1. přednáška MA 2, LS, šk. r. 2015/16, 23. 2. 2016

Věta 1 (l'Hospitalovo pravidlo) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť fce f, g mají vlastní derivace v jistém $P(x_0)$.

Předpokládejme, že

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x), \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty.$$

Pak

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokud poslední limita existuje. (Analogické tvrzení platí pro jednostranné limity.)

Důkaz. I. Nechť nejprve $x_0 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: A \in \mathbb{R}^*$.

Předpokládejme např., že $\lim_{x\to x_0+} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0+} g(x)$.

(Důkaz pro $x \to x_0-$ je analogický!*)

Položíme $f(x_0) = 0 = g(x_0)$ (tedy buďto změníme hodnoty fcí f, g v bodě x_0 (pokud tam byly definovány), nebo je v bodě x_0 dodefinujeme nulou).

Pak f a g jsou spojité zprava v bodě x_0. Protože mají v jistém $P(x_0, \delta)$ vlastní derivace, platí $f, g \in C(U_+(x_0, \delta))$. Přitom $\delta > 0$ volíme tak malé, že $g'(x) \neq 0$ v $P_+(x_0, \delta)$, což lze, neb $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ex. $\Rightarrow$ $\Rightarrow g'(x) \neq 0$ v jistém $P(x_0)$.

Zvolme $x \in (x_0, x_0+\delta)$. Pak $f, g \in C(\langle x_0, x\rangle)$, f', g' ex. v (x_0, x), $0 \neq g'(t) \in \mathbb{R}$ $\forall t \in (x_0, x)$. Tedy dle Cauchyovy věty platí

$$(1) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}, \quad \text{kde } c = c(x) \in (x_0, x)$$

$$\Downarrow$$

$$(2) \quad \lim_{x\to x_0+} c(x) = x_0$$

a přitom $c(x) \neq x_0$ $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$

%

*) Nebo tento případ převedeme na předešlý substitucí $y = -x$.

$\Rightarrow$ fce $c(x)$ splňuje podmínku (P) (pro $x \to x_0+$)

Odtud, z (1), (2) a z věty o limitě složené fce plyne

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{y\to x_0+} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

II. Předpokládejme nyní, že $x_0 \in \mathbb{R}$,

(3) $\quad \exists A := \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

(4) $\quad \lim_{x\to x_0+} |g(x)| = +\infty$.

Z předpokladu, že ex. konečné derivace f', g' v jistém $P(x_0,\delta_1)$, $\delta_1 > 0$, plyne, že $f, g \in C((x_0, x_0+\delta_1))$.

Z (3) plyne, že δ_1 lze volit tak malé, že $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (x_0, x_0+\delta_1)$.

Z (4) plyne, že δ_1 lze volit tak malé, že $g(x) \neq 0$ $\forall x \in (x_0, x_0+\delta_1)$.

Nechť $x, x_1 \in (x_0, x_0+\delta_1)$, $x < x_1$. Podle Cauchyovy věty $\exists c = c(x, x_1) \in (x, x_1)$ tak, že

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)-f(x_1) = \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(g(x)-g(x_1)\right) \quad \Big/ \cdot \frac{1}{g(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_1)}{g(x)} + \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) \quad (5)$$

Nechť $A > -\infty$. Nechť $A' < A$ je libovolné (pevné) číslo. Zvolme $A^* \in (A', A)$. Pak dle (3) platí

$$\exists \delta_2 \in (0, \delta_1)\ \forall y \in (x_0, x_0+\delta_2): \frac{f'(y)}{g'(y)} > A^*.$$

./.

Speciálně tedy platí

(6) $$\frac{f'(c(x,x_1))}{g'(c(x,x_1))} > A^* \quad \forall x, x_1 \in (x_0, x_0+\delta_2),\ x < x_1 .$$

Fixujme takové x_1. Protože (dle (4)) $\frac{g(x_1)}{g(x)} \to 0$ pro $x \to x_0+$,

$$\exists\, \delta_3 \in (0, \delta_2)\ \forall x \in (x_0, x_0+\delta_3):\ \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) > 0 .$$

Podle (5) a (6) pak platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(x_1)}{g(x)} + A^* \underbrace{\left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right)}_{>0} \quad \forall x \in (x_0, x_0+\delta_3).$$

Protože (dle (4))

$$\frac{f(x_1)}{f(x)} \to 0 \quad \& \quad A^*\left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) \to A^* > A' \text{ pro } x \to x_0+,$$

(7) $$\exists\, \delta_4 \in (0, \delta_3)\ \forall x \in (x_0, x_0+\delta_4):\ \frac{f(x)}{g(x)} > A' .$$

Analogicky dostaneme, že v případě $A < +\infty$ platí

(8) $$\forall A'' > A\ \exists\, \delta_5 > 0\ \forall x \in (x_0, x_0+\delta_5):\ \frac{f(x)}{g(x)} < A''$$

Z (7) a (8) pak plyne, že

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = A .$$

Analogicky se dokáže, že $\lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, pokud platí (3) a místo (4) předpokládáme, že $\lim\limits_{x \to x_0-} |g(x)| = +\infty$.

Tedy Věta 1 platí, jestliže $x_0 \in \mathbb{R}$.

III. Případ, kdy $x_0 = +\infty$ (nebo $x_0 = -\infty$) se převede na již dokázaný případ.

Nechť např. $x_0 = +\infty$. Pak $y := \frac{1}{x} \to 0+$ pro $x \to +\infty$, a tedy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0+}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y\to 0+}\frac{F(y)}{G(y)} \overset{\text{dle dokázaného (jednostranné verze)}}{=} \lim_{y\to 0+}\frac{F'(y)}{G'(y)} =$$

$$F(y) := f\left(\tfrac{1}{y}\right) \Rightarrow F'(y) = f'\left(\tfrac{1}{y}\right)\left(-\tfrac{1}{y^2}\right) \quad \forall y \in P_+(0)$$
$$G(y) := g\left(\tfrac{1}{y}\right) \Rightarrow G'(y) = g'\left(\tfrac{1}{y}\right)\left(-\tfrac{1}{y^2}\right) \quad \forall y \in P_+(0)$$

$$= \lim_{y\to 0+}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{y\to 0+}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokud poslední limita existuje. □

Př: Určete
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right).$$

Řešení:
$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)}_{\to 0} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{typ } \frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}$$
$$\overset{l'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

L'Hospitalovo pravidlo někdy nevede k řešení:

Př: Platí
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1}\underbrace{x\cdot\sin\frac{1}{x}}_{\to 0} = 0.$$

Ale "l'Hospital dá"
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} \overset{\text{typ } \frac{0}{0}}{\underset{?\,l'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x} + x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x} \ldots \text{ tato limita neexistuje.}$$

Věta 2 (aplikace l'Hospitalova pravidla). Buď $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť

(i) $f^{(n)}(x_0), g^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$,

(ii) $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0 \quad , \quad 0 \le k \le n-1$,

(iii) $g^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Pak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)} .$$

Poznámka. (i) Jestliže navíc $f^{(n)}$ a $g^{(n)}$ jsou spojité v bodě x_0, pak Věta 2 plyne n-násobným použitím l'Hospitalova pravidla.

(ii) Z existence konečných derivací plyne spojitost fcí f a g v bodě x_0. Tedy

(1) $\displaystyle \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f^{(0)}(x_0) = 0$,

(2) $\displaystyle \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = g^{(0)}(x_0) = 0$.

dle předp. Věty 2

Důkaz Věty 2 provedeme mat. indukcí.

I. Buď $n=1$. Protože $g'(x_0) \neq 0$, z definice derivace plyne, že $g(x) \neq g(x_0) = 0$ v jistém $P(x_0)$.

Dále platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \overbrace{f(x_0)}^{= 0}}{x-x_0} = f'(x_0)$$

a obdobně

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - \overbrace{g(x_0)}^{= 0}}{x-x_0} = g'(x_0) \neq 0 .$$

Tedy dle věty o limitě podílu

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{x-x_0}}{\frac{g(x)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} .$$

II. Buď $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Předpokládejme, že Věta 2 platí, píšeme-li v ní $n-1$ místo n.

III. Dokážeme, že Věta 2 platí pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Ozn. $F := f'$, $G = g'$. Pak

$F^{(k)}(x_0) = G^{(k)}(x_0) = 0$ pro $0 \le k \le n-2$,

$F^{(n-1)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, $G^{(n-1)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Podle indukčního předpokladu II tedy platí

$$(3) \qquad \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{G(x)}}_{= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}} = \frac{F^{(n-1)}(x_0)}{G^{(n-1)}(x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$$

Dále však platí (1) a (2), a proto dle l'Hospitalova pravidla máme *)

$$(4) \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (poslední limita existuje dle (3)).

Z (3) a (4) plyne, že

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)} . \qquad \square$$

---

*) Poznamenejme, že předpoklad v l'Hospitalově pravidlu, že existují vlastní derivace f' a g' v jistém $P(x_0)$ plyne z faktu, že $n > 1$ a $f^{(n)}(x_0), g^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$.

2. přednáška MA 2, LS, šk. r. 2015/16, 24. 2. 2016

Definice Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}^*$.
Budeme psát $f(x)=o(g(x))$ pro $x\to x_0$
(a říkat, že "$f(x)$ je malé o od $g(x)$ pro $x\to x_0$"),
je-li
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

Poznámka. Buď $n\in\mathbb{N}$, $x_0\in\mathbb{R}$, $f(x)=o((x-x_0)^n)$ pro $x\to x_0$. Pak $f(x)=o((x-x_0)^k)$ pro $x\to x_0$ pro každé $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$.

Důkaz.
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^k}=\lim_{x\to x_0}\underbrace{\boxed{\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}}}_{\to 0}\cdot\underbrace{(x-x_0)^{\overbrace{n-k}^{>0}}}_{\to 0}=0. \quad\square$$

Věta 3 (charakterizace $o((x-x_0)^n)$). Nechť $n\in\mathbb{N}$, $x_0\in\mathbb{R}$ a nechť $f^{(n)}(x_0)\in\mathbb{R}$. Pak

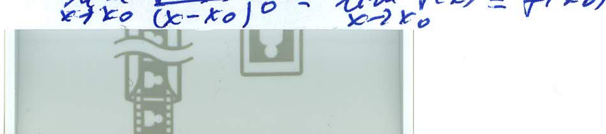
(1) $f(x)=o((x-x_0)^n)$ pro $x\to x_0$

právě tehdy, když

(2) $f^{(k)}(x_0)=0 \quad \forall k\in\{0,1,\dots,n\}$.

Důkaz. (i) Nechť platí (2). Funkce $g(x):=(x-x_0)^n$ splňuje předpoklady Věty 2 (tj. $g(x_0)=g'(x_0)=\dots=g^{(n-1)}(x_0)=0$, $g^{(n)}(x_0)=n!\neq 0$). Tedy podle Věty 2 platí
$$\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}}_{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\overset{\text{dle (2)}}{=}0,$$
tj. platí (1).

(ii) Nechť (2) neplatí. Pak ex. $k\in\{0,\dots,n\}$ tak, že $f^{(k)}(x_0)\neq 0$. Buď k nejmenší takové číslo. Je-li $k\in\mathbb{N}$,
-1. pak z Věty 2 máme
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^k}=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\neq 0;$$
[illegible] Je-li $k=0$, pak z faktu $f^{(n)}(x_0)\in\mathbb{R}$ plyne $f'(x_0)\in\mathbb{R}$, tedy f je spojitá v bodě x_0, a odtud $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^0}=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f^{(0)}(x_0)\neq 0$.



$\Rightarrow$ neplatí $f(x) = o((x-x_0)^k)$ pro $x \to x_0$.

Je-li $n = k$, je důkaz hotov.

Je-li $k < n$, pak z Poznámky (před Větou 3) plyne, že neplatí $f(x) = o((x-x_0)^n)$ pro $x \to x_0$. $\square$

Taylorův polynom

Nechť fce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ konečné derivace až do řádu n. Chování fce f může být značně složité v $U(x_0)$. Proto se budeme snažit nahradit fci f nějakou jednodušší fcí a to polynomem tvaru

(3) $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k (x-x_0)^k = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \dots + A_n(x-x_0)^n,$$

kde $A_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n$, (P_n je polynom stupně nejvýše n) a to tak, aby chyba aproximace $R_{n+1}(x) := f(x) - P_n(x)$, splňovala

(4) $$R_{n+1}(x) = o((x-x_0)^n) \quad \text{pro } x \to x_0,$$

tj., aby

(5) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Otázky: (i) Jak volit $P_n(x)$?

(ii) Jak velká je chyba, které se dopustíme?

Následující věta dává odpověď na otázku (i).

Věta 4 (Peanova). Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jeden polynom P_n, st $P_n \leq n$, tak, že platí

(6) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Tento polynom je dán předpisem

(7) $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Pak polynom (7) se nazývá Taylorův polynom řádu n fce f v bodě x_0 a značíme ho symbolem T^f_{n,x_0}.

Důkaz Věty 4. Budeme hledat polynom $P_n(x)$ ve tvaru (3). Má platit (4), tj.

$$(4') \quad \lim_{x\to x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n} = 0 .$$

Funkce R_{n+1} má derivaci $R_{n+1}^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$.

Tedy podle Věty 3

$$(4') \iff R_{n+1}^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall k \in \{0,1,\dots,n\},$$

tj.

$$(4') \iff \underline{f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall k \in \{0,1,\dots,n\}.} \quad (8)$$

Ovšem

$$P_n^{(0)}(x_0) = P_n(x_0) \overset{\text{dle (3)}}{=} A_0 ,$$

$$P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k\, k\, (x-x_0)^{k-1} \Rightarrow \underline{P_n'(x_0)} = A_1 \cdot 1 = \underline{A_1}$$

$$P_n''(x) = \sum_{k=2}^{n} A_k\, k(k-1)(x-x_0)^{k-2} \Rightarrow \underline{P_n''(x_0)} = A_2 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{2!\, A_2}$$

$$\vdots$$

$$P^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n} A_k\, k(k-1)\dots(k-i+1)(x-x_0)^{k-i} \Rightarrow \underline{P_n^{(i)}(x_0)} = \underline{i!\, A_i}$$

$$\Rightarrow \quad A_i = \frac{P_n^{(i)}(x_0)}{i!}, \quad i = 0,1,\dots,n.$$

Odtud a z (8) dostáváme

$$A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0,1,\dots,n,$$

a tedy

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad (\text{což je } (7)).$$

Tento polynom je určen jednoznačně (neb jeho koeficienty jsou určeny jednoznačně) a dle (4') polynom P_n splňuje (6). $\square$

Poznámka - viz list 4

Př. Určete Taylorův polynom T^f_{n,x_0} fce $f(x) = e^x$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Platí $f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x_0) = e^{x_0} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \underline{T^{e^x}_{n,x_0}(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \underline{\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k}.$$

Speciálně pro $x_0 = 0$ ($\Rightarrow e^{x_0} = 1$) dostáváme

$$T^{e^x}_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \quad e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = o(x^n) \quad \text{pro } x \to 0.$$

Př: Určete $T^{\sin}_{3,0}$.

