

Příklad 10.2. Tabulkové integrály, součet a rozdíl integrálů: Vypočítejte zadaný integrál.

a) $\int \sqrt{x}\sqrt{x} dx$

b) $\int (3x^2 + x - 7) dx$

c) $\int \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

d) $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

e) $\int \left(\cos x + \frac{1}{x}\right) dx$

f) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

g) $\int \frac{-5}{1+x^2} dx$

h) $\int \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{e^x}{3}\right) dx$

Řešení 10.2.

a) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + C$

b) $x^3 + \frac{x^2}{2} - 7x + C$

c) $\frac{x^5}{5} + x^2 - \frac{1}{x} + C$

d) $2 \arcsin x + C$

e) $\sin x + \ln|x| + C$

f) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$

g) $-5 \operatorname{arctg} x + C$

h) $-2 \operatorname{cotg} x - \frac{e^x}{3} + C$

Příklad 10.3. Per partes: Vypočítejte zadaný integrál.

a) $\int xe^x dx$

b) $\int x \cos x dx$

c) $\int (x^2 + 1)e^{2x} dx$

d) $\int x^2 \sin x dx$

e) $\int x \ln x dx$

f) $\int \ln x dx$

g) $\int x^3 \ln x dx$

h) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

i) $\int \cos^2 x dx$

j) $\int e^x \cos x dx$

Řešení 10.3.

a) $xe^x - e^x + C$

b) $x \sin x + \cos x + C$

c) $\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2 - 2x + 3) + C$

d) $(2-x^2) \cos x + 2x \sin x + C$

e) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

f) $x \ln x - x + C$

g) $\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$

h) $-\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} + C$

i) $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$

j) $\frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C$

Příklad 10.4. Substituce: Vypočítejte zadaný integrál.

a) $\int \sin 3x \, dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} \, dx$

l) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

b) $\int e^{5x} \, dx$

g) $\int \sin^3 x \, dx$

m) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

c) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

h) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \, dx$

n) $\int x e^{-x^2} \, dx$

d) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$

i) $\int \operatorname{tg} x \, dx$

o) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

e) $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} \, dx$

j) $\int \frac{5+\ln x}{x} \, dx$

p) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

k) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx$

Řešení 10.4.

a) $-\frac{1}{3} \cos 3x + C$

f) $\frac{2}{3} \sqrt{1+x} (x-2) + C$

k) $\cos \frac{1}{x} + C$

b) $\frac{1}{5} e^{5x} + C$

g) $\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$

l) $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$

c) $2 \sin \sqrt{x} + C$

h) $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + C$

m) $-\frac{1}{2} \arccos^2 x + C$

d) $\operatorname{arctg} e^x + C$

i) $-\ln |\cos x| + C$

n) $-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$

e) $-\frac{1}{1+\sin x} + C$

j) $5 \ln x + \frac{1}{2} \ln^2 x + C$

o) $-\sqrt{1-x^2} + C$

p) $\frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$

Příklad 10.5. Kombinace substituce a per partes: Vypočítejte zadaný integrál.

a) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

c) $\int \frac{x}{(e^x)^2} \, dx$

e) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

b) $\int \cos \sqrt{x} \, dx$

d) $\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$

f) $\int \arcsin x \, dx$

Řešení 10.5.

a) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$

c) $-\frac{1}{4}(1+2x)e^{-2x} + C$

e) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$

b) $2(\cos \sqrt{x} + \sqrt{x} \sin \sqrt{x}) + C$

d) $-x \operatorname{cotg} x + \ln \sin x + C$

f) $\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x + C$

Příklad 10.7. Substituce za jmenovatel a substituce vedoucí na $\operatorname{arctg} t$: Vypočítejte zadaný integrál.

a) $\int \frac{3x^2 - 4}{x^3 - 4x + 9} dx$

d) $\int \frac{3}{2x^2 + 1} dx$

b) $\int \frac{3x + 3}{x^2 + 2x + 2} dx$

e) $\int \frac{5}{x^2 + 2x + 2} dx$

c) $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx$

f) $\int \frac{2}{x^2 + 2x + 5} dx$

Řešení 10.7.

a) $\ln |x^3 - 4x + 9| + C$

d) $\frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}x + C$

b) $\frac{3}{2} \ln |x^2 + 2x + 2| + C$

e) $5 \operatorname{arctg}(x + 1) + C$

c) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$

f) $\operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C$

Příklad 10.8. Převod na ryze lomenou funkci a parciální zlomky: Vypočítejte zadaný integrál.

