5. minitest LA2

Ortogonální doplněk, báze, projekce

7. 5. 2025

Je dán podprostor $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda$ v $\mathbb{R}^3$

a) Najděte jeho ortogonální doplněk.

b) Najděte nějaký ortogonální systém v P a doplňte ho na ortogonální bázi $\mathbb{R}^3$.

c) Určete projekci vektoru $\vec{x} = (4, 2, 1)^T$ na P a $P^\perp$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot (-2) \\ \oplus \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$1 \quad -1 \quad 1$

$P^\perp = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 ; \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0 \ \forall \vec{y} \in P \} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

b) $\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}$ $\overset{?}{=} 0$

$= \alpha \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + \beta \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$= \alpha \cdot (1 + 4 + 1) + \beta \cdot (2 + 10 + 3)$

$= 6\alpha + 15\beta = 0$

volíme např. $\alpha = 5$

$\beta = -2$

$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

OG systém v P : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

OG báze $\mathbb{R}^3$: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

c) $\underbrace{\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{x}} \overset{?}{=} \underbrace{\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}}_{\vec{x}_p} + \underbrace{\gamma\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{x}_{p\perp}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 5 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l}1\cdot(-2)\\ 1\cdot(-1)\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -3 & -6\\ 0 & 1 & 0 & -3\end{array}\right) 1\cdot(-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\gamma = 1}$$

$$\beta - 3\cdot 1 = -6$$

$$\boxed{\beta = -3}$$

$$\alpha + 2\cdot(-3) + 1\cdot 1 = 4$$

$$\boxed{\alpha = 9}$$

$$\vec{x}_p = 9\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}}}$$

$$\vec{x}_{p\perp} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}}$$

Provjera: $\vec{x}_p + \vec{x}_{p\perp} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} = \vec{x}$