Řešení: $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$,

$f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f'(0) = \cos 0 = 1$

$f''(x) = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f''(0) = -\sin 0 = 0$ *)

$f'''(x) = -\cos x$, $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f'''(0) = -\cos 0 = -1$

$$\Rightarrow \quad T^{\sin}_{3,0}(x) = \overbrace{f(0)}^{=0} + \frac{\overbrace{f'(0)}^{=1}}{1!}(x-0) + \frac{\overbrace{f''(0)}^{=0}}{2!}(x-0)^2 + \frac{\overbrace{f'''(0)}^{=-1}}{3!}(x-0)^3 = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Tedy $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_4(x)$, kde

$R_4(x) = o(x^3)$ pro $x \to 0$ $\left(\text{tj. } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{x^3} = 0\right)$

Poznámka. Pro $n = 1$ z Věty 4 plyne, že

$$P_1(x) = T^f_{n,x_0}(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

rovnice tečny ke grafu fce $y = f(x)$ sestrojená v bodě $[x_0, f(x_0)]$

viz na list L3 za důkaz Věty 4

---

*) Protože $f''(0) = 0$, platí $T^f_{2,0} = T^f_{1,0}$ pro fci $f = \sin$.

Peanova věta podává informaci o řádu chyby, které se dopustíme při nahrazení fce Taylorovým polynomem. Nic však neříká o její velikosti. Tento problém řeší následující věta.

Věta 5 (Taylorova věta o zbytku). Nechť $f, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, x \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x$, $n \in \mathbb{N}_0$. Buď J uzavřený interval s krajními body x_0, x. Nechť

(i) $f^{(n+1)}(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in J$,

(ii) $\varphi \in C(J)$, $0 \neq \varphi'(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in J^0$.

Pak existuje $\xi \in J^0$ tak, že platí

(1) $$R_{n+1}(x) = f(x) - T^f_{n,x_0}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi).$$

Speciálně:

- Volba $\varphi(t) = t$, $t \in J$, dá

(2) $$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} (x-x_0) f^{(n+1)}(\xi).$$ (Cauchyův tvar zbytku)

- Volba $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, $t \in J$, dá

(3) $$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$ (Lagrangeův tvar zbytku)

Důkaz. Platí

(4) $$R_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

Pišme místo čísla x_0 proměnnou t v RHS(4), tj. definujme fci

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k, \quad t \in J.$$

Pak
$$F(x) = 0, \qquad F(x_0) = R_{n+1}(x).$$ $\Rightarrow F \in C(J)$

Fce F má v intervalu J (i v krajních bodech) derivaci

(5) $$F'(t) = -\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k}_{k+1=i \iff k=i-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k (x-t)^{k-1} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n+1} \frac{f^{(i)}(t)}{(i-1)!}(x-t)^{i-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} =$$

$$= -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t).$$

Tedy podle Cauchyovy věty o střední hodnotě platí

$$\frac{\overbrace{F(x)}^{=0} - \overbrace{F(x_0)}^{=R_{n+1}(x)}}{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \text{ kde } \xi \in J^0, \text{ tj.}$$

$$-R_{n+1}(x) = \big(\varphi(x)-\varphi(x_0)\big) \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \overset{\text{dle (5)}}{=}$$

$$= \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} \left(-\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\right), \text{ tj.}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi), \text{ což je (1).}$$

Je-li $\varphi(t) = t$, $t \in J$, pak $\varphi'(t) = 1$, $\varphi(x)-\varphi(x_0) = x - x_0$, a tedy

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{x-x_0}{1} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(x-\xi)^n}{n!}(x-x_0) f^{(n+1)}(\xi),$$

což je (2).

Je-li $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, $t \in J$, pak $\varphi'(t) = (n+1)(x-t)^n(-1)$,

$\varphi(x)-\varphi(x_0) = 0 - (x-x_0)^{n+1} = -(x-x_0)^{n+1}$,

a tedy

$$R_{n+1}(x) = \frac{\cancel{(x-\xi)^n}}{n!} \frac{-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)\cancel{(x-\xi)^n}} f^{(n+1)}(\xi) =$$

$$= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \text{což je (3).} \quad \square$$

3. přednáška MA2, LS, šk. r. 2015/16, 1.3.2016

Př. 1. Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \text{ pro } x \to 0.$$

Řešení: Buď $f = \cos$, $x \in \mathbb{R}$. Fce f má konečné derivace všech řádů v bodě 0 a platí

$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = \cos 0 = 1$

$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = -\sin 0 = 0$

$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1$

$f'''(x) = \sin x \Rightarrow f'''(0) = \sin 0 = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1$

$\Rightarrow$ výsledky se opakují s periodou 4. Tedy platí

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underbrace{o(x^{2n+1})}_{\text{toto je O.K. neb } f^{(2n+1)}(0)=0,} \text{ pro } x \to 0.$$

a tedy $T^{\cos}_{2n,0} = T^{\cos}_{2n+1,0}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Analogicky dostaneme, že $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \text{ pro } x \to 0,$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \text{ pro } x \to 0,$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \text{ pro } x \to 0.$$

Lemma 6 (aritmetika malého o). Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

(i) Je-li $f_i(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, $i = 1, 2$, pak
$$f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)), \quad x \to x_0.$$

(ii) Je-li $f_i(x) = o(g_i(x))$, $x \to x_0$, $i = 1, 2$, pak
$$f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g_1(x) g_2(x)), \quad x \to x_0.$$

(iii) Je-li $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, $h \neq 0$ v jistém $P(x_0)$, pak
$$f(x) h(x) = o(g(x) h(x)), \quad x \to x_0.$$

(iv) Je-li $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} \in \mathbb{R}$, pak
$$f(x) = o(h(x)), \quad x \to x_0.$$

(v) Je-li $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, h omezená na jistém $P(x_0)$, pak
$$f(x) h(x) = o(g(x)), \quad x \to x_0.$$

(vi) Je-li $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^*$, $f(y) = o(g(y))$, $y \to y_0$, $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = y_0$, φ splňuje podmínku (P) (tj. $\exists P(x_0)\ \forall x \in P(x_0): \varphi(x) \neq y_0$), pak
$$f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))), \quad x \to x_0.$$

Důkaz. ad (i): $\frac{f_1(x) + f_2(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g(x)} + \frac{f_2(x)}{g(x)} \to 0$ pro $x \to x_0$.

ad (ii): $\frac{f_1(x) f_2(x)}{g_1(x) g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \to 0 \cdot 0 = 0$ pro $x \to x_0$

ad (iii): $\frac{f(x) \cdot h(x)}{g(x) h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \to 0$, $x \to x_0$.

ad (iv): $\frac{f(x)}{h(x)} = \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\to 0} \underbrace{\frac{g(x)}{h(x)}}_{\to \check{c} \in \mathbb{R}} \to 0 \cdot \check{c} = 0$, $x \to x_0$.

ad (v): $\frac{f(x) h(x)}{g(x)} = \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\to 0} \cdot \underbrace{h(x)}_{\text{omezená v } P(x_0)} \to 0$, $x \to x_0$

ad (vi):

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} \overset{\text{věta o limitě složené fce}}{=} \lim_{y\to y_0}\frac{f(y)}{g(y)} = 0$$

substituce $y=\varphi(x)$
víme, že $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=y_0$
a φ splňuje podmínku (P)

□

Lemma 7 (o polynomu P_n a $o((x-x_0)^n)$).

Nechť $x_0\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, P_n je polynom, st $P_n \le n$.
Jestliže $P_n(x) = o((x-x_0)^n)$, $x\to x_0$,
pak P_n je nulový polynom.

Důkaz.*) Předpokládejme, že P_n není nulový polynom.

Z faktu

$$(1)\quad \lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

nutně plyne, že $P_n(x_0)=0$. Tedy $\exists\, k\in\{1,\dots,n\}$, $\exists$ polynom Q, tak, že platí $P_n(x) = (x-x_0)^k Q(x)$ a $Q(x_0)\neq 0$.

Pak ovšem z (1) dostáváme

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{Q(x)}{(x-x_0)^{n-k}}.$$

To je spor, neboť tato limita buďto neexistuje (je-li $k<n$ a $n-k$ liché), nebo je nevlastní (je-li $k<n$ a $n-k$ sudé), nebo je rovna $Q(x_0)\neq 0$ (je-li $k=n$). □

Př. 2. Určete $T^f_{3,0}$, je-li $f=\operatorname{tg}$.

Řešení. Protože $f^{(3)}(0)\in\mathbb{R}$, tak $T^f_{3,0}$ existuje, tj. platí

$$(2)\quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = T^f_{3,0}(x) + o(x^3) \quad \text{pro } x\to 0.$$

Píšeme-li $T^f_{3,0}$ ve tvaru

$$T^f_{3,0}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad x\in\mathbb{R},$$

a použijeme-li faktů, že

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, $x\to 0$,

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $x\to 0$, pak z (2) dostaneme

---

*) Jiný důkaz: Z Věty 3 (2. podmínka) plyne, že $P_n^{(k)}(x_0)=0\ \forall k\in\{0,1,\dots,n\}$. Odtud ihned dostáváme $P_n\equiv 0$ (neboť $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i((x-x_0)+x_0)^i = \sum_{k=0}^{n} A_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = 0\ \forall x\in\mathbb{R}$).

$$x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3))\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)$$
$$=a_0+a_1x+\left(a_2-\frac{a_0}{2}\right)x^2+\left(a_3-\frac{a_1}{2}\right)x^3+o(x^3),\quad x\to 0,$$

tj.

$$-a_0+(1-a_1)x+\left(\frac{a_0}{2}-a_2\right)x^2+\left(-\frac{1}{6}-a_3+\frac{a_1}{2}\right)x^3=o(x^3),\quad x\to 0.$$

Odtud podle Lemmatu 7 plyne

$$a_0=0\;,\quad 1-a_1=0\;,\quad \frac{a_0}{2}-a_2=0,\quad -\frac{1}{6}-a_3+\frac{a_1}{2}=0.$$

Tedy $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=\frac{1}{3}$, tzn. že

$$T^f_{3,0}(x)=x+\frac{x^3}{3}\;,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Tudíž $\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\ x\to 0$ $\left(\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x-\frac{x^3}{3}}{x^3}=0\right)$.

Př. 3. Dokažte, že $\forall n\in\mathbb{N}$ platí

(3) $$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n),\quad x\to 0.$$

Řešení: Buď $x\in(-1,+\infty)$, $f(x):=\ln(1+x)$. Pak platí

$$f(0)=\ln 1=0$$
$$f'(x)=\frac{1}{1+x}\quad\Rightarrow\quad f'(0)=1$$
$$f''(x)=(-1)\frac{1}{(1+x)^2}\quad\Rightarrow\quad f''(0)=-1$$
$$f'''(x)=(-1)(-2)\frac{1}{(1+x)^3}\quad\Rightarrow\quad f'''(0)=(-1)^2\cdot 2!$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)}(x)=(-1)^k(k-1)!\frac{1}{(1+x)^k}\quad\Rightarrow\quad \boxed{f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!\ \ \forall k\in\mathbb{N}.}$$

Odtud ihned plyne (3).

Lemma 8 (vztah T^f_{n,x_0} a $T^{f'}_{n-1,x_0}$). Nechť $n\in\mathbb{N}$, $x_0\in\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{(n)}(x_0)\in\mathbb{R}$. Pak

$$\left(T^f_{n,x_0}\right)' = T^{f'}_{n-1,x_0}.$$

Důkaz. $\forall x\in\mathbb{R}$ platí

$$\left(T^f_{n,x_0}(x)\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)'$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, k\,(x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}$$

$$\underset{k-1=i}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i+1)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(f')^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i =$$

$$= T^{f'}_{n-1,x_0}(x).$$ □

Důsledek. Buď $f^{(n)}(x_0)\in\mathbb{R}$. Jestliže

$$T^{f'}_{n-1,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (x-x_0)^k, \quad x\in\mathbb{R},$$

kde $A_k\in\mathbb{R}$ $\forall k\in\{0,1,\dots,n-1\}$, pak

$$(5)\quad T^f_{n,x_0}(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Důkaz. Polynomy T^f_{n,x_0} a P_n, kde

$$(6)\quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}, \quad x\in\mathbb{R},$$

mají stejnou derivaci, tzn. že

$$\left(T^f_{n,x_0}(x) - P_n(x)\right)' = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Protože fce $T^f_{n,x_0}-P_n$ je spojitá v $\mathbb{R}$ (a $\mathbb{R}$ je interval), je fce $T^f_{n,x_0}-P_n$ konstantní v $\mathbb{R}$, tj.

$$(7)\quad T^f_{n,x_0}(x) = c + P_n(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}, \quad \text{kde } c\in\mathbb{R}.$$

Pro $x = x_0$ z (7) dostáváme

$$\underbrace{T^f_{n,x_0}(x_0)}_{=\underline{\underline{f(x_0)}}} = c + \underbrace{P_n(x_0)}_{=0} = \underline{\underline{c}},$$

tj. $c = f(x_0)$. Odtud, z (7) a (6) pak plyne (5). $\square$

Př. 4. Dokažte, že $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ platí

(1) $$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

Řešení: Buď $f = \operatorname{arctg}$. Pak $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tedy pro $x \in (-1,1)$ platí

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-x^2)^k + \sum_{k=n}^{\infty} (-x^2)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-x^2)^k + (-x^2)^n \sum_{k=n}^{\infty} (-x^2)^{k-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-x^2)^k + (-x^2)^n \sum_{i=0}^{\infty} (-x^2)^i =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$

$= o(x^{2n-1})$ pro $x \to 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} = T^{f'}_{2n-2,0}(x)$$ (použili jsme jednoznačnost Taylorova polynomu)

$\Rightarrow$ (dle důsledku Lemmatu 8) $$\underline{T^f_{2n-1,0}(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}} \quad (2)$$

$$\Rightarrow T^f_{2n+1,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(zaměním n za $n+1$ v (2))

Tedy platí (1).

