1. Čtvrtetní písemná práce z matematiky – vzor

Analytická geometrie lineárních útvarů v rovině a v prostoru

1) Rozhodněte, zda jsou vektory u, v navzájem kolmé. Zdůvodněte.
   a) u=(2,1) , v=(-3,6)   Vektory u, v jsou kolmé $\iff u\cdot v = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 = 0$

   $u\cdot v = 2\cdot(-3) + 1\cdot 6 = 0 \Rightarrow$ ANO, JSOU KOLMÉ

   b) u=(2,1) , v=(6,-3)

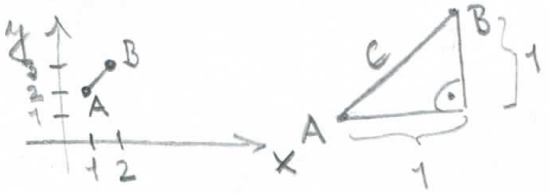
   $u\cdot v = 2\cdot 6 + 1\cdot(-3) = 9 \neq 0 \Rightarrow$ NE, NEJSOU KOLMÉ

   Spočtěte úhel vektorů u=(0,2) a v=(-5,5)

   $$\cos\varphi = \frac{|u\cdot v|}{|u|\cdot|v|} = \frac{|0\cdot(-5)+2\cdot 5|}{\sqrt{0^2+2^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+5^2}} = \frac{10}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5\sqrt{50}}{50} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

   Spočtěte vzdálenost bodů A=[1,2] a B=[2,3].

   $$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$



PYTHAGOROVA VĚTA: $c = |AB| = \sqrt{1^2+1^2}$

$|AB| = \sqrt{2}$

2) Najděte rovnici přímky p, která prochází body A=[-1,1] a B=[1,2].
   Dále najděte rovnici přímky q, která prochází bodem C=[2,4] a je **rovnoběžná** s přímkou p.
   Dále najděte rovnici přímky r, která prochází bodem D=[1,0] a je **kolmá** na přímku p.
   Vše zakreslete v jednom obrázku.

směrový vektor přímky p: $\vec{A_p} = \vec{AB} = B - A = (2;1)$
normálový vektor přímky p: $\vec{n_p} = (-1,2)$ } platí, že $\vec{A_p}\cdot\vec{n_p} = 0$

$p: (-1)x + 2y + c = 0$, dopočteme konstantu c: $A \in p$, proto

$(-1)\cdot(-1) + 2\cdot 1 + c = 0$

$\boxed{c = -3}$

$\boxed{p: -x + 2y - 3 = 0}$

$q: (-1)x + 2y + d = 0$, přímky p a q jsou rovnoběžné, proto mají stejný normálový vektor

