Komplexní čísla

Matematika pro geoinformatiky

18. 12. 2024

1) Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = \left(\frac{1-i}{1+\sqrt{3}\,i}\right)^{24}$$

2) Určete velikost i argument komplexního čísla

$$a)\, z = \frac{2i}{1+i^{99}}, \quad b)\, z = \left(\frac{i^{17}+i^{18}+i^{19}}{i^{20}+i^{21}+i^{22}}\right)^{36}, \quad c)\, z = \sqrt{i}$$

Argument uvádějte v základním tvaru, tedy z intervalu $[0, 2\pi)$.

3) Rozhodněte, zda komplexní číslo

$$z = \frac{(-1+i)^{1000}}{(-1-i)^{996}}$$

leží v množině

$$M = \{z \in \mathbb{C}; \quad |z+3-i| \leq \sqrt{2}\}.$$

4) Najděte komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ splňující

$$|z| = 1 \quad \wedge \quad |z-i| = |z-1|$$

5) V Gaussově rovině znázorněte všechna komplexní čísla $z \in \mathbb{C}$ splňující podmínku

a) $Re(z) < Im(z)$

b) $(Re(z))^2 \leq Im(z)$

c) $Re(z) + Im(z) = 3$

d) $Re(z) \cdot Im(z) = 3$

e) $(Re(z))^2 + (Im(z))^2 = 3$

f) $Im(z) = (Re(z))^2 - 3\,Re(z)$

g) $Re(z) \cdot (Im(z))^2 - (Re(z))^3 = 0$

h) $|z| = |z+2-2i|$

i) $|z-7i| = 5$

j) $|z-1| + |z+1| = 4$

k) $|z| + |z-3| = 1$

l) $|z-i| + |z-1-2i| = \sqrt{2}$

m) $\big||z-3| - |z+1|\big| = 2$

Určete čísla splňující danou podmínku, které mají argument: a) $\frac{\pi}{4}$, b) $\frac{3\pi}{4}$, c) $\frac{\pi}{2}$.

6) V komplexním oboru řešte rovnice

a) $2^x = -8$

b) $2^x = 1+i$

c) $e^x = -1$

d) $\ln x = i\pi$

e) $\cos x = 3$

f) $\sin x = 4$

Výsledky:

1) 2^{-12}

2)

a) $|z| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$

b) $|z| = 1, \quad \varphi = 0$

c) $|z| = 1, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$ (dvě řešení)

3) Ano, leží. Množina M je kruh se středem v bodě $-3+i$ a poloměrem $\sqrt{2}$, číslo $z = -4$ leží na hranici M (dosazením lze ověřit, že splňuje nerovnost $|z+3-i| \leq \sqrt{2}$).

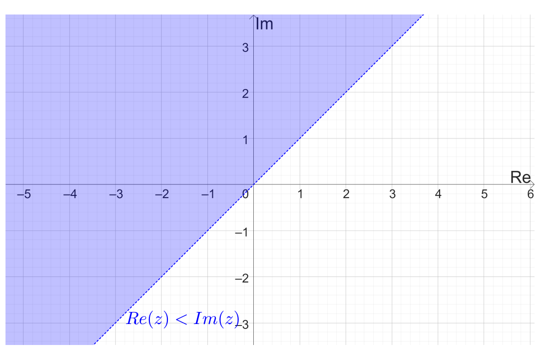
4) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ (čísla ležící v průniku jednotkové kružnice s osou 1. a 3. kvadrantu)

5)

a) Oblast nad přímkou, v kartézských souřadnicích

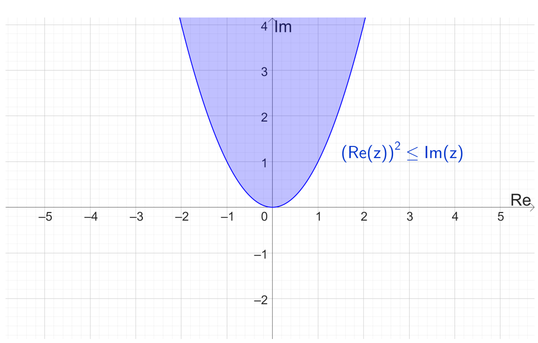
$$y > x$$

Žádné číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ podmínku nesplňuje. Všechna čísla s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ nebo $\frac{\pi}{2}$ podmínku splňují.



b) Vnitřní oblast paraboly, v kartézských souřadnicích

$$y \geq x^2$$

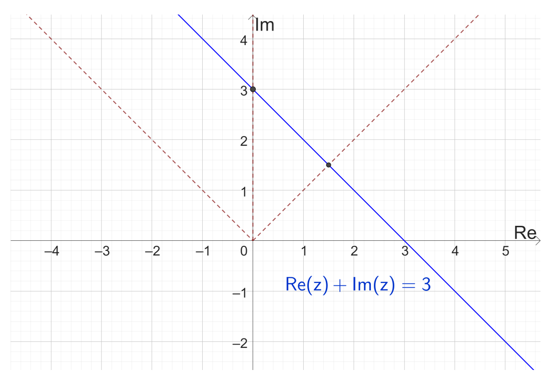


Čísla s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce jsou všechna čísla na úsečce s krajními body 0 a $1+i$. Čísla s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce jsou všechna čísla na úsečce s krajními body 0 a $-1+i$. Všechna čísla a argumentem $\frac{\pi}{2}$ podmínku splňují.