Př. 5. Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}_0$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$(1) \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n), \; x \to 0,$$

kde
$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 .$$

Řešení: Buď $x \in (-1,1)$, $g(x) := (1+x)^\alpha$. Pak platí

$$g(0) = 1$$
$$g'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow g'(0) = \alpha$$
$$g''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow g''(0) = \alpha(\alpha-1)$$
$$\vdots$$
$$g^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \Rightarrow \underline{g^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (1)$.

Př. 6. Určete $n \in \mathbb{N}_0$ tak, aby pro Taylorův polynom $T^{\exp}_{n,0}$ platilo $|\exp x - T^{\exp}_{n,0}(x)| < 10^{-3}$ $\forall x \in \langle 0,1 \rangle$.

Řešení. Funkce $f = \exp$ má konečnou derivaci $f^{(n+1)}(t)$ $\forall t \in \langle 0,1 \rangle$ a $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Zvolíme-li ve Větě 5 (Taylorova věta o zbytku, 2. přednáška), $n \in \mathbb{N}_0$, $x_0 = 0$, $x \in (0,1\rangle$ a použijeme-li Lagrangeův tvar zbytku, dostaneme, že $\exists\, \xi = \xi_{x,n} \in (0,x) \subset (0,1)$ tak, že platí

$$|\exp x - T^{\exp}_{n,0}(x)| = \left| \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi \le$$
$$\le \frac{1}{(n+1)!} e^1 < \frac{3}{(n+1)!} \quad \forall x \in \langle 0,1 \rangle. \text{ (pro } x=0 \text{ je levá strana } 0\text{)}$$

Protože pro $n = 6$ platí $\frac{3}{(n+1)!} = \frac{3}{7!} = \frac{1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 2} =$
$= \frac{1}{1680} < 10^{-3}$, stačí volit $\underline{n = 6}$.

Mocninné řady

Definice. Mocninnou řadou o středu $z_0 \in \mathbb{C}$ rozumíme řadu

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, tj. $a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$,

kde $z \in \mathbb{C}$ a $a_n \in \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Číslo z_0 se nazývá střed mocninné řady (1), čísla a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, nazýváme koeficienty řady (1).

Poznámky (i) Zajímá nás, jak závisí vlastnosti řady (1) na hodnotě čísla $z \in \mathbb{C}$. Především nás zajímá, jak vypadá obor konvergence řady (1).

(ii) Položíme-li $z - z_0 = Z$ (což znamená posunutí v Gaussově rovině $\mathbb{C}$) dostaneme místo řady (1) řadu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$, tj. řadu se středem v bodě 0. Stačilo by se tedy omezit na vyšetřování mocninných řad se středem v bodě 0.

(iii) Mocninná řada (1) zřejmě konverguje v bodě $z = z_0$, tj. ve svém středu.

Věta 9 (o poloměru konvergence mocninné řady).

K mocninné řadě (1) existuje právě jedno číslo $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ takové, že platí:

(i) Řada (1) konverguje absolutně, je-li $|z - z_0| < R$.

(ii) Řada (1) diverguje, je-li $|z - z_0| > R$.

(iii) Označíme-li $B := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, pak platí

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{B}, & \text{je-li } B \in (0, +\infty\rangle \\ +\infty, & \text{je-li } B = 0. \end{cases}$$

Definice Číslo R z Věty 9 nazýváme poloměrem konvergence řady (1).

Dříve než přistoupíme k důkazu Věty 9, připomeňme si Cauchyovo kritérium:

Věta 53 (13. přednáška MA-1). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(i) Jestliže

(2) $\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q$,

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(ii) Jestliže

(3) $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$,

pak $\sum_{n=1}^{\infty}$ diverguje (neboť neplatí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$).

Lemma 10 (dodatek ke Cauchyovu kritériu).

(i) Podmínka (2) je ekvivalentní s podmínkou

(2*) $\quad \beta := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1.$

(ii) Jestliže

(3*) $\quad \beta = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$

pak platí podmínka (3).

Důkaz Lemmatu 10. ad (2) ⇒ (2*):

Nechť platí (2). Pak

$$\beta_n := \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k} \leq q \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Odtud ihned plyne

$$\beta = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \beta_n \leq q < 1,$$

a tedy platí (2*).

ad (2*) ⇒ (2): Nechť platí (2*). Pak $\exists q \in (0,1)$ tak, že $\beta < q$. Odtud a z faktu že $\beta = \lim_{n\to\infty} \beta_n$ plyne

(4) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \beta_n = \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k} < q.$

Protože $\beta_n \geq \sqrt[n]{a_n}\ \forall n \in \mathbb{N}$, z (4) dostáváme

$$\sqrt[n]{a_n} < q \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 .$$

Tedy platí podmínka (2).

ad $(3^*) \Rightarrow (3)$: Jestliže platí (3^*), pak dle Věty 39 (10. přednáška MA-1) ex. rostoucí posl. přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = \beta > 1.$$

Odtud plyne, že $\sqrt[n]{a_n} > 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, tzn. že platí (3). □

Důkaz Věty 9. Nejprve ukážeme, že číslo R z části (iii) má vlastnosti uvedené v částech (i) a (ii) Věty 9.

Buď $n \in \mathbb{N}_0$, $z \in \mathbb{C}$ a položme

(5) $$A_n := a_n (z - z_0)^n .$$

Pak

(6) $$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|A_n|} = \limsup_{n \to \infty} |z - z_0| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = |z - z_0| \cdot \underbrace{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{= \beta} = |z - z_0| \cdot \beta$$

I. Buď $\beta \in (0, +\infty)$. Pak $R = \frac{1}{\beta} \in (0, +\infty)$ a dle (6) platí

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|A_n|} < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| \cdot \beta < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\beta} = R.$$

Tedy, je-li $|z - z_0| < R$, pak $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|A_n|} < 1$. Odtud, z Cauchyova kritéria (a Lemmatu 10) pak plyne, že $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|$ konverguje, což vzhledem k (5) znamená, že platí tvrzení (i) Věty 9.

Je-li $|z-z_0|>R$, pak $|z-z_0|\cdot \beta = |z-z_0|\frac{1}{R}>1$, a proto dle (6) dostáváme $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|A_n|}>1$.

Odtud plyne, že neplatí $\lim_{n\to\infty} |A_n|=0$ (což je ekvivalentní s tvrzením, že neplatí $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$.

Proto (cf. (5)) řada (1) nesplňuje nutnou podmínku konvergence, a tedy platí tvrzení (ii) Věty 9.

II. Buď $\beta=0$. Pak $R=+\infty$. Odtud plyne, že podmínka $|z-z_0|>R$ uvedená v části (ii) Věty 9 není splněna pro žádné $z\in\mathbb{C}$ (tudíž tvrzení (ii) platí).

Buď nyní $|z-z_0|<R=+\infty$ (tj. z je libovolný bod množiny $\mathbb{C}$). Pak $\underbrace{|z-z_0|}_{\uparrow\text{ konečné číslo}}\cdot \underbrace{\beta}_{=0}=0$. Odtud a z (6) dostáváme $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|A_n|}=0<1$.

Tudíž dle Cauchyova kritéria (a Lemmatu 10) $\sum_{n=0}^{\infty}|A_n|$ konverguje. To ale znamená, že řada (1) konverguje absolutně, pokud $|z-z_0|<R=+\infty$. Tedy platí tvrzení (i) Věty 9.

III. Buď $\beta=+\infty$. Pak $R=0$. Odtud plyne, že podmínka $|z-z_0|<R$ uvedená v části (i) Věty 9 není splněna pro žádné $z\in\mathbb{C}$ (tudíž tvrzení (i) platí).

Jestliže $z\in\mathbb{C}$ splňuje nerovnost $|z-z_0|>R=0$, pak $z\neq z_0$ a platí $\underbrace{|z-z_0|}_{\neq 0}\cdot\underbrace{\beta}_{=+\infty}=+\infty$. Odtud a z (6) dostáváme $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|A_n|}=+\infty>1$. Tedy neplatí $\lim_{n\to\infty}|A_n|=0$, což vzhledem k (5) ukazuje, že řada (1) nesplňuje nutnou podmínku konvergence (a tedy diverguje). Tudíž platí tvrzení (ii) Věty 5.

Zbývá dokázat, že číslo $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ splňující tvrzení (i) a (ii) Věty 9 je určeno jednoznačně. Předpokládejme, že existují dvě taková čísla $R_1, R_2 \in \langle 0, +\infty \rangle$ a $R_1 \neq R_2$. BÚNO lze předpokládat, že $R_1 < R_2$. Pak dle tvrzení (i) a (ii) Věty 9 pro $z \in \mathbb{C}$ splňující

$$R_1 < |z - z_0| < R_2$$

řada (1) musí zároveň divergovat i konvergovat. To je spor. $\square$

Př. 7. Určete poloměry konvergence následujících řad: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Řešení: ad 1): $a_n = \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\beta := \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Tedy $R = +\infty$.

ad 2): $a_n = n^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = 0$,

$$\beta := \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \to \infty} n = \lim_{n \to \infty} n = +\infty.$$

Tedy $R = \frac{1}{+\infty} = 0$.

ad 3): $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = 0$,

$$\beta := \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

$\Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$.

<u>Poznámka</u>. Je-li $0 < R < +\infty$, pak Věta 9 nic neříká o tom, jak se řada (1) chová na hranici kruhu konvergence, tj. pro ta $z \in \mathbb{C}$, která splňují podmínku $|z - z_0| = R$.

Př.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ... geometrická řada, $R = 1$

Pro $|z| = 1$ řada diverguje (nesplňuje nutnou podmínku konvergence)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ ... $R = 1$

Pro $|z| = 1$ dostáváme

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ konverguje absolutně pro $|z| = 1$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ... $R = 1$

Pro $z = 1$ dostáváme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, což je harmonická řada, která diverguje.

Pro $z = 1$ dostáváme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, která konverguje (dle Leibnizova kritéria)

(Lze dokázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje v množině $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1, z \neq 1\}$.) (↑ neabsolutně) %.

Př. Dokažte, že mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $z \neq 1$.

Řešení: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, kde $b_n = \frac{1}{n}$, $a_n = z^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Platí $b_n \geq b_{n+1} \geq \dots$, $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

a $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $z \neq 1$ a $\forall k \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{k} z^n\right| = \left|z \sum_{n=1}^{k} z^{n-1}\right| = \left|z \sum_{i=0}^{k-1} z^i\right| = \left|z \frac{1-z^k}{1-z}\right| \leq$$

$$\leq |z| \frac{1+|z|^k}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|} =: \tilde{c} < +\infty .$$

Tedy $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $z \neq 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje podle Dirichletova kritéria. %.

Poznámka. Z Věty 9 (4. přednáška) plyne, že poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ závisí pouze na koeficientech a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, mocninné řady.

Buď $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Definice limity je stejná jako pro reálnou funkci reálné proměnné: Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}$, pak

$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \iff (\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall z \in \mathbb{C},\ 0 < |z - z_0| < \delta : |f(z) - A| < \varepsilon)$.

Analogicky jako v reálném případě definujeme:

f je spojitá v bodě z_0 $\iff \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$,

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right).$$

Derivaci ovšem nyní definujeme jen pokud tato limita je konečná.

Opět platí: $f'(z_0)$ existuje $\Rightarrow$ f je spojitá v bodě z_0.

Stejně jako v „reálném případě“ se dokáže:

Jestliže fce $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mají derivaci v bodě $z \in \mathbb{C}$, pak

$(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$, $\quad (f \cdot g)'(z) = f'(z) g(z) + f(z) g'(z)$,

pokud navíc $g(z) \neq 0$, pak $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z) g(z) \quad f(z) g'(z)}{(g'(z))^2}$.

V komplexním oboru platí věta o derivaci složené fce: Má-li f derivaci v bodě $z \in \mathbb{C}$ a fce g derivaci v bodě $f(z)$, pak $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$.

Z uvedeného plyne:

$f \equiv$ konstantní fce $\Rightarrow f' \equiv 0$

$(Id)' \equiv 1$ $\qquad (Id^n)' = n\, Id^{n-1} \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Derivace (komplexního) polynomu $\sum_{n=0}^{k} a_n (z-z_0)^n$ se počítá obvyklým způsobem, tj.

$$\left(\sum_{n=0}^{k} a_n (z-z_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{k} n\, a_n (z-z_0)^{n-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Věta 10 (o derivaci mocninné řady).

(i) Řady

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ a (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z-z_0)^{n-1}$

mají stejný poloměr konvergence R.

(ii) Buď $R > 0$, $U(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C};\, |z-z_0| < R\}$ a

(3) $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ pro $z \in U(z_0, R)$.

Pak

(4) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z-z_0)^{n-1}$ pro $z \in U(z_0, R)$.

Poznámka. Věta 10(ii) tvrdí, že v kruhu $U(z_0, R)$ (kde $R > 0$) lze řadu (1) derivovat "člen po členu" a řada, kterou dostaneme má za součet derivaci součtu řady (1).

(Jinak řečeno, lze zaměnit pořadí derivace a limity, neboť

$$LHS(4) = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\right) = \frac{d}{dz}\left(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n (z-z_0)^n\right),$$

$$RHS(4) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} n\, a_n (z-z_0)^{n-1} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{k} a_n (z-z_0)^n\right)\right),$$

$\forall z \in U(z_0, R)$.)

K důkazu části (i) Věty 10 použijeme následující tvrzení.

<u>Lemma 11</u> (o $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n$). Nechť $\{a_n\}_1^\infty$, $\{b_n\}_1^\infty$ jsou posloupnosti nezáporných čísel. Jestliže existuje $\lim_{n\to\infty} a_n$, pak

(*) $$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\cdot\left(\limsup_{n\to\infty} b_n\right),$$

pokud RHS(*) má smysl.

<u>Důkaz</u>. Označme $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, $b := \limsup_{n\to\infty} b_n$ a předpokládejme, že $a\cdot b$ má smysl.

I. Je-li $b=+\infty$, pak $a>0$ a RHS(*) $=+\infty$.

Protože $a>0$, tak platí

$$\exists n_1\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_1:\ a_n>\frac{a}{2}.$$

Odtud plyne (neb $b_k\geq 0\ \forall k\in\mathbb{N}$)

$$\gamma_n := \sup_{k\geq n} a_k b_k \geq \frac{a}{2}\underbrace{\sup_{k\geq n} b_k}_{=:\beta_n} = \frac{a}{2}\cdot\beta_n$$

$$\gamma_n \to \limsup_{n\to\infty} a_n b_n, \qquad \frac{a}{2}\cdot\beta_n \to \frac{a}{2}\cdot b = +\infty$$

Tedy LHS(*) $\geq +\infty$, tzn. LHS(*) $=+\infty$, a proto LHS(*) $=$ RHS(*).