$C \in q: (-1)\cdot 2 + 2\cdot 4 + d = 0$

$d = -6$

$\boxed{q: -x + 2y - 6 = 0}$

$r \perp p$, proto $\vec{n_r} \perp \vec{n_p}$

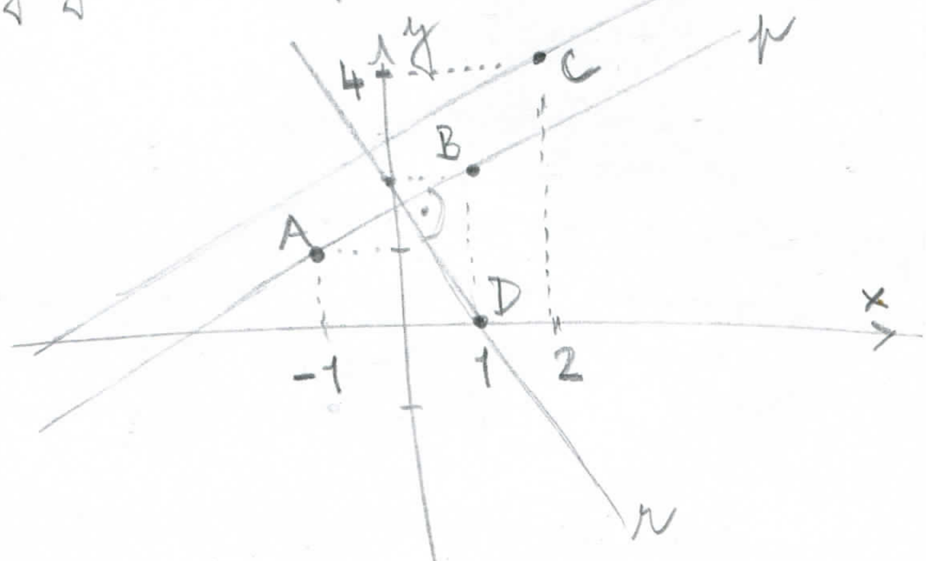
$\vec{n_r} = (2;1)$

$r: 2x + y + c = 0$

$D \in r: 2\cdot 1 + 0 + c = 0$

$c = -2$

$\boxed{r: 2x + y - 2 = 0}$



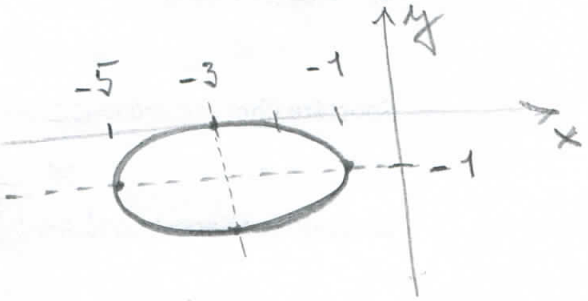
Analytická geometrie kvadratických útvarů – kuželosečky

3) Rozhodněte o jakou kuželosečku se jedná, převeďte obecnou rovnici kuželosečky na středový tvar, určete její vlastnosti a přesně kuželosečku zakreslete.
V případě kružnice určete střed a poloměr.
V případě elipsy určete střed a délky poloos.
V případě paraboly určete vrchol paraboly a průsečíky s osami.
V případě hyperboly určete střed, délky poloos a rovnice asymptot (asymptoty také zakreslete do obrázku)

a) $x^2 + 4y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$

$x^2 + 6x + 9 + 4(y^2 + 2y + 1) = 4 \quad | :4$

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$$



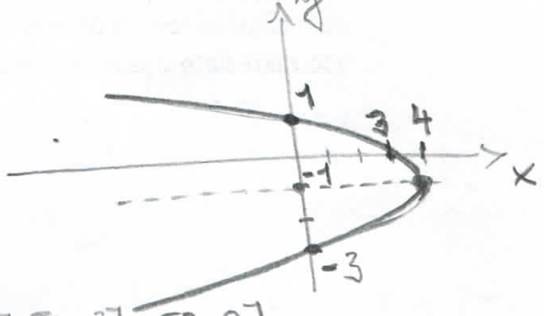
Elipsa se středem v bodě $[-3,-1]$, jejíž hlavní poloosa má délku 2 a je rovnoběžná s osou x, vedlejší poloosa má délku 1 a je rovnoběžná s osou y.

b) $2y^2 + 2x + 4y - 6 = 0 \quad | :2$

$y^2 + x + 2y - 3 = 0$

$\boxed{x = -y^2 - 2y + 3}$

$x = (-1)(y^2 + 2y - 3) = -(y-1)(y+3)$

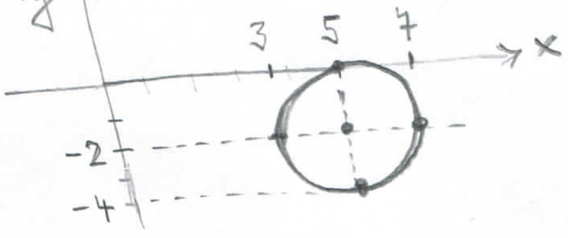


parabola „otevřená doleva"
vrchol: $[4;-1]$, průsečíky s osami: $[0,1]$, $[0,-3]$, $[3,0]$

c) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 = 4$

$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4$



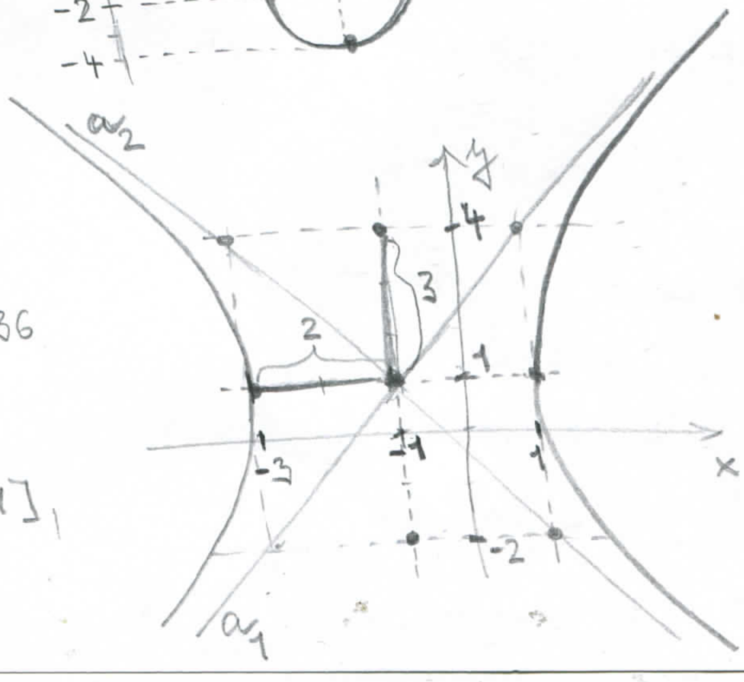
kružnice se středem $[5;-2]$ a poloměrem 2

d) $9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0$

$9x^2 + 18x + 9 - 4y^2 + 8y - 4 = 36$

$9(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 2y + 1) = 36 \quad | :36$

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$



Hyperbola se středem v bodě $[-1,1]$, s délkami poloos 2 a 3

4) Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a kružnice k:
(tedy zda mají 1 průsečík, 2 průsečíky anebo nemají žádný průsečík)
Ověřte své tvrzení výpočtem a vše zakreslete do jednoho obrázku.

$k: x^2 - 8x + y^2 - 6y + 9 = 0$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 16$

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 16$ – kružnice o poloměru 4 se středem $[4;3]$

I. $p_1: y = x+3$: $(x-4)^2 + (x+3-3)^2 = 16$

$x^2 - 8x + 16 + x^2 = 16$

$2x^2 - 8x = 0 \quad |:2$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0$

$x=0 \lor x=4$ => přímka p_1 má 2 průsečíky s kružnicí k

II. $p_2: y = x+5$: $(x-4)^2 + (x+5-3)^2 = 16$

$x^2 - 8x + 16 + x^2 + 4x + 4 = 16$

$2x^2 - 4x + 4 = 0 \quad |:2$

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$

=> záporný diskriminant => rovnice nemá řešení v reálném oboru

=> přímka p_2 nemá žádné průsečíky s kružnicí

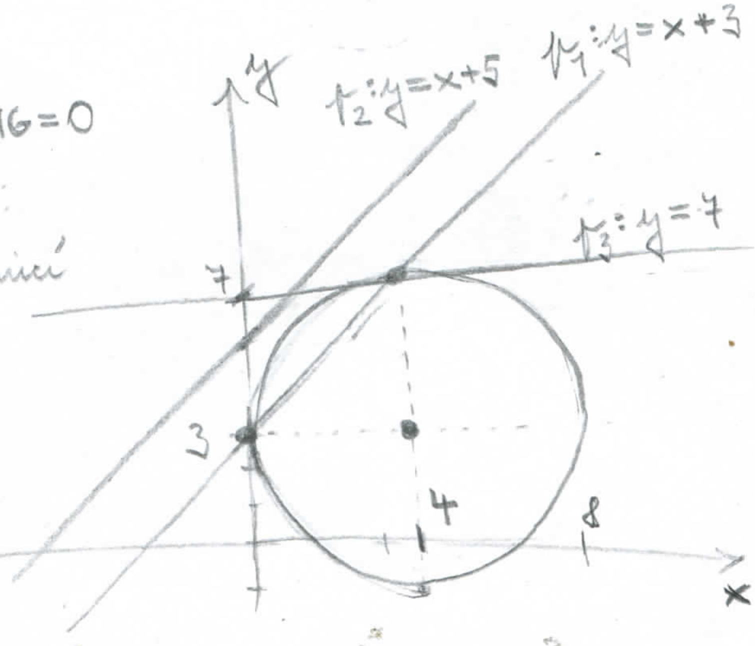
III. $p_3: y = 7$: $(x-4)^2 + (7-3)^2 = 16$