c) Přímka, v kartézských souřadnicích má rovnici

$$y = 3 - x$$

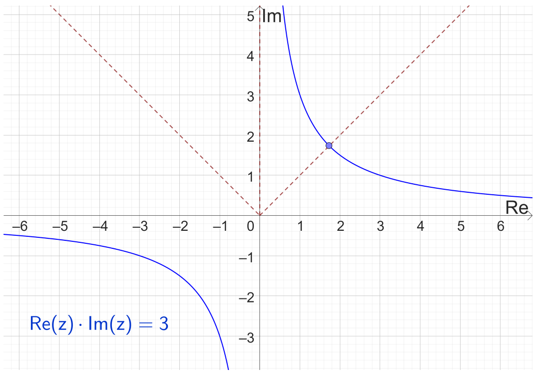
Číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce je $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$, číslo s argumentem $\frac{\pi}{2}$ je $3i$. Žádné číslo s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ podmínku nesplňuje.



d) Hyperbola, v kartézských souřadnicích má rovnici

$$y = \frac{3}{x}$$

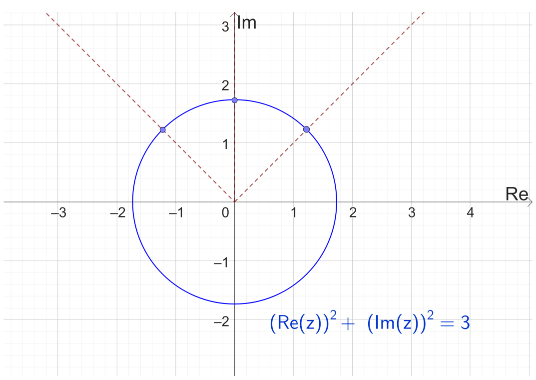
Číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce je $\sqrt{3} + \sqrt{3}i$. Žádné číslo s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ nebo $\frac{\pi}{2}$ podmínku nesplňuje.



e) Kružnice se středem v bodě 0 a poloměrem $\sqrt{3}$. V kartézských souřadnicích má rovnici

$$x^2 + y^2 = 3$$

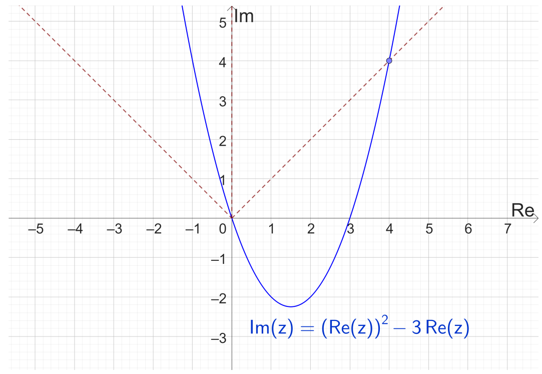
Číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce je $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}i$, číslo s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ je $-\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}i$ a číslo s argumentem $\frac{\pi}{2}$ je $\sqrt{3}i$.



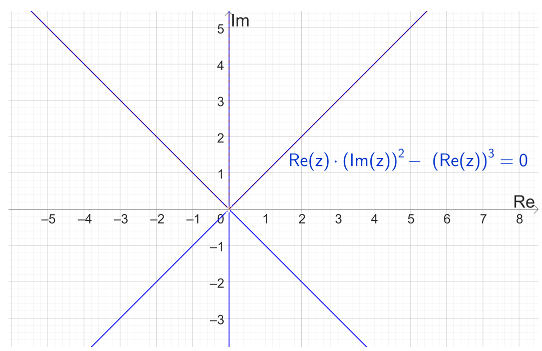
f) Parabola, v kartézských souřadnicích má rovnici

$$y = x^2 - 3x$$

Číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce je pouze $4 + 4i$. Žádné číslo s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ nebo $\frac{\pi}{2}$ podmínku nesplňuje.



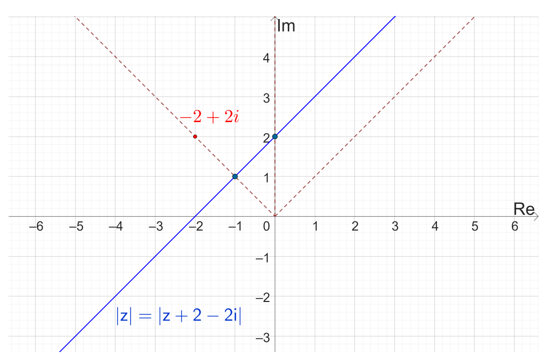
g) Podmínku splňují všechna komplexní čísla s argumenty $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$ a $\frac{7\pi}{4}$. V kartézských souřadnicích jde o body ležící na přímkách $x = 0$, $y = x$ a $y = -x$.