II. Je-li $a=+\infty$, pak $b>0$ a RHS(*) $=+\infty$.

Víme, že ex. rostoucí posl. přirozených čísel n_k tak, že $b_{n_k}\to b$ pro $k\to\infty$. Pak $a_{n_k} b_{n_k} \to a\cdot b = +\infty$. Tudíž LHS(*) $\geq ab = +\infty$, tj. LHS(*) $=+\infty$, a proto LHS(*) $=$ RHS(*).

III. Nechť $a<+\infty$, $b<+\infty$.

Je-li $a'<a$, pak

$$\exists n_1\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_1:\ a'<a_n.$$

Tedy $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_1$, platí (neb $b_k\geq 0\ \forall k\in\mathbb{N}$)

$$\gamma_n := \sup_{k\geq n} a_k b_k \geq a'\underbrace{\sup_{k\geq n} b_k}_{=:\beta_n} = a'\beta_n$$

$$\gamma_n \to \limsup_{n\to\infty} a_n b_n, \qquad a'\beta_n \to a'b$$

./.

tj.

$$\limsup a_n b_n \geq a' b$$

a odtud plyne $\underbrace{\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \geq a \cdot b.}$ (2*)

Je-li $a'' > a$, pak

$\exists\, n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2:\ a_n < a''$.

Tedy $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2$, platí (neb $b_k \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$)

$$\gamma_n = \sup_{k\geq n} a_k b_k \leq a'' \underbrace{\sup_{k \geq n} b_k}_{=\beta_n} = a'' \beta_n$$

$$\gamma_n \to \limsup_{n\to\infty} a_n b_n, \qquad a''\beta_n \to a'' b$$

tj: $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \leq a'' b$

a odtud plyne $\underbrace{\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \leq a \cdot b.}$ (3*)

Z (2*) a (3*) plyne (*). □

Důkaz Věty 10. ad (i): Platí

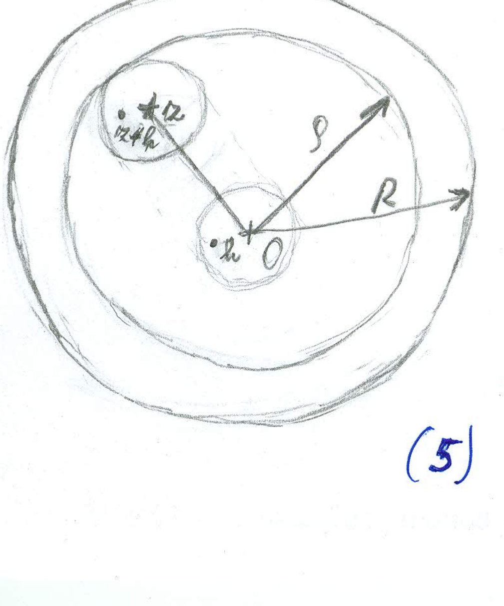
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}\right) \overset{\text{Lemma 11}}{=} \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)}_{=1} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Tedy tvrzení (i) plyne z Věty 9.

ad (ii): BÚNO lze předpokládat, že $z_0 = 0$. Dle (i), řady (1) a (2) mají stejný poloměr konvergence R. Nechť $R > 0$.

Nechť $z \in U(0,R)$ (pevné číslo). Pak $\exists\, \varrho \in (0,R)$ tak, že $z \in U(0,\varrho)$.



Pro $h \in U(0, \varrho - |z|)$, $h \neq 0$, položme

$$\varphi(h) := \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}.$$

Máme dokázat, že

(5) $$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Platí

(6) $$\varphi(h) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right)$$

člen s $n=1$ dá 0

Pomocí binomické věty pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dostaneme

(7) $$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} h^i z^{n-i} - \frac{z^n}{h} - n z^{n-1}$$

$$= \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} h^{i-1} z^{n-i}.$$

Píšeme-li v (7) $|z|, |h|$ místo z a h, dostaneme

(8) $$\frac{(|z|+|h|)^n - |z|^n}{|h|} - n|z|^{n-1} = \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} |h|^{i-1} |z|^{n-i}.$$

Protože $|RHS(7)| \leq RHS(8)$, platí $|LHS(7)| \leq LHS(8)$, tj.

(9) $$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right| \leq \frac{(|z|+|h|)^n - |z|^n}{|h|} - n|z|^{n-1}.$$

RHS(9) obsahuje už jen reálná čísla $|z|, |h|$, tedy lze použít 2x Lagrangeovu větu:

Položím $\psi(t) = (|z|+t)^n$, $t \in \mathbb{R}$ (z je pevné). Tedy $\forall t \in \mathbb{R}$ máme $\psi'(t) = n(|z|+t)^{n-1}$, $\psi''(t) = n(n-1)(|z|+t)^{n-2}$.

Pak

$$\underline{RHS(9)} = \frac{\psi(|h|) - \psi(0)}{|h|} - n z^{n-1} \underset{\text{kde } \theta \in (0,1)}{=} \psi'(\theta|h|) - n z^{n-1} = \psi'(\theta|h|) - \psi'(0) =$$

$$\underset{\text{kde } \sigma \in (0,1)}{=} \psi''(\theta\sigma|h|) \cdot \theta|h| = n(n-1)\big(\underbrace{|z| + \theta\sigma|h|}_{<\rho}\big)^{n-2} \underbrace{\theta}_{<1} |h| \leq$$

$$\leq \underline{n(n-1)\rho^{n-2}|h|}.$$

Odtud, z (9) a (6) máme

(10) $$\left| \varphi(h) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \leq |h| \overbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|\rho^{n-2}}^{=:\, K \in \mathbb{C}} = K|h|.$$

Tato řada konverguje, neb dle části (i) mají řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$ stejný poloměr konvergence R (a platí $\rho < R$, tedy $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \rho^{n-2}$ konverguje absolutně).

Z (10) ihned plyne (5). $\square$

6. přednáška MA 2, LS, šk. r. 2015/16, 9.3.2016

Důsledek 1 (Věty 10). Součet mocninné řady

(1) $\quad f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

s kladným poloměrem konvergence R má uvnitř kruhu konvergence (tj. pro $z \in U(z_0, R)$) derivace všech řádů, které lze získat derivováním dané řady člen po členu, tj. platí

(2) $\quad k \in \mathbb{N},\ z \in U(z_0, R) \Rightarrow f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, a_n (z-z_0)^{n-k}.$

Důkaz se provede opakovaným použitím Věty 10. □

Důsledek 2 (Věty 10). Pro mocninnou řadu (1) s kladným poloměrem konvergence R platí

(3) $\quad a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$

Důkaz. Je jasné, že $a_0 = f(z_0)$. Pro $k \in \mathbb{N}$ rovnost (3) plyne z (2) dosazením $z = z_0$. □

Poznámka 1. Uvažujme mocninnou řadu

(4) $\quad a + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$, kde $z_0, a, a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Protože derivací této řady člen po členu dostaneme mocninnou řadu

(5) $\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$

můžeme použít Větu 10, z které plyne, že řady (5) a (4) mají stejný poloměr konvergence R. Je-li $R > 0$ a $f(z)$, $g(z)$ součet řady (5) resp. (4), pak platí (cf. Věta 10)

$$g'(z) = f(z) \quad \forall z \in U(z_0, R).$$

Poznámka 2. Pro reálné mocninné řady (a jejich důkazů)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad \text{kde } x, x_0, a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

platí analogie předešlých výsledků. (V příslušných tvrzeních pouze zaměníme $|z-z_0| < R$ za $|x-x_0| < R$, $|z-z_0| > R$ za $|x-x_0| > R$, atd.)

Př. 1. Určete poloměr konvergence R (reálné) mocninné řady

(6) $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

a pro $x \in (-R, R)$ určete součet $g(x)$ této řady.

Řešení. Protože $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ a

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|} = \frac{n+1}{n+2} \to 1 \text{ pro } n \to \infty,$$

platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1.$$

Odtud plyne, že $\underline{R=1}$. Dále, podle (reálné verze) Věty 10 dostáváme

$$g'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n =$$

$$= \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in (-1,1).$$

Protože také platí

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in (-1,1),$$

existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že

(7) $$g(x) = c + \ln(1+x) \quad \forall x \in (-1,1).$$

Pro $x=0$ dostáváme

$$0 \underset{\uparrow \text{dle definice fce } g}{=} g(0) \overset{(7)}{=} c + \ln 1 = c,$$

tedy $c = 0$. Tudíž

$$g(x) = \ln(1+x) \quad \forall x \in (-1,1),$$

tj.

(8) $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x) \quad \forall x \in (-1,1).$$

Protože

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \underset{\uparrow\, n+1=k}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k},$$

rovnost (8) lze zapsat ve tvaru

(9) $$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad \forall x \in (-1,1).$$

Poznámka 3. Nechť (reálná) mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ má poloměr konvergence $R>0$. Nechť $f(x)$ je součet této řady pro $x \in (x_0-R, x_0+R)$. Potom $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$T^f_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Podle (reálné verze) Důsledku 2 platí

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Tedy $\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = T^f_{n,x_0}(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$. □

Nechť $x_0, x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$. Nechť fce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má derivace všech řádů v uzavřeném intervalu s krajními body x_0, x. Pak dle Věty 5 (Taylorova věta o zbytku) (2. přednáška) víme, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

(10) $$f(x) = T^f_{n,x_0}(x) + R_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

a platí jisté odhady zbytku $R_{n+1}(x)$.

Zajímá nás nyní otázka, zda fci $f(x)$ lze vyjádřit jako limitu

(11) $$\lim_{n\to\infty} T^f_{n,x_0}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

tj. zda platí

(12) $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Definice. Nechť fce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů. Pak řada (12) se nazývá Taylorovou řadou fce f se středem v bodě x_0. Je-li $x_0 = 0$, pak mluvíme o Maclaurinově řadě.

Lemma 12 (o Taylorově řadě). Nechť $x, x_0 \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$. Nechť fce f má derivace všech řádů v uzavřeném intervalu s krajními body x, x_0. Pak

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \iff \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

Důkaz ihned plyne z (10) a (11). □

Poznámka 4. K platnosti rovnosti (12) nestačí, aby řada na pravé straně rovnosti (12) konvergovala. Pro fci

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

totiž platí $\boxed{f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0}$, tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k \equiv 0 \neq f(x), \text{ pokud } x \neq 0.$$

Důkaz přenést na cvičení (je v Jarník, DI, str. 302).

Věta 13 (Taylorova řada fce exp). Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$, pak

$$(13) \qquad e^x = e^{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Speciálně pro $x_0 = 0$ dostáváme

$$(14) \qquad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Položme $f = \exp$.*) Je-li $n \in \mathbb{N}_0$, pak podle Věty 5 (kde použiji Lagrangeův tvar zbytku) platí

$$e^x = T^f_{n,x_0}(x) + R_{n+1}(x),$$

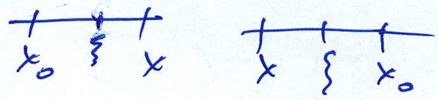
kde $$T^f_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k,$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

$\xi \in J^\circ$, J je uzavřený interval s krajními body x_0, x, $x \neq x_0$.

*) Fce f má derivace všech řádů v $\mathbb{R}$.

Protože $|f^{(n+1)}(\xi)| = |e^{\xi}| = e^{\xi} \le e^{\max(x,x_0)}$,



platí

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\max(x,x_0)}.$$

Řada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{\uparrow\, n+1=k}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x-x_0|^{k}}{k!}$ konverguje $\forall x \in \mathbb{R}$

(neboť $\displaystyle\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|k!|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} = 0 \Rightarrow R = +\infty$),

a tedy je splněna nutná podmínka konvergence, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Odtud máme $|R_{n+1}(x)| \to 0$ pro $n \to \infty$,

a proto (dle Lemmatu 12)

(15) $$e^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k = e^{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x \ne x_0$$

(ovšem pro $x = x_0$ (15) platí triviálně).

Tedy (13) je dokázáno. Rovnost (14) je triviálním důsledkem rovnosti (13). □

Věta 14 (Maclaurinovy řady fcí sin a cos). Je-li $x \in \mathbb{R}$, pak

(16) $$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

(17) $$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Důkaz. ad (17): Fce $f = \cos$ má derivaci všech řádů v celém $\mathbb{R}$. Tedy (volím $x_0 = 0$)

$$\cos x = f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{= T^{\cos}_{2n+1,0}(x)} + R_{2n+2}(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(pro $x = 0$ (17) platí triviálně)

↑ viz Př. 1, 3. přednáška.

a dle Věty 5 (s Lagrangeovým tvarem zbytku) máme

(18) $$R_{2n+2}(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\, f^{(2n+2)}(\xi),$$

kde $\xi \in J^{\circ}$, J je uzavřený interval s krajními body $x, 0$, $x \neq 0$.

Z (18) plyne

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \underbrace{|f^{(2n+2)}(\xi)|}_{=|\pm\cos\xi| \leq 1} \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Protože $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$ konverguje $\forall x \in \mathbb{R}$ („to zjistíme např. dle d'Alembertova kritéria"),

platí

$$\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0 \text{ pro } n \to \infty,$$

a tedy $|R_{2n+2}(x)| \to 0$ pro $n \to \infty$.

Odtud a z Lemmatu 12, pak plyne (17).

ad (16): Důkaz je analogický. □

Věta 15 (Maclaurinova řada fce $\ln(1+x)$). Je-li $x \in (-1,1)$, pak

(19) $$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

Důkaz: Viz rovnost (9) a Poznámku 3 .*) □
↑ list 2 ↑ list 3

*) Také porovnej s Př. 3 (3. přednáška, list 4).

