Příklad 8.2. Graficky určete počet řešení rovnice. Dále ověřte, že daný interval je separační a ověřte předpoklady Newtonovy metody a spočtěte první aproximaci řešení.

a) $2x^3 - 3x + 5 = 0, \quad \langle -2, -1 \rangle$

b) $20 + 3x^2 - 2x^3 = 0, \quad \langle 2, 3 \rangle$

c) $3 \ln x + x - 2 = 0, \quad \langle 1, 2 \rangle$

d) $\mathrm{e}^x - 3 + x^2 = 0, \quad \langle 0, 1 \rangle$

e) $\ln x - x^2 + 2x = 0, \quad \langle 2, 3 \rangle$

f) $x + \mathrm{e}^x + 1 = 0, \quad \langle -2, -1 \rangle$

Řešení 8.2.

a) 1 kořen
- i) $f(-2) = -5,\ f(-1) = 6$
- ii) $f'(x) = 6x^2 - 3 > 0$ na $\langle -2, -1 \rangle$
- iii) $f''(x) = 12x < 0$ na $\langle -2, -1 \rangle$
- iv) $x_0 = -2,\ x_1 = -\frac{37}{21} \doteq -1,76$

b) 1 kořen
- i) $f(2) = 16,\ f(3) = -7$
- ii) $f'(x) = 6\left(x - x^2\right) < 0$ na $\langle 2, 3 \rangle$
- iii) $f''(x) = 6 - 12x < 0$ na $\langle 2, 3 \rangle$
- iv) $x_0 = 3,\ x_1 = \frac{101}{36} \doteq 2,97$

c) 1 kořen
- i) $f(1) = -1,\ f(2) = 3 \ln 2$
- ii) $f'(x) = \dfrac{3+x}{x} > 0$ na $\langle 1, 2 \rangle$
- iii) $f''(x) = -\dfrac{3}{x^2} < 0$ na $\langle 1, 2 \rangle$
- iv) $x_0 = 1,\ x_1 = \frac{5}{4} = 1,25$

d) 2 kořeny
- i) $f(0) = -2,\ f(1) = \mathrm{e} - 2$
- ii) $f'(x) = \mathrm{e}^x + 2x > 0$ na $\langle 0, 1 \rangle$
- iii) $f''(x) = \mathrm{e}^x + 2 > 0$ na $\langle 0, 1 \rangle$
- iv) $x_0 = 1,\ x_1 = \frac{4}{\mathrm{e}+2}$

e) 2 kořeny
- i) $f(2) = \ln 2,\ f(3) = \ln 3 - 3$
- ii) $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 2 < 0$ na $\langle 2, 3 \rangle$
- iii) $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 < 0$ na $\langle 2, 3 \rangle$
- iv) $x_0 = 3,\ x_1 = \frac{3}{11}(8 + \ln 3) \doteq 2,48$

f) 1 kořen
- i) $f(-2) = \frac{1}{\mathrm{e}^2} - 1,\ f(-1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$
- ii) $f'(x) = 1 + \mathrm{e}^x > 0$ na $\langle -2, -1 \rangle$
- iii) $f''(x) = \mathrm{e}^x > 0$ na $\langle -2, -1 \rangle$
- iv) $x_0 = -1,\ x_1 = -1 - \frac{1}{\mathrm{e}+1} \doteq -1,27$

Příklad 8.3. Graficky určete počet řešení rovnice a odhadněte separační interval délky jedna pro nejmenší kladný z nich. Ověřte předpoklady Newtonovy metody a spočtěte první aproximaci řešení.

a) $x \cdot \log_2 x = 1$

b) $\mathrm{e}^{-x} - \sin x = 0$

c) $\sqrt{x} - \mathrm{e}^{2-x} = 0$

d) $\sqrt[3]{x+1} + x - 2 = 0$

Řešení 8.3.

a) 1 kořen, separační int. $\langle 1, 2 \rangle$
- i) $f(1) = -1,\ f(2) = 1$
- ii) $f'(x) = \log_2 x + \frac{1}{\ln 2} > 0$ na $\langle 1, 2 \rangle$
- iii) $f''(x) = \frac{1}{x \ln 2} > 0$ na $\langle 1, 2 \rangle$
- iv) $x_0 = 2,\ x_1 = \frac{\ln 2 + 2}{\ln 2 + 1} \doteq 1,59$

b) ∞ kořenů, separační int. $\langle 0, 1 \rangle$
- i) $f(0) = 1,\ f(1) = \frac{1}{e} - \sin 1$
- ii) $f'(x) = -e^{-x} - \cos x < 0$ na $\langle 0, 1 \rangle$
- iii) $f''(x) = e^{-x} + \sin x > 0$ na $\langle 0, 1 \rangle$
- iv) $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2}$

c) 1 kořen, separační int. $\langle 1, 2 \rangle$
- i) $f(1) = 1 - \mathrm{e},\ f(2) = \sqrt{2} - 1$
- ii) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^{2-x} > 0$ na $\langle 1, 2 \rangle$
- iii) $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \mathrm{e}^{2-x} < 0$ na $\langle 1, 2 \rangle$
- iv) $x_0 = 1,\ x_1 = \frac{4\mathrm{e}-1}{2\mathrm{e}+1} \doteq 1.53$

d) 1 kořen, separační int. $\langle 0, 1 \rangle$
- i) $f(0) = -1,\ f(1) = \sqrt[3]{2} - 1$
- ii) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} + 1 > 0$ na $\langle 0, 1 \rangle$
- iii) $f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}} < 0$ na $\langle 0, 1 \rangle$
- iv) $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{3}{4}$