$x^2 - 8x + 16 + 16 = 16$

$x^2 - 8x + 16 = 0$

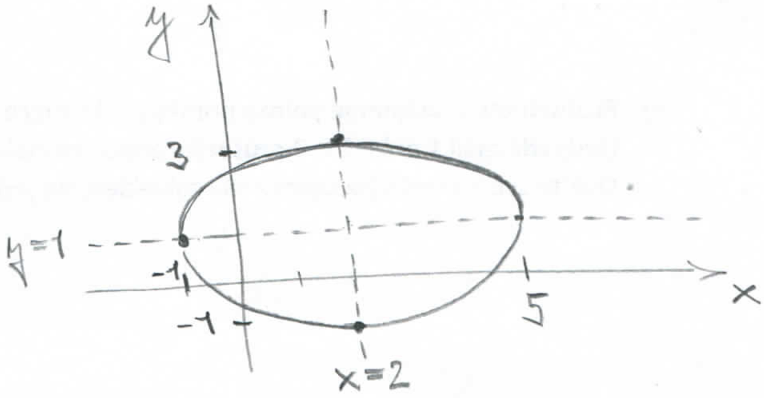
$D = b^2 - 4ac = 64 - 4 \cdot 16 = 0$

=> diskriminant je 0, přímka p_3 má 1 průsečík s kružnicí

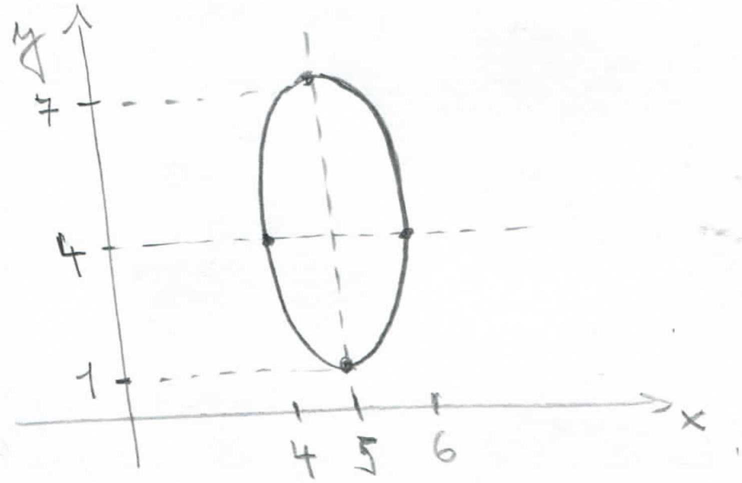


5) Napište středovou rovnici elipsy.

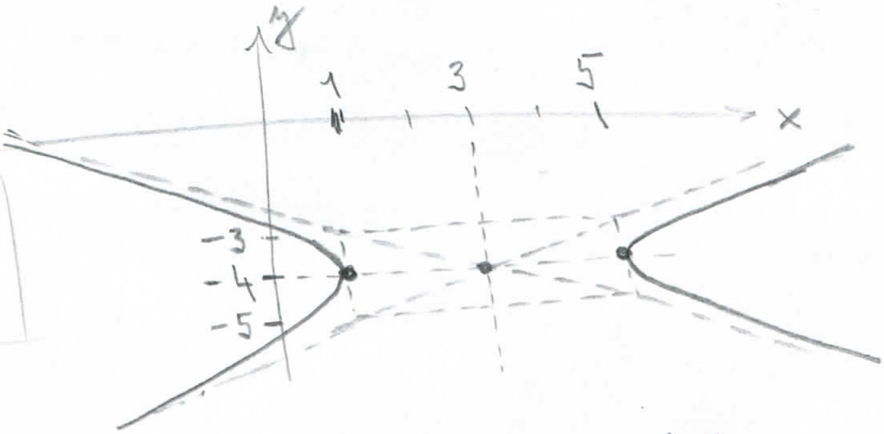
$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1}$$



$$\boxed{\frac{(x-5)^2}{1} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1}$$

