

Integrály

1) Vypočítejte přímou integrací:

a) $\int_0^1 (\sqrt{x} + 1)^2 dx$

c) $\int_0^1 \frac{(\sqrt{x}+x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$

e) $\int_1^2 \frac{(3x-1)^2}{x} dx$

b) $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x} dx$

d) $\int_0^1 (x-2)(x-1)^2 dx$

2) Řešte metodou substituce:

a) $\int \frac{6x}{x^2+1} dx$

d) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$

g) $\int \frac{\arctan x}{x^2+1} dx$

b) $\int \frac{2x+6}{\sqrt[3]{x^2+6x+10}} dx$

e) $\int x^2 e^{x^3} dx$

h) $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^5} dx$

c) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$

i) $\int \cos^2 x \sin^5 x dx$

3) Řešte metodou per-partes:

a) $\int x e^{2x} dx$

d) $\int \ln x dx$

g) $\int x^2 \ln x dx$

b) $\int x \sin x dx$

e) $\int \ln^2 x dx$

h) $\int \arccos x dx$

c) $\int x^2 e^{-x} dx$

f) $\int x \ln x dx$

i) $\int \arctg x dx$

4) Integrace racionální lomené funkce

a) $\int \frac{1}{x^2-1} dx$

d) $\int \frac{1}{x^3+x^2} dx$

g) $\int_5^\infty \frac{1}{x^2-6x+8} dx$

b) $\int \frac{1}{x^3-x^2-2x} dx$

e) $\int \frac{1}{x^3+x} dx$

h) $\int_5^\infty \frac{1}{x^2-6x+9} dx$

c) $\int \frac{x^3}{x^2+2x+1} dx$

f) $\int \frac{6x+1}{x^2+4x+13} dx$

i) $\int_5^\infty \frac{1}{x^2-6x+10} dx$

5) Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami

a) $y = 4 - x^2, y = 2 + x$

c) $y = \frac{14}{x}, y = 9 - x$

e) $y = 2x - x^2, y = x$

b) $y = x^3, y = 4x^2$

d) $y = x^2, y = x^4$

f) $x = y^2, x = 3 - 2y^2$

Výsledky:

1)

a) $\frac{17}{6}$

c) $\frac{37}{5}$

e) $\frac{15}{2} + \ln 2$

b) $\frac{12}{17}$

d) $-\frac{7}{12}$

2)

a) $3 \ln(x^2 + 1)$

d) $\ln(e^x + 1)$

g) $\frac{1}{2} \arctan^2 x$

b) $\frac{3}{2} \sqrt[3]{(x^2 + 6x + 10)^2}$

e) $\frac{1}{3} e^{x^3}$

h) $-\frac{1}{4} \frac{1}{(1 + \sin x)^4}$

c) $\frac{1}{2} \ln^2 x$

f) $-\frac{3}{4} (1 - x^2)^{\frac{2}{3}}$

i) $-\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x$

3)

a) $\frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1)$

d) $x (\ln x - 1)$

g) $\frac{1}{9} x^3 (3 \ln x - 1)$

b) $\sin x - x \cos x$

e) $x (\ln^2 x - 2 \ln x + 2)$

h) $x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$

c) $e^{-x} (x^2 + 2x + 2)$

f) $\frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1)$

i) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$

4)

a) $\frac{1}{2} (\ln|x - 1| - \ln|x + 1|)$

f) $3 \ln(x^2 + 4x + 13) + \operatorname{arctg} \left(\frac{x+2}{3}\right)$

b) $\frac{1}{6} \ln|x - 2| - \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x + 1|$

g) $\frac{\ln 3}{2}$

c) $\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{x+1} - \frac{5}{2} + 3 \ln|x + 1|$

h) $\frac{1}{2}$

d) $-\frac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x + 1|$

i) $\frac{1}{2} (\pi - 2 \operatorname{arctg} 2)$

e) $\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$

5)

a) $\frac{9}{2}$

c) $\frac{45}{2} - 14 \ln \frac{7}{2}$

e) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{64}{3}$

d) $\frac{4}{15}$

f) $x = y^2, \quad x = 3 - 2y^2$