a) $\int \frac{1}{x^2 - 4} dx$

f) $\int \frac{1 + 2x - x^2}{x^2(2x + 1)} dx$

b) $\int \frac{14 + x}{x^2 - 2x - 8} dx$

g) $\int \frac{1}{(x + 1)(x^2 + 1)} dx$

c) $\int \frac{3x + 8}{2x^2 - x - 3} dx$

h) $\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 2x} dx$

d) $\int \frac{5x + 6}{x^2 - 6x + 8} dx$

i) $\int \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^2 - x} dx$

e) $\int \frac{3x + 2}{8x - x^2 - 12} dx$

j) $\int \frac{3x^2 + 6x + 6}{x^2 - 4x + 4} dx$

Řešení 10.8.

a) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$

f) $-\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln |2x + 1| + C$

b) $-2 \ln |x + 2| + 3 \ln |x - 4| + C$

g) $\frac{1}{2} \ln |x + 1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \ln |x^2 + 1| + C$

c) $\frac{5}{2} \ln |2x - 3| - \ln |x + 1| + C$

h) $x + 2 \ln x - \ln |x + 2| + C$

d) $13 \ln |4 - x| - 8 \ln |2 - x| + C$

i) $-x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 2 \ln |x - 1| - \ln |x| + C$

e) $2 \ln |x - 2| - 5 \ln |x - 6| + C$

j) $3 \left(6 \ln |x - 2| + x - \frac{10}{x-2} \right) + C$

Příklad 10.9.

a) $\int_0^1 x^3 dx$

b) $\int_0^{2\pi} \sin x dx$

c) $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

d) $\int_1^2 x \ln x dx$

e) $\int_{-1}^1 (x e^{x \operatorname{arctg} x} + e^x) dx$

f) $\int_0^1 \frac{-1}{3x^2 + 1} dx$

g) $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$

h) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$

Řešení 10.9.

a) $\frac{1}{4}$

b) 0

c) 4

d) $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$

e) $e - e^{-1}$ (1. člen je lichá funkce)

f) $-\frac{\sqrt{3}}{9} \pi$

g) $\frac{3}{2}$

h) $\frac{\ln 3 - \ln 2}{2}$

Příklad 10.10. Konvergentní nevlastní integrál: Rozhodněte, zda zadaný integrál konverguje nebo diverguje.

a) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$

c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

d) $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

Řešení 10.10.

a) konverguje, 1

b) konverguje, 2

c) konverguje, 1

d) konverguje, 1

Příklad 10.11. Konvergentní nevlastní integrál: Rozhodněte, zda zadaný integrál konverguje nebo diverguje.

a) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 10x + 25} dx$

c) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 4} dx$

b) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx$

d) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 7x + 10} dx$

Řešení 10.11.

a) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{2}$

b) $\ln \frac{3}{2}$

d) $\frac{1}{3} \ln \frac{5}{2}$

Příklad 10.12. Divergentní nevlastní integrál: Rozhodněte, zda zadaný integrál konverguje nebo diverguje.

a) $\int_0^{\infty} e^x dx$

c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

e) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

b) $\int_0^{\infty} x^2 dx$

d) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

Řešení 10.12.

a) - f) diverguje

Pozor, nevlastní integrál f) nekonverguje, přestože jde o integrál liché funkce přes souměrný integrační interval, tedy bychom čekali, že se bude rovnat nule.

Příklad 10.15. Neurčitý integrál: Vypočítejte zadaný integrál.

a) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$

l) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$

b) $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$

m) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}} dx$

c) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

n) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

d) $\int (2x-1)^4 dx$

o) $\int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx$

e) $\int e^x \sin x dx$

p) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-x} dx$

f) $\int \frac{x^3}{x^2+3x+2} dx$

q) $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$

g) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$

h) $\int \frac{1}{9x^2+4} dx$

r) $\int x^2 \ln x dx$

i) $\int x\sqrt{1+x^2} dx$

s) $\int \sqrt{x} \ln x dx$

j) $\int (x^2-1)e^x dx$

t) $\int \operatorname{cotg} x dx$

k) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$

u) $\int \arccos x dx$

Řešení 10.15.

a) $x - \operatorname{arctg} x + C$

b) $\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C$

c) $\operatorname{tg} x - x + C$

d) $\frac{(2x-1)^5}{10} + C$

e) $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

f) $\frac{x^2}{2} - 3x + \ln \frac{(x+2)^8}{|x+1|} + C$

g) $-2 \cos x + C$

h) $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3}{2}x + C$

i) $\frac{1}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} + C$

j) $(x-1)^2 e^x + C$

k) $e^x - \ln |e^x + 1| + C$

l) $\sin x - \cos x + C$

m) substituce $t = \sqrt{x}$, $-\frac{4}{3} \sqrt{(1-\sqrt{x})^3} + C$

n) substituce $t = e^x - e^{-x}$, $\ln(e^x - e^{-x}) + C$

o) $\ln |1 - \cos x| + C$

p) substituce $t = \sqrt{x}$, $-2\sqrt{x} + \ln \frac{\sqrt{x}+1}{|\sqrt{x}-1|} + C$

q) $\ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} - \frac{1}{(x+1)} + \operatorname{arctg} x + C$

r) $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

s) $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + C$

t) $\ln |\sin x| + C$

u) $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

Příklad 10.17. Určitý a nevlastní integrál: Vypočítejte zadaný integrál.

