4. minitest LA2

Kvadratické formy

23. 4. 2025

Pro kvadratickou formu Q v $\mathbb{R}^3$ určete poláru, její matici ve standardní bázi, polární bázi, signaturu, charakter a nulprostor.

$$Q(\vec{x}) = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$$

polára: $h(\vec{x},\vec{y}) = 9x_2y_2 + 9x_3y_3 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 +$

$+ 6x_1y_3 + 6x_3y_1 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2$

$$= (x_1\ x_2\ x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}}_{\mathcal{E}Q}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$Q(\vec{x}) = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3 =$$

$$= (3x_2 + 2x_1 - x_3)^2 - 4x_1^2 - x_3^2 + 4x_1x_3 + 9x_3^2 + 12x_1x_3$$

$$= (3x_2 + 2x_1 - x_3)^2 \underbrace{- 4x_1^2 + 16x_1x_3}_{-(4x_1^2 - 16x_1x_3 + 16x_3^2) + 16x_3^2} + 8x_3^2$$

$$= \underbrace{(3x_2 + 2x_1 - x_3)}_{\alpha_1}^2 - 4\cdot\underbrace{(x_1 - 2x_3)}_{\alpha_2}^2 + 24\underbrace{x_3}_{\alpha_3}^2$$

$\alpha_1 = 3x_2 + 2x_1 - x_3$

$\alpha_2 = x_1 - 2x_3$

$\alpha_3 = x_3$

$x_1 = \alpha_2 + 2\alpha_3$

$x_2 = \frac{1}{3}\cdot(\alpha_1 + \alpha_3 - 2\alpha_2 - 4\alpha_3)$

$x_3 = \alpha_3$

$$\Rightarrow \vec{x} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

polární báze $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

signatura $sg\,Q = (2, 1, 0)$, indefinitní forma

$+ \; - \; 0$

nulprostor $N = \{\vec{o}\}$

2. možnost - symetrické úpravy