7. přednáška MA 2, LS, šk. r. 2015/16, 15. 3. 2016

Uvažujme nyní fce $f(x) := (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0$, pak f je polynom a dle binomické věty máme

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Předpokládejme tedy, že $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$. Pak $D(f) = (-1, +\infty)$ a platí následující tvrzení:

Věta 16 (Maclaurinova řada fce $(1+x)^{\alpha}$). Pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ platí

$$(1) \quad (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \forall x \in (-1,1). \quad ^{*)}$$

Důkaz. Pro $x \in (-1,1)$ položme

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\binom{\alpha}{k}}_{=:a_k} x^k.$$

Pak platí

$$(2) \quad f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1} = \alpha \frac{f(x)}{1+x} \quad \forall x \in (-1,1).$$

Protože

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} \right| = \left| \frac{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots\overbrace{(\alpha-(k+1)-1)}^{=\alpha-k}}{(k+1)!}}{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}} \right| =$$

$$= \frac{|\alpha-k|}{k+1} \to 1 \text{ pro } k \to \infty,$$ tak poloměr konvergence R řady $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ je roven číslu 1. Tedy pro $\forall x \in (-1,1)$ podle Věty 10 (5. přednáška) platí

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k\, x^{k-1},$$

a proto

$$(1+x)\, g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k\, x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k\, x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} (n+1) x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n\, x^n =$$

$k-1=n$

---

*) Připomeňme si, že $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\binom{\alpha}{0} := 1$. Snadno ~~[illegible]~~ zjistíme, že (1) platí i pro $\alpha \in \mathbb{N}_0$ (pak je $\binom{\alpha}{k} = 0$ $\forall k > \alpha$).

$$= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n+1)-1)}{n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \right] x^n$$

$$= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \Big[\underbrace{(\alpha-n)+n}_{=\alpha} \Big] x^n =$$

$$= \alpha + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha\, g(x).$$

Odtud máme

$$(3) \qquad g'(x) = \alpha \frac{g(x)}{1+x} \quad \forall x \in (-1,1).$$

Z (2) a (3) plyne

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \frac{g'(x) f(x) - g(x) f'(x)}{f^2(x)} = \frac{\alpha \frac{g(x)}{1+x} f(x) - g(x) \alpha \frac{f(x)}{1+x}}{f^2(x)} = 0$$

$\forall x \in (-1,1)$. Tedy ex. $c \in \mathbb{R}$ tak, že

$$(4) \qquad \left(\frac{g}{f}\right)(x) = c \quad \forall x \in (-1,1).$$

Pro $x = 0$ dostáváme $c = \left(\frac{g}{f}\right)(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1.$

Odsud a z (4) pak plyne, že

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in (-1,1),$$

tj. platí (1). $\square$

Věta 17 (Maclaurinova řada fce arctg). Pro každé $x \in (-1,1)$ platí

$$(1) \qquad \operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Důkaz. $\forall x \in \mathbb{R}$ máme $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Je-li $x \in (-1,1)$, pak

$$(2) \qquad \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ má poloměr konvergence $R = 1$

(neboť $\left| \frac{(-1)^k}{2(k+1)+1} : \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| = \frac{2k+1}{2k+3} \to 1$ pro $k \to \infty$).

Tedy podle Věty 10 platí

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \overset{(2)}{=} \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in (-1,1).$$

Proto ex. $c \in \mathbb{R}$ tak, že

(3) $$\operatorname{arctg} x = c + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \forall x \in (-1,1).$$

Odtud pro $x=0$ dostáváme

$$\underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{=0} = c + 0 \implies c = 0,$$

což spolu s (3) ukazuje, že (1) platí. □

Věta 18 (Maclaurinova řada fce arcsin). Pro každé $x \in (-1,1)$ platí

(1) $$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

kde $a_0 = 1$, $a_k = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2k}$.

Důkaz. Pro $x \in (-1,1)$ platí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+(-x^2))^{-1/2} \overset{\text{Věta 17}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k,$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{\frac{1}{2^k}(-1)(-1-2)\cdots\overbrace{(-1-2k+2)}^{=(1-2k)}}{k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{1\cdot 3 \cdots (2k-1)}{2\cdot 4 \cdots 2k} \quad \text{pro } k \in \mathbb{N},$$

tedy

(2) $$(\arcsin x)' = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}, \quad x \in (-1,1),$$

kde $a_0 = 1$, $a_k = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2k}$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Protože $$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\dfrac{1\cdot 3 \cdots (2(k+1)-1)}{2\cdot 4 \cdots 2(k+1)}}{\dfrac{1\cdot 3 \cdots (2k-1)}{2\cdot 4 \cdots 2k}} = \frac{2k+1}{2k+2} \to 1 \text{ pro } k \to \infty,$$

řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$ má poloměr konvergence $R=1$.

Dále platí

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)' \overset{\text{Věta 10}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k} \overset{(2)}{=} (\arcsin x)' \quad \forall x\in(-1,1).$$

Odtud plyne, že ex. $c\in\mathbb{R}$ tak, že

$$(3) \quad \arcsin x = c + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \forall x\in(-1,1).$$

Pro $c=0$ dostáváme

$$\underbrace{\arcsin 0}_{=0} = c + 0 \implies c = 0.$$

Odtud a z (3) plyne (1). □

Poznámka na str. 5

Věta 19 (Maclaurinova řada fcí cosh a sinh).

Pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí

$$(1) \quad \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad (2) \quad \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Důkaz. ad (1): Fce $f=\cosh$ má v $\mathbb{R}$ derivace všech řádů (připomeňme si, že $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$)

Platí $f(0)=0$ a pro $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sinh x &&\implies f'(0)=0\\ f''(x) &= \cosh x &&\implies f''(0)=1\\ f'''(x) &= \sinh x &&\implies f'''(0)=0\\ f^{(4)}(x) &= \cosh x &&\implies f^{(4)}(0)=1 \end{aligned}$$

atd.

Tedy $\forall n\in\mathbb{N}_0$

$$(3) \quad \cosh x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{= T^{\cosh}_{2n,0}(x) = T^{c}_{2n+1,0}(x)} + R_{2n+2}(x).$$

Buď $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (pro $x=0$ (1) platí triviálně). Podle Věty 5 (Taylorova o zbytku, 2. přednáška) dostáváme (použij. Lagrangeův tvar zbytku, volím $x_0=0$)

$$R_{2n+2}(x) = \frac{(x-0)^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\theta x) \quad (\text{kde } \theta \in (0,1))$$
$$= \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cosh \theta x$$

$$\Rightarrow \quad |R_{2n+2}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \cosh \theta x \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \cosh |x| .$$

Protože
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} =: \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{konverguje } \forall x \in \mathbb{R}$$

(neboť $\displaystyle \frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\frac{|x|^{2(n+1)+2}}{(2(n+1)+2)!}}{\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}} = \frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+4)} \to 0$ pro $n \to \infty$),

platí
$$\lim_{n\to\infty} R_{2n+2}(x) = 0.$$ Odtud a z (3) plyne (1).

ad (2): Důkaz se provede analogicky. □

Poznámka. Z Věty 18 plyne

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \dots\dots$$

neb $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ Věta 18

Tedy číslo π zavedené ve Větě 85 (existence fcí sin, cos a čísla π) (19. přednáška MA-1) je určeno jednoznačně.

Nyní dokážeme:

Věta 82 (existence exponenciální fce) (18. přednáška MA 1).

Existuje právě jedna fce $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:

(1) $D(\exp) = \mathbb{R}$,

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $(\exp x)(\exp y) = \exp(x+y)$,

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$.

Důkaz. Z vlastností (1)-(3) uvedených ve Větě 82 jsme odvodili, že

(4) $\displaystyle \exp x = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Odtud plyne, že fce exp je určena jednoznačně (neboť je to součet uvedené řady).

Fci exp tedy definujeme předpisem (4), tj.:

$$(*) \quad \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad ^{*)}$$

Pak platí

$$(5) \quad (\exp x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

dle Věty 10., víme, že daná řada má poloměr konvergence $R = +\infty$

Z (*) také plyne

$$(6) \quad \exp 0 = 1.$$

Dále

$$\left[(\exp x)(\exp(-x))\right]' = (\exp x)\cdot\exp(-x) + (\exp x)(\exp(-x))(-1) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Tedy fce $(\exp x)(\exp(-x))$ je konstantní v $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (\exp x)(\exp(-x)) = (\exp 0)(\exp(-0)) = 1.1 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Odtud máme: $\exp x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$(7) \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

Buď $y \in \mathbb{R}$. Definujme fci $\varphi(x) := \dfrac{\exp(x+y)}{\exp x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Pak $$\varphi'(x) = \frac{(\exp(x+y))\exp x - (\exp(x+y))\exp x}{(\exp x)^2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow \varphi$ je konstantní v $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\varphi(x) = \underbrace{\varphi(0)}_{= \exp y} \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

tj. $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp x} = \exp y \quad \Rightarrow (2).$

ad (3): Z definice derivace máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = (\exp)'(0) \overset{(5)}{=} \exp 0 \overset{(6)}{=} 1. \quad \square$$

---

*) Odtud plyne, že $D(\exp) = \mathbb{R}$, tj. platí (1).

Funkce exp, sin, cos lze pomocí řad definovat v $\mathbb{C}$:

$$(1)\quad \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$(2)\quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$(3)\quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(I) Jako v reálném případě se dokáže, že

$$\boxed{\lim_{z \to 0} \frac{\exp z - 1}{z} = 1}$$

(II) Z (2) plyne, že fce sin je lichá,
z (3) — " — — " — cos je sudá,

tj. $\sin(-z) = -\sin z \ \forall z \in \mathbb{C}$,

neb $\sin(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\overbrace{(-z)^{2n+1}}^{= -z^{2n+1}}}{(2n+1)!} = -\sin z$

tj. $\cos(-z) = \cos z \ \forall z \in \mathbb{C}$,

neboť $\cos(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\overbrace{(-z)^{2n}}^{= z^{2n}}}{(2n)!} = \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

(III) Platí

$$\boxed{\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1}.$$

Důkaz. Z (2) plyne, že

$$(\sin)'(z) \underset{\text{dle (2)}}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' \underset{\text{dle Věty 10}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \underset{\text{dle (3)}}{=} \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Tedy

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z - \overbrace{\sin 0}^{=0 \text{ dle (2)}}}{z} = (\sin)'(0) = \cos 0 \overset{(3)}{=} 1.$$

IV Platí $\boxed{\exp(iz) = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}}$

Důkaz: $\cos z = \sum (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!}$,

$$i \sin z = i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$\Rightarrow \quad \cos z + i \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \exp iz \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Speciálně tedy

$$\exp(iy) = \cos y + i \sin y \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Kdybychom věděli, že $(\exp z_1)(\exp z_2) = \exp(z_1 + z_2)$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

pak by

$$\underline{\exp z} \underset{z = x+iy,\ x, y \in \mathbb{R}}{=} \exp(x+iy) = \overbrace{(\exp x)}^{\text{„}e^x\text{“}} \underbrace{(\exp(iy))}_{= (\cos y + i \sin y)} =$$

$$= \underline{e^x (\cos y + i \sin y)}$$

(to by dávalo jinou možnost jak definovat e^z, $z \in \mathbb{C}$, pomocí reálných funkcí).

Primitivní fce

Definice. Nechť $f, F: (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou fce definované na (a,b), kde $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je neprázdný (otevřený) interval. Řekneme, že F je primitivní fce k fci f na (a,b), jestliže
$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b).$$

Př. $(\sin x)' = \cos x \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$,
tedy sin je primitivní fce k fci cos na $(-\infty, +\infty)$

Poznámky. (i) Hledání primitivní fce k fci f (na ot. intervalu (a,b)) nazýváme integrací a primitivní fci se někdy také říká neurčitý integrál.

(ii) Je-li F primitivní fce k fci f na (a,b), pak $F \in C((a,b))$ (neboť F má vlastní derivaci na (a,b)).

Integrace není jednoznačnou operací:

Věta 20 (jednoznačnost primitivní fce až na aditivní konstantu). Nechť F a G jsou primitivní fce k fci f na intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Pak ex. $c \in \mathbb{R}$ tak, že
$$F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in (a,b).$$

Důkaz. Nechť $H(x) := F(x) - G(x)$ $\forall x \in (a,b)$. Pak
$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$.
$\Rightarrow$ H je konstantní fce na (a,b), tj. $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že
$H(x) = c$ $\forall x \in (a,b)$ $\Leftrightarrow$ $F(x) = G(x) + c$ $\forall x \in (a,b)$. $\square$

Otázka existence primitivní fce

Věta 21 (o existenci primitivní fce). Nechť $f \in C((a,b))$. Pak f má primitivní fci na (a,b).

Důkaz odložíme.

Následující příklad ukazuje, že spojitost fce f je pouze postačující podmínkou pro existenci primitivní fce.

Př.
$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & , x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Pak
$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{omezená fce}} = 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Tedy k fci
$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & , x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$
existuje primitivní fce v $\mathbb{R}$ (a je to F). Přitom fce f není není spojitá v $\mathbb{R}$ (tj. $f \notin C(\mathbb{R})$), neboť f není spojitá v bodě 0.

Věta 22 (Darbouxova vlastnost derivace). Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní fci. Pak f má na I Darbouxovu vlastnost, tj. $f(J)$ je interval, pokud $J \subset I$ je interval.

Důkaz.*) Buď $J \subset I$ interval. Nechť tedy

(1) $\quad y_1, y_2 \in f(J)$, $\quad y_1 < y_2 \quad$ a $\quad r \in (y_1, y_2)$.

Chceme dokázat, že $r \in f(J)$.

---

*) Připomeňme si Lemma. Množina $M \subset \mathbb{R}$ je interval $\iff$ $\forall y_1, y_2 \in M \; \forall r \in \mathbb{R} : (y_1 < r < y_2 \Rightarrow r \in M)$.

Nechť F je primitivní fce k f na I. Položme

$$H(x) := F(x) - r \cdot x \quad \forall x \in I.$$

Pak $H \in C(I)$ a platí

$$(2) \qquad H'(x) = f(x) - r \quad \forall x \in I.$$

Protože $y_1, y_2 \in f(J)$, existují $x_1, x_2 \in J$ tak, že $y_i = f(x_i)$, $i = 1,2$. Předpokládejme, že $x_1 < x_2$ (v opačném případě postupujeme analogicky).

Fce H nabývá na $\langle x_1, x_2 \rangle$ minima (neb $H \in C(\langle x_1, x_2 \rangle)$).

Buď $x_0 \in \langle x_1, x_2 \rangle$ bod, pro který platí $H(x_0) = \min_{x \in \langle x_1, x_2 \rangle} H(x)$.

Protože platí

$$H'(x_1) = f(x_1) - r = y_1 - r < 0,$$

tj: $H'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{H(x_1 + h) - H(x_1)}{h} < 0$,

tak

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in P_+(x_1, \delta) : H(x) < H(x_1)$$

$\Rightarrow$ $\underline{x_1 \neq x_0}$.

