v bodě $A = [0, 1]$ je:

$$\mathbf{T}^2_{f,A}(x, y) = 3(y - 1) + 3x(y - 1) - \frac{3}{2}(y - 1)^2,$$

z čehož dostaneme

$$3\,e^{0,02} \ln 0,95 \doteq -0,15675$$

b) Pro funkci $f(x, y) = x^8 \operatorname{arctg} y$ v bodě $A = [1, 0]$ je:

$$\mathbf{T}^2_{f,A}(x, y) = y + 8y(x - 1),$$

z čehož dostaneme

$$1,03^8 \operatorname{arctg} 0,1 \doteq 0,124$$

c) Pro funkci $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln x^2 + y^2$ v bodě $A = [1, 0]$ je:

$$\mathbf{T}^2_{f,A}(x, y) = x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{y^2}{2},$$

z čehož dostaneme

$$\ln \sqrt{0,96^2 + 0,03^2} \doteq -0,04035$$

d) Pro funkci $f(x, y) = e^x \cos^2 y$ v bodě $A = [0, 0]$ je:

$$\mathbf{T}^2_{f,A}(x, y) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - y^2,$$

z čehož dostaneme

$$e^{0,04} \cos^2 0,02 \doteq 1,0404$$