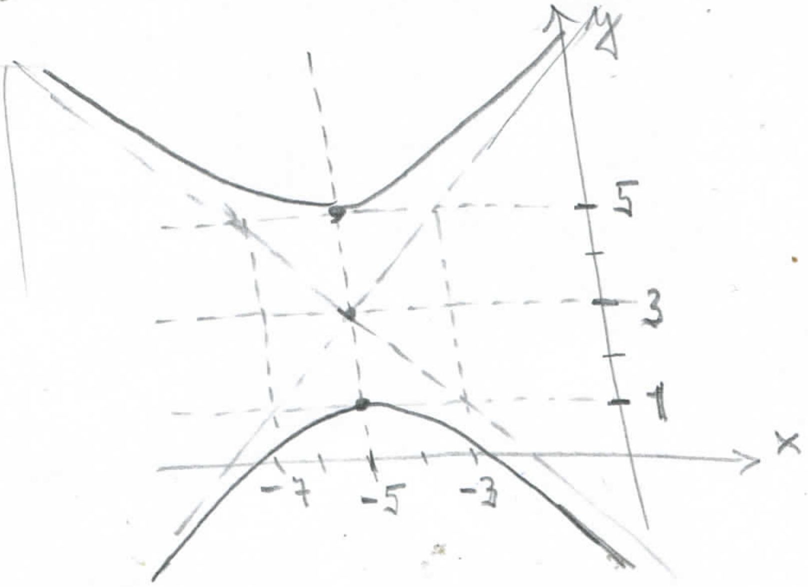


Napište středovou rovnici hyperboly.



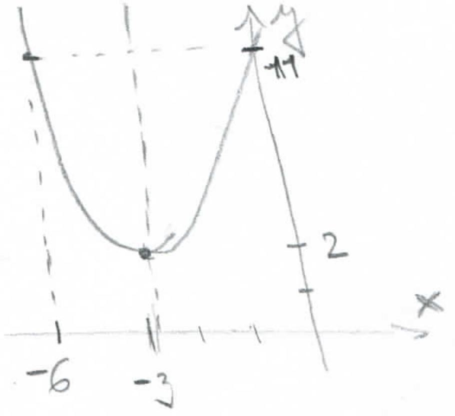
$$\boxed{\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{1} = 1}$$

$$\boxed{-\frac{(x+5)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1}$$



Napište rovnici paraboly.

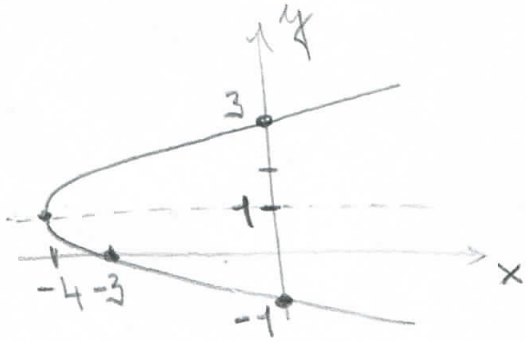
a)



$$\boxed{y=(x+3)^2+2}$$

(konvexní parabola $y=x^2$ posunutá o 3 doleva a následně o 2 nahoru)

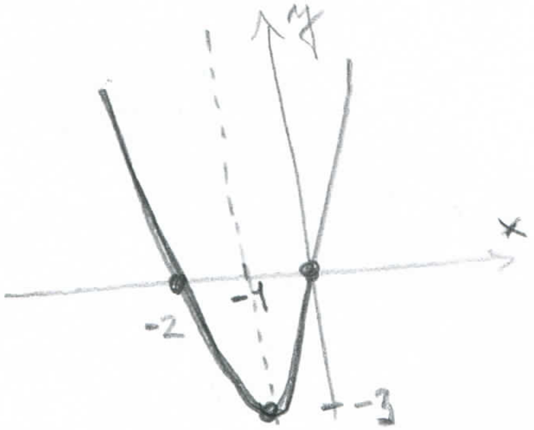
b)



$$\boxed{x=y^2-2y-3=(y-3)(y+1)}$$

anebo: $\boxed{x=(y-1)^2-4}$

c)



$$\boxed{y=3(x+1)^2-3}$$

tedy $\boxed{y=3x^2+6x}$

obecný postup: kvadratická funkce musí mít předpis $f(x)=ax^2+bx+c$, hledáme čísla a, b, c:

z obrázku vidíme, že platí: $f(0)=0$, $f(-2)=0$, $f(-1)=-3$

$f(0)=0$: $\boxed{0=c}$

$f(-2)=0$: $4a-2b=0$

$f(-1)=-3$: $a-b=-3 \quad |\cdot(-2)$

$+$ $\quad 4a-2a=6$

$2a=6$

$\boxed{a=3}$ $\quad \boxed{b=6}$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=3x^2+6x}$$