a) $\int_1^3 \frac{18x^2 - 2}{3x - 1} dx$

b) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

c) $\int_{-1}^0 2x \sqrt{x^2 + 1} dx$

d) $\int_e^{e^2} \frac{\ln^4 x}{x} dx$

e) $\int_1^\infty \frac{dx}{(x-1)^2}$

f) $\int_{-\infty}^0 x e^{2x} dx$

Řešení 10.17.

a) $28 \quad (3x^2 + 2x)$

b) $e - \sqrt{e} \quad \left(-e^{\frac{1}{x}}\right)$

c) $\frac{2}{3} (1 - 2\sqrt{2}) \quad \left(\frac{2}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\right)$

d) $\frac{31}{5} \quad \left(\frac{1}{5} \ln^5 x\right)$

e) diverguje (∞)

f) konverguje (-0.25)

Příklad 11.1. Vypočítejte obsah plochy ohraničené zadanými křivkami.

a) grafy funkcí $f(x) = 3 - x$ a $g(x) = \frac{2}{x}$

b) graf funkce $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$, $x \in \langle -2, 0 \rangle$, a osa x

c) grafy funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = x + 2$

d) grafy funkcí $f(x) = \sin x + 2$, a $g(x) = -\sin x + 2$, přímky $x = 0$ a $x = \frac{3\pi}{2}$

e) grafy funkcí $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, a $g(x) = \frac{x^2}{2}$

f) graf funkce $f(x) = xe^{-x}$, osa x , v polorovině $x \geq 0$

g) graf funkce $\frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, 1)$, a osa x

h) grafy funkcí $f(x) = -3 + 8x - 2x^2$ a $g(x) = 6 - 4x + x^2$

a) $\int_1^2 3 - x - \frac{2}{x} dx = \frac{3}{2} - 2 \ln 2 \text{ j}^2$

e) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \text{ j}^2$

b) $-\int_{-2}^0 x\sqrt{4-x^2} dx = \frac{8}{3} \text{ j}^2$

f) $\int_0^\infty xe^{-x} dx = 1 \text{ j}^2$

c) $\int_{-1}^2 x + 2 - x^2 dx = \frac{9}{2} \text{ j}^2$

g) $\int_0^1 \frac{3x+1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \text{ j}^2$

d) $6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 6 \text{ j}^2$

h) $\int_1^3 -9 + 12x - 3x^2 dx = 4 \text{ j}^2$

Příklad 11.2. Vypočítejte obsahy jednotlivých ploch ohraničených zadanými křivkami.

a) graf funkce $f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, \pi^2)$, a osa x

b) graf funkce $f(x) = \ln x$, $x \in \langle \frac{1}{e}, e \rangle$, a osa x

c) graf funkce $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$, osa x a přímky $x = -1$ a $x = 3$

d) graf funkce $\sin(x - \frac{\pi}{4})$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$, a osa x

Řešení 11.2.

a) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \text{ j}^2$, $-\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \text{ j}^2$

b) $-\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx = 1 - \frac{2}{e} \text{ j}^2$, $\int_1^e \ln x dx = 1 \text{ j}^2$

c) $-\int_{-1}^0 (1 - \sqrt{x+1}) dx = \frac{1}{3} \text{ j}^2$, $\int_0^3 (x - \sqrt{x+1}) dx = \frac{5}{3} \text{ j}^2$

d) $-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x - \frac{\pi}{4}) dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ j}^2$, $\int_{\frac{\pi}{4}}^\pi \sin(x - \frac{\pi}{4}) dx = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ j}^2$

Příklad 11.5. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací příslušné části grafu funkce f kolem osy x . V prvních dvou příkladech těleso načrtněte.

a) $f(x) = 2x - x^2, x \in \langle 0, 2 \rangle$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 3}}, x \in \langle -1, 1 \rangle$

b) $f(x) = \frac{2}{x + 2}, x \in \langle -1, 1 \rangle$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}, x \in \langle \frac{2}{\pi}, \infty \rangle$

Řešení 11.5.

a) $\pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16}{15} \pi j^3$

c) $\pi \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 1}{x - 3} dx = \pi(6 - 8 \ln 2) j^3$

b) $\pi \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{x + 2}\right)^2 dx = \frac{8}{3} \pi j^3$

d) $\pi \int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx = \pi j^3$