Obdobně dostaneme (z faktu, že $H'(x_2) = f(x_2) - r > 0$), že $x_2 \neq x_0$.

Tedy $x_0 \in (x_1, x_2) \Rightarrow H'(x_0) = 0$ (neb fce H má v bodě x_0 lokální minimum a $H'(x_0)$ existuje)

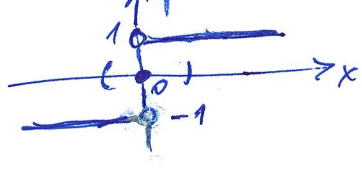
$\Updownarrow$ dle (2)

$\underline{f(x_0) = r}$. $\square$

Poznámka. Platí

$f \in C((a,b)) \underset{\text{Věta 21}}{\Rightarrow} f$ má na (a,b) primitivní fci $\underset{\text{Věta 22}}{\Rightarrow} f$ má Darbouxovu vlastnost na (a,b)

Př. Fce $f = \operatorname{sgn}$ na $I = \mathbb{R}$ nemá Darbouxovu vlastnost



$J := (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$

$f(J) = \{-1, 0, 1\}$ ... to není interval

Tedy k fci sgn neexistuje v $\mathbb{R}$ primitivní fce.

Značení $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$ neprázdný ot. interval

$f: I\to\mathbb{R}$ fce definovaná na I

$\int f$ ... množina všech primitivních fcí k f (na I)

$\int f(x)\,dx$, $\int f(t)\,dt$

M_1, M_2 ... dvě množiny fcí definovaných na I

$M_1 \pm M_2 := \{f_1 \pm f_2;\ f_1\in M_1,\ f_2\in M_2\}$

$\alpha M_1 := \{\alpha f_1;\ f_1\in M_1\}$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$

$g\pm M_1 := \{g\}\pm M_1 = \{g\pm f_1;\ f_1\in M_1\}$, kde g je fce definovaná na I

C ... množina všech konstantních fcí na I.

Př. $F\in\int f \Rightarrow \int f \underset{\text{dle Věty 20}}{=} F + C$

$\int f - \int f = C$

$\int 0 = C$

Věta 23 (linearita neurčitého integrálu).

Nechť $f, g: I\to\mathbb{R}$ jsou fce definované na ot. intervalu $I\subset\mathbb{R}$. Nechť $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Pak

(1) $\int(\alpha f+\beta g) = \alpha\int f + \beta\int g$ (na I),

pokud RHS(1) má smysl. *)

Důkaz. Nechť $F\in\int f$, $G\in\int g$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Pak

$\alpha F+\beta G\in\alpha\int f+\beta\int g \Rightarrow \boxed{\alpha\int f+\beta\int g \underset{\text{Věta 20}}{=} \alpha F+\beta G + C \quad (2)}$

Dále

$(\alpha F+\beta G)' = \alpha f+\beta g$ na I $\Rightarrow \alpha F+\beta G\in\int(\alpha f+\beta g) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\int(\alpha f+\beta g) \underset{\text{Věta 20}}{=} \alpha F+\beta G + C \quad (3)}$.

Z (2) a (3) plyne (1). □

---

*) RHS(1) má smysl $\overset{\text{df.}}{\Longleftrightarrow}$ množiny $\int f$ a $\int g$ jsou neprázdné $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ fce f a g mají na I primitivní fce.

9. přednáška MA2, LS, šk. r. 2015/16, 22. 3. 2016

Př. 1. $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx - \int \cos 2x\,dx\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$ na $\mathbb{R}$,

tj. pro $x \in \mathbb{R}$.

Zk. $\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right)' = \frac{1}{2} - \frac{1\cos 2x}{4} = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \sin^2 x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

K výpočtu primitivních funkcí je dobré si zopakovat derivace:

$(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in (-\infty,0),\ \forall x \in (0,+\infty)$

$(\sin x)' = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\quad (\cos x)' = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\sinh x)' = \cosh x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\quad (\cosh x)' = \sinh x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$, $\quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \forall x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}$, $\quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1,1)$, $\quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1,1)$

$\Big(\underbrace{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}_{\text{inverzní fce k } \sinh x}\Big)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \forall x \in (1,+\infty)$ *), $\ \forall x \in (-\infty,-1)$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall x \in (0,+\infty),\ \alpha \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{N}_0,\ (x^0 \equiv 1)$

$\left.\begin{array}{l}\forall x \in (0,+\infty)\\ \forall x \in (-\infty,0)\end{array}\right\}$ if $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$

a také pro $\alpha \in \mathbb{Q}$, pro která je x^α definováno na $(-\infty,0)$

např. $\left(x^{1/5}\right)' = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$ na $(0,+\infty)$ i na $(-\infty,0)$

---

*) $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, $x \in \langle 1,+\infty)$, je inverzní fce k $\cosh|_{\langle 0,+\infty)}$.

Věta 24 (integrace per partes) Nechť fce u, v mají konečnou derivaci na ot. intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Pak

(1) $\int u'v = uv - \int uv'$ na I,

má-li jedna strana smysl.

Důkaz. (i) Nechť RHS(1) má smysl. Buď $F \in \int uv'$. Pak

$F' = uv'$ na I a $\boxed{\text{RHS}(1) \overset{\text{Věta 20}}{=} uv - F + C \quad (2)}$.

Dále platí

$(uv - F)' = u'v + uv' - F' = u'v + uv' - uv' = u'v$ na I

$\Rightarrow$ $uv - F \in \int u'v$ a $\boxed{\text{LHS}(1) \overset{\text{Věta 20}}{=} uv - F + C \quad (3)}$.

Z (2) a (3) $\Rightarrow$ (1).

(ii) Nechť LHS(1) má smysl.

Označme $\tilde{u} = v$, $\tilde{v} = u$. Pak $(\tilde{u})' = v'$, $(\tilde{v})' = u'$ a platí $\int u'v = \int (\tilde{v})'\tilde{u} = \int \tilde{u}(\tilde{v})'$.

Odtud plyne, že pravá strana v (1) s $\tilde{u}$ místo u a $\tilde{v}$ místo v má smysl. Tedy podle (i) platí

$\int (\tilde{u})'\tilde{v} = \tilde{u}\tilde{v} - \int \tilde{u}(\tilde{v})'$ na I,

tj. $\int v'u = vu - \int v u'$ na I

$\Leftrightarrow$ $\int u'v = uv - \int uv'$ na I. $\square$

Př. 2. $\int \underset{u'}{e^x} \underset{v}{x}\, dx = \underset{u}{e^x} \underset{v}{x} - \int \underset{u}{e^x} \cdot \underset{v'}{1}\, dx = xe^x - e^x + C$, $x \in \mathbb{R}$

Zk. $(xe^x - e^x)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Věta 25 (1. substituční metoda).

Nechť $F \in \int f$ na $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Nechť φ má konečnou derivaci na $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$ a $\varphi((\alpha,\beta)) \subset (a,b)$. Pak

$$(*) \qquad \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C \quad \text{na } (\alpha,\beta).$$

Důkaz. Dle věty o derivování složené fce platí

$$\big(F(\varphi(t))\big)' = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t) \quad \forall t \in (\alpha,\beta).$$

Tedy $F(\varphi(t)) \in \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \underset{\text{Věta 20}}{\Longrightarrow} (*)$. $\square$

Př. 3. $\int \sin^3 t \cos t\,dt$

Volím $\varphi(t) = \sin t$, $t \in \mathbb{R} = (\alpha,\beta)$

$\Rightarrow \varphi'(t) = \cos t$, $t \in \mathbb{R}$.

Volím $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R} = (a,b)$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{x^4}{4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Platí $\varphi((\alpha,\beta)) = \sin \mathbb{R} = \langle -1, 1\rangle \subset \mathbb{R} = (a,b)$.

Tedy dle Věty 25 platí

$$\int \sin^3 t \cos t = F(\varphi(t)) + C = \frac{\sin^4 t}{4} + C \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

"Kuchařka":
$$\int \sin^3 t\,\underline{\cos t\,dt} = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C = \frac{\sin^4 t}{4} + C \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$x = \sin t = \varphi(t)$

$\dfrac{dx}{dt} = \varphi'(t) = \cos t$

$dx = \underline{\cos t\,dt}$

Je však třeba ověřovat předpoklady Věty 25!

Věta 26 (2. substituční metoda). Nechť f je reálná fce definovaná na $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Nechť $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$, $\varphi : (\alpha,\beta) \xrightarrow{\text{na}} (a,b)$ je funkce, která má v intervalu (α,β) konečnou a nenulovou derivaci. Jestliže

$$G \in \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \quad \text{na } (\alpha,\beta),$$

pak

$$(2*) \qquad \int f(x)\,dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C \quad \forall x \in (a,b).$$

Důkaz. Poznamenejme, že fce φ' má podle Věty 22 Darbouxovu vlastnost. Odtud a z předpokladu $\varphi' \neq 0$ v (α, β) plyne, že buďto $\varphi' > 0$, nebo $\varphi' < 0$ na (α,β). Tedy φ je ryze monotónní na (α,β).

Podle věty o derivování složené fce a věty o derivování inverzní fce platí

$$(G(\varphi^{-1}(x)))' = G'(\varphi^{-1}(x))\cdot(\varphi^{-1}(x))' =$$

$$= \underbrace{f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))}_{=f(x)}\,\varphi'(\varphi^{-1}(x))\cdot\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x) \quad \forall x\in(a,b),$$

tj: $G(\varphi^{-1}(x)) \in \int f(x)\,dx$ na (a,b).

Odtud a z Věty 20 pak plyne $(2*)$. $\square$

Př. 4. Určete $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$.

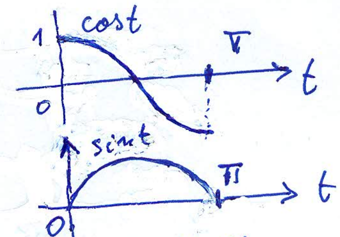
$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int f(x)\,dx, \quad f(x)=\sqrt{1-x^2}, \quad x\in(-1,1)=(a,b)$$

$x = \cos t = \varphi(t)$, $t\in(0,\pi)=(\alpha,\beta)$

$\varphi'(t) = -\sin t$, $t\in(0,\pi)$, $\underline{\varphi((0,\pi))=(-1,1)}$

$\Downarrow$

$\underline{0\neq\varphi'(t)\in\mathbb{R} \quad \forall t\in(0,\pi)}$



$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int\sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t)\,dt = -\int \underbrace{|\sin t|}_{=\sin t,\ \text{neb } \sin t>0 \text{ na } (0,\pi)}\sin t\,dt =$$

$$= -\int\sin^2 t = \underbrace{-\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}}_{=:G(t)} + C = \underline{G(t)+C} \quad \forall t\in(0,\pi)$$

Př. 1

$$\Rightarrow \quad \underline{\int\sqrt{1-x^2}\,dx} = G(\varphi^{-1}(x)) + C = -\frac{\arccos x}{2} + \frac{\sin(2\arccos x)}{4} + C =$$

$x = \cos t$, $t\in(0,\pi)$ $\iff$ $t = \arccos x$, $x\in(-1,1)$

$$= -\frac{\arccos x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C \quad \forall x\in(-1,1)$$

$\uparrow$ $\sin(2\arccos x) = 2\sin(\arccos x)\cdot\underbrace{\cos(\arccos x)}_{=x} = 2x\cdot\sqrt{1-\cos^2\arccos x} = 2x\sqrt{1-x^2}$ pro $x\in(-1,1)$

Tedy $$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{\arccos x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C \quad \forall x\in(-1,1)$$

"Kuchařka": $\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int\sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t)\,dt =$

$x=\cos t$, $t\in(0,\pi)$ $\iff$ $t=\arccos x$, $x\in(-1,1)$

$dx = \underbrace{-\sin t}_{\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\text{ na }(0,\pi)}\,dt$ $\qquad \cos((0,\pi)) = (-1,1)$

POZOR na předpoklady věty

$= \dots = -\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C = -\frac{\arccos x}{2}+\frac{\sin(2\arccos x)}{4}+C$

$= \dots = -\frac{\arccos x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C, \quad x\in(-1,1)$

Jiné řešení. $\int\sqrt{1-x^2}\,dx \overset{\text{per partes}}{=} x\sqrt{1-x^2} - \int x\,\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{(-\cancel{2}x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$= x\sqrt{1-x^2} - \int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int\sqrt{1-x^2}\,dx + \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= x\sqrt{1-x^2} - \int\sqrt{1-x^2}\,dx + \arcsin x$

$\Rightarrow \quad 2\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + C$

$\Rightarrow \quad \int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C \quad \forall x\in(-1,1)$

Poznámka. Připomeňme si, že $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \quad \forall x\in(-1,1)$.

Lemma 27 (slepování primitivních fcí). Nechť $f,F\in C((a,b))$, $\xi\in(a,b)\subset\mathbb{R}$, $F\in\int f$ na (a,ξ) i na (ξ,b). Pak $F\in\int f$ na (a,b).

Důkaz. Platí

Věta 96 (o limitě derivace, MA1)

f je spojitá v bodě ξ

$F'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+}F'(x) = \lim_{x\to\xi+}f(x) = f(\xi) = \lim_{x\to\xi-}f(x) = \lim_{x\to\xi-}F'(x) = F'_-(\xi)$

$\Rightarrow$ $F'(\xi)$ existuje a platí $F'(\xi)=f(\xi)$.

Odtud a z předpokladů plyne, že $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in(a,b)$.

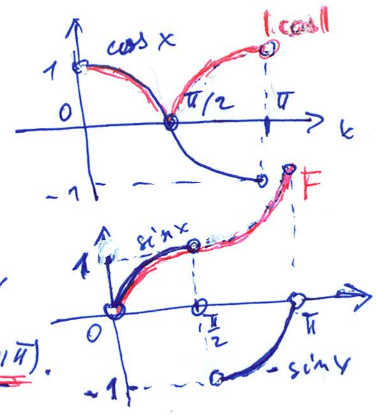
Tedy $F\in\int f$ na (a,b). □

Př. 5. Určete $\int|\cos x|\,dx$, $x\in(0,\pi)$ ← spojitá fce na $(0,\pi)$

$x\in(0,\frac{\pi}{2})$: $\int|\cos x|\,dx = \int\cos x\,dx = \sin x + C$

$x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$: $\int|\cos x|\,dx = \int(-\cos x)\,dx = -\sin x + C$

$F(x) := \begin{cases}\sin x, & x\in(0,\frac{\pi}{2}\rangle \\ -\sin x + 2, & x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$ $\Rightarrow$ F je spojitá v $(0,\pi)$. Tedy dle L.27 platí $F\in\int|\cos x|\,dx$ na $(0,\pi)$.