h) Osa úsečky s krajními body 0 a $-2 + 2i$. V kartézských souřadnicích je to přímka o rovnici

$$y = x + 2$$

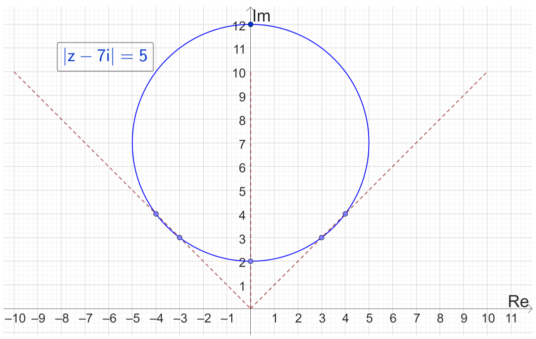
Žádné číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ podmínce nevyhovuje, číslo s argumentem $-1+i$ a číslo s argumentem $\frac{\pi}{2}$ je $2i$.



i) Kružnice se středem v bodě $7i$ a poloměrem 5. V kartézských souřadnicích má rovnici:

$$x^2 + (y - 7)^2 = 25$$

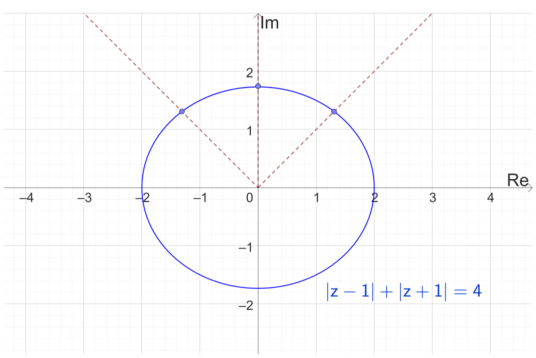
Čísla s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce jsou $3+3i$ a $4+4i$, čísla s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ jsou $-3+3i$ a $-4+4i$, čísla a argumentem $\frac{\pi}{2}$ jsou $2i$ a $12i$.



j) Elipsa s ohnisky v bodech 1 a -1 a středem v bodě 0, jejíž hlavní poloosa má délku 2 a vedlejší poloosa má délku $\sqrt{3}$. V kartézských souřadnicích má tato elipsa rovnici

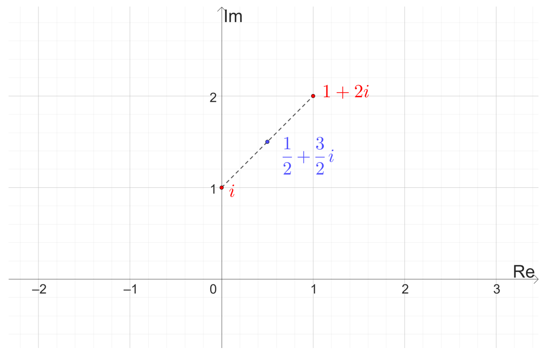
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

Číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce je $\sqrt{\frac{12}{7}}+\sqrt{\frac{12}{7}}i$, číslo s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ je $-\sqrt{\frac{12}{7}}+\sqrt{\frac{12}{7}}i$ a číslo s argumentem $\frac{\pi}{2}$ je $\sqrt{3}i$.



k) Podmínku nesplňuje žádné komplexní číslo.

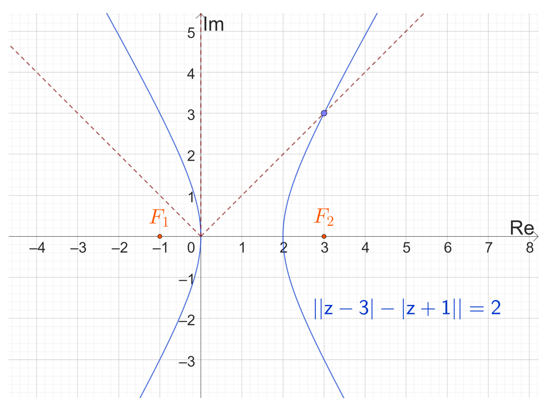
l) Podmínku splňují komplexní čísla ležící na úsečce mezi body $1+2i$ a i.



m) Hyperbola s ohnisky v bodech -1 a 3 s vrcholy v bodech 0 a 2 (množina bodů, pro které je absolutní hodnotu rozdílu jejich vzdáleností od dvou daných bodů konstantní). V kartézských souřadnicích má tato hyperbola rovnici

$$-3x^2+y^2+6x=0$$

Číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce je pouze $3+3i$. Žádné číslo s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ nebo $\frac{\pi}{2}$ podmínku nesplňuje.



6)

a) $3+i\,\frac{1}{\ln 2}(\pi+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$

b) $\frac{1}{2}+i\,\frac{1}{\ln 2}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$

c) $i(\pi+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$

d) -1

e) $2k\pi-i\ln(3\pm 2\sqrt{2})$, $k\in\mathbb{Z}$

f) $\frac{\pi}{2}+2k\pi-i\ln(4\pm\sqrt{15})$, $k\in\mathbb{Z}$