

Příklad 4.8. Napište funkční předpisy a definiční obory složených funkcí $f \circ g$ a $g \circ f$. Načrtněte jejich grafy. Určete obory hodnot.

a) $f(x) = |x|$, $g(x) = e^x$

c) $f(x) = x^3$, $g(x) = 2 + 3x$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1 - x$

d)* $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $g(x) = \cos x$

Řešení 4.8.

a) $(f \circ g)(x) = |e^x|$,
 $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f \circ g) = (0, \infty)$
 $(g \circ f)(x) = e^{|x|}$
 $\mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(g \circ f) = \langle 1, \infty \rangle$

c) $(f \circ g)(x) = (2 + 3x)^3$,
 $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f \circ g) = \mathbb{R}$
 $(g \circ f)(x) = 2 + 3x^3$
 $\mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(g \circ f) = \mathbb{R}$

b) $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 - x}$,
 $\mathcal{D}(f \circ g) = (-\infty, 1)$, $\mathcal{H}(f \circ g) = \langle 0, \infty \rangle$
 $(g \circ f)(x) = 1 - \sqrt{x}$
 $\mathcal{D}(g \circ f) = \langle 0, \infty \rangle$, $\mathcal{H}(g \circ f) = (-\infty, 1)$

d) $(f \circ g)(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$,
 $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f \circ g) = \{-1\} \cup \{0\} \cup \{1\}$
 $(g \circ f)(x) = \cos(\operatorname{sgn} x)$
 $\mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(g \circ f) = \{\cos 1\} \cup \{1\}$

Příklad 4.9. Napište předpis a definiční obor složene funkce $f \circ g \circ h$, je-li

a) $f(x) = \ln x$, $g(x) = 1 - x$, $h(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = |x|$, $g(x) = 2 - x$, $h(x) = x^2$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = x + \pi$

Řešení 4.9.

a) $(f \circ g \circ h)(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$, $\mathcal{D}(f \circ g \circ h) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

b) $(f \circ g \circ h)(x) = |2 - x^2|$, $\mathcal{D}(f \circ g \circ h) = \mathbb{R}$

c) $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{\sin(x + \pi)}$, $\mathcal{D}(f \circ g \circ h) = \bigcup \{ \langle (2k - 1)\pi, 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z} \}$

Příklad 4.10. Složená funkce: Zapište následující funkce jako složené.

a) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x+3}}$ ($= e^{1 - \frac{2}{x+3}}$)

b) $f(x) = \sqrt{1 - \log^2(x + 1)}$

c) $f(x) = 1 - 2^{\sin x}$

Řešení 4.10.

a) $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, $f_1(x) = x + 3$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = 1 - 2x$, $f_4(x) = e^x$

b) $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = \log(x)$, $f_3(x) = 1 - x^2$, $f_4(x) = \sqrt{x}$

c) $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = 2^x$, $f_3(x) = 1 - x$