Integrace parciálních zlomků

I. $\alpha \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^r}\,dx = \frac{(x-\alpha)^{1-r}}{1-r} + C \quad \text{if } r \in \mathbb{N}\setminus\{1\} \text{ na } (-\infty,\alpha) \text{ na } (\alpha,+\infty)$$

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha| + C \quad \forall x \in (-\infty,\alpha),\ \forall x \in (\alpha,+\infty)$$

II. $k \in \mathbb{N}$

$$I_k := \int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,dx$$

Pro $k \in 1$ platí $I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Pro $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ máme

$$I_k = \int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,dx = \int 1\cdot\frac{1}{(x^2+1)^k}\,dx \overset{\text{per partes}}{=}$$

$$= x\,\frac{1}{(x^2+1)^k} - \int x\,\frac{(-k)\cdot 2x}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)^k} + 2k\int\frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^k} + 2k\int\frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)^k} + 2k\left(I_k - I_{k+1}\right) \quad \Big/ \cdot\frac{1}{2k}$$

$$\frac{I_k}{2k} = \frac{1}{2k}\,\frac{x}{(x^2+1)^k} + I_k - I_{k+1}$$

$$\Rightarrow \quad I_{k+1} = \frac{1}{2k}\,\frac{x}{(x^2+1)^k} + I_k\overbrace{\left(1-\frac{1}{2k}\right)}^{\frac{2k-1}{2k}}, \quad k \in \mathbb{N},\ k>1$$

rekurentní vzorec

III. $M, N \in \mathbb{R}$, $M \neq 0$, $s \in \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{R}$, $p^2-4q<0$.

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s}\,dx = \frac{M}{2}\int\frac{2x+p+\left(\frac{2N}{M}-p\right)}{(x^2+px+q)^s}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2}\left[\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^s}\,dx + \left(\frac{2N}{M}-p\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^s}\right]$$

1) $$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^s}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(x^2+px+q)^{1-s}}{1-s} + C & \text{if } s \in \mathbb{N}\setminus\{1\} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \ln(x^2+px+q) + C & \text{if } s=1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2) $$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^s}\,dx = \int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)^s} =$$

$x \in \mathbb{R}$:

$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx =$

$$= \frac{1}{\left(q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)^{s-\frac{1}{2}}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}}\,dx}{\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}}\right)^2+1\right)^s}$$

substituce (1. věta o substituci)

$$y = \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}} \quad (= \varphi(x))$$

$\Downarrow$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\left(q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right)^{s-\frac{1}{2}}} \underbrace{\boxed{\int \frac{dy}{(y^2+1)^s}}} = I_s \ldots \text{viz II.}$$

$\int f(y)\,dy$

známe

Rozklad polynomu na součin kořenových činitelů

(1) $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$

↑ polynom

$x \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$

$a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, n$,

$a_0 \neq 0$ … st $Q = n$

Je-li $a_k \in \mathbb{R}$ $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, pak $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a mluvíme o reálném polynomu (ačkoliv Q je definován v $\mathbb{C}$).

Definice. Je-li $\alpha \in \mathbb{C}$ takové číslo, že $Q(\alpha) = 0$, pak α se nazývá kořenem polynomu Q nebo kořenem rovnice $Q(x) = 0$.

Věta 28 (základní věta algebry). Každý polynom kladného stupně má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.

Věta 29 (rozklad polynomu). Buď Q polynom (1) stupně $n \in \mathbb{N}$. Pak existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tak, že

(2) $\forall x \in \mathbb{C} : Q(x) = a_0 (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$.

Důkaz. Dle Věty 28 $\exists \alpha_1 \in \mathbb{C}$ tak, že $Q(\alpha_1) = 0$.

st $Q = n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_0 \neq 0$

Pak $Q(x) = Q(x) - Q(\alpha_1) = a_0 (x^n - \alpha_1^n) + a_1 (x^{n-1} - \alpha_1^{n-1}) + \dots + a_{n-1}(x - \alpha_1) =$

$x^k - \alpha_1^k = (x - \alpha_1)(x^{k-1} + x^{k-2}\alpha_1 + \dots + x \alpha_1^{k-2} + \alpha_1^{k-1})$ $\forall x \in \mathbb{C}$

↑ if $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$

$= (x - \alpha_1) Q_1(x)$, kde st $Q_1 = n - 1$, neb v Q_1 je koeficient u členu x^{n-1} roven a_0

Tedy $Q(x) = (x - \alpha_1) Q_1(x)$ $\forall x \in \mathbb{C}$, st $Q_1 = n - 1$

Je-li $n - 1 > 0$, pak Q_1 má kořen $\alpha_2 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $Q_1(x) = (x - \alpha_2) Q_2(x)$, st $Q_2 = n - 2$

⋮ atd.

$Q(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$, kde $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$.

$\square$

Důsledek 1. Rovnice $Q(x)=0$, kde Q je polynom stupně $n\in\mathbb{N}$ má nejvýše n různých kořenů.

Důsledek 2. Má-li rovnice $Q(x)=0$, kde Q je polynom,
$Q(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$, alespoň $(n+1)$ různých kořenů, pak $a_0=a_1=\ldots=a_n=0$.

Důkaz. Sporem. Kdyby $a_k\neq 0$ pro nějaké $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, pak by st Q bylo jisté číslo $m\le n$. Podle Důsledku 1 by platilo, že rovnice $Q(x)=0$ má nejvýše m různých kořenů, pokud $m\in\mathbb{N}$. Totéž ovšem platí i pro $m=0$. Protože $m\le n$, dostáváme tak spor s předpokladem. □

Z Důsledku 2 ihned plyne:

Důsledek 3. Je-li Q polynom, který je roven 0 pro nekonečně mnoho různých $x\in\mathbb{C}$, pak všechny jeho koeficienty jsou rovny 0 (a tedy $Q(x)=0\ \forall x\in\mathbb{C}$).

Důsledek 4. Jsou-li P,Q dva polynomy a platí $P(x)=Q(x)$ pro nekonečně mnoho $x\in\mathbb{C}$, pak každý koeficient polynomu P je roven stejnolehlému koeficientu polynomu Q (tj. koeficientu u téže mocniny x), a tedy $P(x)\equiv Q(x)$.

Důkaz. Tvrzení plyne z Důsledku 3, neboť polynom $P(x)-Q(x)$ splňuje předpoklady Důsledku 3. □

Věta 30 (rozklad polynomu podruhé). Rozklad polynomu Q daný v (2) je určen jednoznačně v následujícím smyslu: Jestliže

(3) $\forall x\in\mathbb{C}:\ a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)=b_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_m)$,

kde $a_0\neq 0\neq b_0$, $n,m\in\mathbb{N}$, pak

$$a_0=b_0\ ,\quad n=m$$

a čísla $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ jsou až na pořadí totožná s čísly $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$.

Důkaz. Rovnice v (3) má po roznásobení tvar

$$a_0 x^n + \dots = b_0 x^m + \dots \quad \forall x \in \mathbb{C},$$

tedy podle Důsledku 4 platí $n = m$ a $a_0 = b_0$.
Zbývá tedy dokázat výrok:

(V_n) Jestliže $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}$ a platí

$$(*) \quad (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n) \quad \forall x \in \mathbb{C},$$

pak čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou až na pořadí totožná s čísly $\beta_1, \dots, \beta_n$.

Důkaz provedeme mat. indukcí:

1) Pro $n = 1$ z rovnice $(x-\alpha_1) = (x-\beta_1)$ plyne $\alpha_1 = \beta_1$.

2) Buď $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Předpokládejme, že výrok (V_k) platí $\forall k \in \mathbb{N}$, $k < n$.

3) Dokážeme, že pak platí výrok (V_n):
Dosadíme do $(*)$ $x = \alpha_1$. Pak $LHS(*) = 0 \Rightarrow RHS(*) = 0$
$\Rightarrow$ některé z čísel $\beta_1, \dots, \beta_n$ je rovno číslu α_1.
BÚNO lze předpokládat, že $\beta_1 = \alpha_1$ (jinak čísla $\beta_1, \dots, \beta_n$ přečíslují).
Pak dělím rovnici $(*)$ číslem $x - \alpha_1$, kde $x \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1\}$.
Dostanu, že $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1\}$ platí

$$(2*) \quad (x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) = (x-\beta_2)\dots(x-\beta_n).$$

Podle Důsledku 4 platí $(2*)$ $\forall x \in \mathbb{C}$. Odtud pak podle indukčního předpokladu plyne, že čísla $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou až na pořadí totožná s čísly $\beta_2, \dots, \beta_n$. $\square$

Poznámka. Z (2) plyne

$$(2') \quad Q(x) = a_0 (x-\alpha_1)^{r_1} \dots (x-\alpha_m)^{r_m} \quad \forall x \in \mathbb{C},$$

kde $\alpha_i \neq \alpha_j$ pro $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$,
$r_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, m\}$,
a $r_1 + \dots + r_m = n$.

Definice. r_i … násobnost kořene α_i, $i = 1, \dots, m$.
$x - \alpha_i$ … kořenový činitel polynomu $Q(x)$ (násobnosti r_i)

Lemma 31 (o kořenech reálného polynomu). Má-li reálný polynom r-násobný kořen α, má také r-násobný kořen $\bar{\alpha}$.

Důkaz. Nechť

(1) $$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \quad \forall x \in \mathbb{C},$$

kde $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$.

Nechť

(2) $$Q(x) = a_0 (x-\alpha_1)^{r_1} \dots (x-\alpha_m)^{r_m} \quad \forall x \in \mathbb{C},$$

kde $\alpha_i \neq \alpha_j$ pro $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Tedy Q má r_1-násobný kořen α_1.

Dokážeme, že pak Q má r_1-násobný kořen $\bar{\alpha}_1$:

Z (1) plyne

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \overline{Q(x)} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\bar{a}_k}_{a_k} \underbrace{\bar{x}^{n-k}}_{x^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = Q(x),$$

tj.

(3) $$\overline{Q(x)} = Q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Odtud a z (2) máme

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad Q(x) \overset{(3)}{=} \overline{Q(x)} \overset{(2)}{=} \bar{a}_0 (\bar{x}-\bar{\alpha}_1)^{r_1} \dots (\bar{x}-\bar{\alpha}_m)^{r_m} =$$
$$= a_0 (x-\bar{\alpha}_1)^{r_1} \dots (x-\bar{\alpha}_m)^{r_m}.$$

Podle Důsledku 4 pak platí

$$Q(x) = a_0 (x-\bar{\alpha}_1)^{r_1} \dots (x-\bar{\alpha}_m)^{r_m} \quad \forall x \in \mathbb{C},$$

přitom $\bar{\alpha}_i \neq \bar{\alpha}_j$, $i \neq j$ (neb $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$)

$\Rightarrow$ $\bar{\alpha}_1$ je r_1-násobný kořen polynomu Q. $\square$

$\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow (x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - x(\alpha+\bar{\alpha}) + \alpha\bar{\alpha} =$
$= x^2 - x\, 2\operatorname{Re}\alpha + |\alpha|^2$
$= x^2 + px + q$, kde $p = -2\operatorname{Re}\alpha \in \mathbb{R}$, $q = |\alpha|^2 \in \mathbb{R}$ a $p^2 - 4q < 0$.

Přitom různým dvojicím komplex. čísel $\alpha, \bar{\alpha}$, kde $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, odpovídají různé polynomy $x^2 + px + q$.

Odtud a z Vět 29 a 30 plyne:

Věta 32 (rozklad reálného polynomu).

Buď $Q(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$, $a_0\neq 0$, reálný polynom.

Pak platí

(4) $\forall x\in\mathbb{C}:\ Q(x)=a_0(x-\alpha_1)^{r_1}\dots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\dots(x^2+p_lx+q_l)^{s_l}$, *)

kde $r_1,\dots,r_k,\ s_1,\dots,s_l\in\mathbb{N}$, polynomy

$$x-\alpha_1,\dots,x-\alpha_k,\quad x^2+p_1x+q_1,\dots,x^2+p_lx+q_l$$

jsou reálné a navzájem různé a platí

$$p_i^2-4q_i<0,\quad i=1,\dots,l.$$

Poznámka Činitelé v rozkladu (4) jsou opět jednoznačně $\boxed{\text{až na pořadí}}$ určeny.

Rozklad racionální fce na součet parciálních zlomků

$R(x):=\frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q reálné polynomy,
Q není identicky roven 0

racionální fce

Cíl ... nalézt $\int R(x)\,dx$

K tomu účelu rozložíme fci R na součet jednodušších výrazů, které umíme integrovat.

1. krok $\quad R(x):=\frac{P(x)}{Q(x)}=P_1(x)+\frac{P_2(x)}{Q(x)}$,

$\boxed{\text{pokud st } P\geq \text{st } Q}$

kde P_1, P_2 jsou polynomy a P_2 je buďto nulový nebo st $P_2<$ st Q.

---

*) Může být $k=0$ (tj. činitelé $x-\alpha_j$ mohou chybět) a podobně může být $l=0$. Platí však $r_1+\dots+r_k+2s_1+\dots+2s_l=n$. Je tedy jedno, zda v (4) píšeme $\forall x\in\mathbb{C}$ nebo $\forall x\in\mathbb{R}$.

Věta 33 (o dělení dvou polynomů). Nechť P, Q jsou polynomy, $\operatorname{st} Q = n \in \mathbb{N}_0$. Pak existuje právě jeden polynom P_1 tak, že polynom

$$(5) \qquad P(x) - P_1(x)\,Q(x) =: P_2(x)$$

je buďto nulový, nebo $\operatorname{st} P_2 < \operatorname{st} Q$.

Důkaz. Nechť $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$, $a_0 \neq 0$, $P(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{m-k}$.

Nechť $m \geq n$ (jinak přidám do polynomu P přidám několik členů s nulovými koeficienty. Poznamenejme, že musí platit, že $\operatorname{st} P_1 \leq m-n$ (jinak by $\operatorname{st} P_1Q = \operatorname{st} P_1 + \operatorname{st} Q > m-n+n = m$

$\Rightarrow \operatorname{st} P_2 \overset{(5)}{=} \operatorname{st}(P - P_1Q) > m \geq n$, tj. $\operatorname{st} P_2 > n$ ... to nechceme).

$\operatorname{st} P_1Q > m$

P má stupeň nejvýše m

Tedy $P_1(x) = \sum_{j=0}^{m-n} c_j x^{m-n-j}$.

Pak (5) $\Leftrightarrow$

$$\sum_{k=0}^{m} b_k x^{m-k} - \left(\sum_{j=0}^{m-n} c_j x^{m-n-j}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}\right) = P_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

Chceme, aby $\operatorname{st} P_2 < n$, tedy musí platit, že v P_2 jsou koeficienty u mocnin $x^n, x^{n+1}, \dots, x^m$ rovny 0. Odtud plyne, že musí platit

$$\begin{aligned}
a_0 c_0 &= b_0 \quad \dots \text{ koef. u } x^m \text{ v polynomu } P, \\
a_0 c_1 + a_1 c_0 &= b_1 \quad \dots \text{ koef. u } x^{m-1} \text{ —"—}, \\
&\;\vdots \\
a_0 c_{m-n} + a_1 c_{m-n-1} + \dots a_{m-n} c_0 &= b_{m-n} \quad \dots \text{ koef. u } x^n \text{ —"—}.
\end{aligned}$$

Tyto rovnice mají jednoznačně určené řešení:

z 1. rovnice vypočtu c_0 (neb $a_0 \neq 0$),

z 2. rovnice vypočtu c_1 (—"—),

⋮

z poslední rovnice pak vypočtu c_{m-n} (neb $a_0 \neq 0$). □

Poznámka. Z (5) plyne

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}, \quad \operatorname{st} P_2 < \operatorname{st} Q, \quad \forall x \in \mathbb{C}, Q(x) \neq 0.$$

2. krok

Věta 34 (rozklad na parciální zlomky). Nechť P, Q jsou reálné polynomy, $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a nechť

$$Q(x) = a_0 (x-\alpha_1)^{r_1} \dots (x-\alpha_k)^{r_k} (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \dots (x^2+p_l x+q_l)^{s_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 32. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1^1, \dots, A_{r_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{r_k}^k$, $M_1^1, N_1^1, \dots, M_{s_1}^1, N_{s_1}^1, \dots, M_1^l, N_1^l, \dots, M_{s_l}^l, N_{s_l}^l$ tak, že pro všechna $x \in \mathbb{C}$, pro která $Q(x) \neq 0$, platí *)

$$(6)\quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{(x-\alpha_1)^{r_1}} + \frac{A_2^1}{(x-\alpha_1)^{r_1-1}} + \dots + \frac{A_{r_1}^1}{x-\alpha_1} + \dots$$
$$\vdots$$
$$+ \frac{A_1^k}{(x-\alpha_k)^{r_k}} + \frac{A_2^k}{(x-\alpha_k)^{r_k-1}} + \dots + \frac{A_{r_k}^k}{x-\alpha_k} +$$
$$+ \frac{M_1^1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \frac{M_2^1x+N_2^1}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1-1}} + \dots + \frac{M_{s_1}^1x+N_{s_1}^1}{x^2+p_1x+q_1} + \dots$$
$$\vdots$$
$$+ \frac{M_1^lx+N_1^l}{(x^2+p_lx+q_l)^{s_l}} + \frac{M_2^lx+N_2^l}{(x^2+p_lx+q_l)^{s_l-1}} + \dots + \frac{M_{s_l}^lx+N_{s_l}^l}{x^2+p_lx+q_l}.$$

Důkaz. Viz Jarník, Integrální počet I, str. 93.
Pokud mi zbyde čas, provedu důkaz na konci semestru.

3. krok ... integrace parciálních zlomků

Př. Napište racionální fci $R(x) = \dfrac{x^5}{x^4-x^3-x+1}$ jako součet polynomu a parciálních zlomků.

Řešení.

$$\begin{array}{l} x^5 : (x^4-x^3-x+1) = x+1 \\ \underline{-x^5 \mp x^4 \mp x^2 \pm x} \\ \quad x^4 + x^2 - x \\ \quad \underline{-x^4 \mp x^3 \mp x \pm 1} \\ \quad x^3 + x^2 - 1 \end{array}$$

Tedy $R(x) = x+1 + \dfrac{x^3+x^2-1}{x^4-x^3-x+1}$.

$\forall x \in \mathbb{C}$, pro které $\underbrace{x^4-x^3-x+1}_{=:Q(x)} \neq 0$.

---

*) Tím spíše (6) platí $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$.

Dále platí $Q(1) = 0$. Tedy polynom Q je dělitelný (beze zbytku) polynomem $(x-1)$:

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - x^3 - x + 1) : (x-1) = x^3 - 1 \\
\underline{-x^4 \mp x^3 } \\
 -x + 1 \\
 \underline{\mp x \pm 1} \\
 0
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad Q(x) = (x-1)(x^3-1) = (x-1)\underbrace{(x-1)(x^2+x+1)}_{=x^3-1} =$$

$$= (x-1)^2(x^2+x+1) \quad \forall x \in \mathbb{C}. \qquad (\text{Přitom } x^2+x+1 \text{ nemá reálný kořen.})$$

Proto (dle Věty 34) $\exists A, B, C, D \in \mathbb{R}$, tak, že

$$\frac{x^3+x^2-1}{x^4-x^3-x+1} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} \Longrightarrow$$

(1) $\quad x^3+x^2-1 = A(x^2+x+1) + B(x-1)(x^2+x+1) + (Cx+D)(x-1)^2$

$\forall x \in \mathbb{C}$, taková, že $Q(x) \neq 0$

$\Rightarrow \ \forall x \in \mathbb{C}$ (podle Důsledku 4 Věty 29)

Je třeba určit čísla $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

1) Mohu porovnat koeficienty u příslušných mocnin čísla x.
Po úpravě pravé strany v (1) dostanu:

$$x^3 + x^2 - 1 = A(x^2+x+1) + B(x^3-1) + C(x^3-2x^2+x) + D(x^2-2x+1)$$

koef. u x^3: $\quad 1 = B + C$

koef. u x^2: $\quad 1 = A - 2C + D$

koef. u x^1: $\quad 0 = A + C - 2D$

koef. u x^0: $\quad -1 = A - B + D$

Řešením této soustavy (např. Gaussovou eliminační metodou) dostaneme $\underline{\underline{D=0}}$, $\underline{\underline{C = -\frac{1}{3}}}$, $\underline{\underline{B = \frac{4}{3}}}$, $\underline{\underline{A = \frac{1}{3}}}$.

Tedy

$$\frac{x^3-x^2-1}{x^4-x^3-x+1} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} - \frac{x}{x^2+x+1}\right]$$

$\forall x \in \mathbb{C}$, $Q(x) \neq 0$.

$$\Rightarrow \ R(x) = x + 1 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} - \frac{x}{x^2+x+1}\right].$$

Rozklad na parciální zlomky pokračuje:

Dosadíme do (1) kořen $x=1$ polynomu Q a dostaneme

$$\underbrace{1+1-1}_{1} = A\underbrace{(1+1+1)}_{3} \Rightarrow \underline{\underline{A=\frac{1}{3}}}$$

Číslo 1 je dvojnásobným kořenem polynomu Q $\Rightarrow$ toto číslo je i kořenem derivace polynomu Q.

Zderivuji obě strany v (1) a dosadím $x=1$, dostanu

$$(3x^2+2x)\Big|_{x=1} = \Big[A(2x+1) + B(x^2+x+1) + B(x-1)(2x+1) + C(x-1)^2 + (Cx+D)\,2(x-1)\Big]\Big|_{x=1}$$

tj. $5 = A\cdot 3 + B\cdot 3 \Rightarrow \underline{\underline{B}} = \frac{5-3A}{3} = \frac{5-1}{3} = \frac{4}{3}$

Teď porovnám koeficienty u x^0 a pak u x^3 v (1) a dostanu:

koef. u x^0: $-1 = A - B + D \Rightarrow D = -1 - A + B = -1 - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 0$

tj. $\underline{D=0}$

koef. u x^3: $1 = B + C \Rightarrow C = 1 - B = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$,

tj. $\underline{\underline{C = -\frac{1}{3}}}$.

12. přednáška MA 2, LS, šk. r. 2015/16, 30. 3. 2016

Některé speciální substituce

$P(x,y) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} a_{mn} x^m y^n$ ... polynom dvou proměnných, zde $a_{mn} \in \mathbb{R}$, $m = 0, \dots, M$, $n = 0, \dots, N$.

$R(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ .... racionální fce proměnných x, y, zde $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ jsou polynomy dvou proměnných, $Q \not\equiv 0$.

Př.

$$R(x,y) = \frac{x^2 y + y + 1}{x^2 + y^3}$$

Poznámka. (i) Jsou-li $P(x,y)$, $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ polynomy dvou proměnných, pak složená fce $P(P_1(x,y), P_2(x,y))$ je polynom dvou proměnných.

(ii) Je-li $R(x)$ rac. fce, pak $R'(x)$ je rac. fce.

(iii) Jsou-li $R(x,y)$, $R_1(x,y)$, $R_2(x,y)$ rac. fce dvou proměnných, pak složená fce $R(R_1(x,y), R_2(x,y))$ je rac. fce dvou proměnných.

I. $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $ad - bc \neq 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *)

(např. $R(x,y) = \dfrac{y}{x}$

$$R\left(x, \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) = \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\ )$$

Substituce (1) $\displaystyle\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ (použijeme 2. substituční metodu)

---

*) Fce $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, kde $ad - bc \neq 0$, se nazývá lineární lomená, přitom podmínka $ad - bc \neq 0$ zaručuje, že polynomy $ax+b$, $cx+d$ jsou nesoudělné, tj. nemají společný kořen.

formální výpočet

$$\Rightarrow \quad \frac{ax+b}{cx+d} = t^n \quad \Rightarrow \quad ax+b = t^n(cx+d) \Rightarrow x(a-ct^n) = t^n d - b \Rightarrow$$

(2) $$x = \frac{t^n d - b}{a - ct^n} = \varphi(t) \quad \ldots \text{ rac. fce}$$

(3) $$\varphi'(t) = \frac{n t^{n-1} d\,(a-ct^n) - (t^n d - b)(-cnt^{n-1})}{(a-ct^n)^2} =$$

$$= n t^{n-1} \frac{d(a-ct^n) + c(t^n d - b)}{(a-ct^n)^2} =$$

$$= n t^{n-1} \frac{ad-bc}{(a-ct^n)^2} \quad \ldots \text{ rac. fce}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int \underbrace{R(\varphi(t), t)\cdot \varphi'(t)}_{\text{rac. fce}}\, dt$$

Nebudeme zde diskutovat, na kterých intervalech poslední primitivní fce existuje. Substituci (2) lze ovšem použít jen v intervalech, které neobsahují bod $t=0$ a žádný kořen rovnice $a-ct^n=0$ – cf. (3). Vždy je nutno ověřit předpoklady 2. substituční metody. Ukážeme si to na následujícím příkladě.

Př. Určete $\int f(x)\,dx$, kde $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

Řešení. Platí, že $f(x) = R\left(x, \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$, kde $R(x,y) = \frac{y}{x}$. Dále platí $D(f) = (-\infty,-1) \cup \langle 1,+\infty)$. Existují tedy 2 maximální otevřené intervaly, na nichž je f definována: $(-\infty,-1)$ a $(1,+\infty)$. Funkce f je na těchto intervalech spojitá $\Rightarrow$ má na těchto intervalech primitivní fci. Použijeme substituci (1), kde $n=2$, $a=1$, $b=-1$, $c=1$, $d=1$. Poznamenejme, že v našem případě platí $ad-bc = 1-(-1) = 2 \neq 0$. Dle (2) máme

(4) $$x = \varphi(t) = \frac{t^2+1}{1-t^2} \Rightarrow D(\varphi) = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\},$$ φ je spojitá v $D(\varphi)$, φ je sudá.

Dále platí (cf. (3))

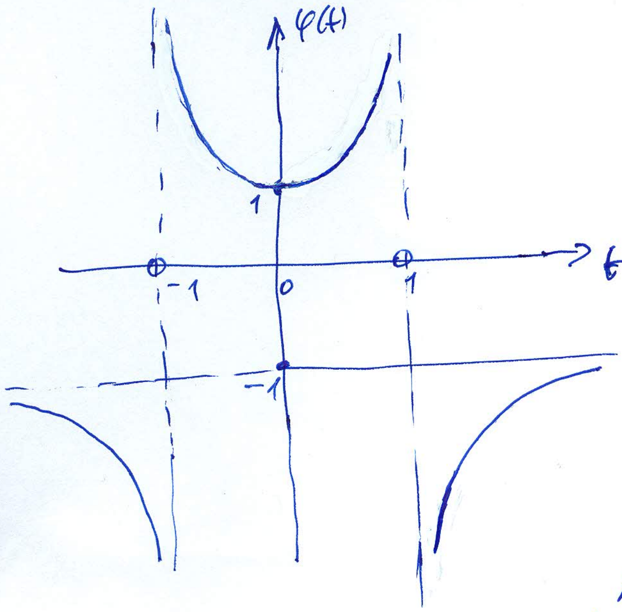
$$\varphi'(t) = 2t \cdot \frac{2}{(1-t^2)^2} = \frac{4t}{(1-t^2)^2} \quad \forall\, t \in D(\varphi) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \varphi'(t) \in \mathbb{R} \quad \forall\, t \in D(\varphi)$,

$\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in D(\varphi) \setminus \{0\}$,

$\Rightarrow \quad \varphi$ roste v $\langle 0, 1)$ a v $(1, +\infty)$.

↑ (Věta 95, MA-1 22. přednáška)



Přitom platí: $\varphi(0) = 1$, $\lim\limits_{t \to 1-} \varphi(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to 1+} \varphi(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = -1$.

$\Rightarrow \quad \varphi(\langle 0, 1)) = \langle 1, +\infty)$,

$\varphi((1, +\infty)) = (-\infty, -1)$.

Tedy na každém z intervalů $\langle 0, 1)$ a $(1, +\infty)$ lze aplikovat 2. substituční metodu a hledáme pak na těchto intervalech primitivní fci k fci

$$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = R(\varphi(t), t)\, \varphi'(t) = \frac{t}{\varphi(t)}\, \varphi'(t) = \frac{t}{\frac{t^2+1}{1-t^2}} \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2} = \underbrace{\frac{4t^2}{(t^2+1)(1-t^2)}}_{\text{rac. fce}} =$$

$$= \frac{1}{t+1} + \frac{1}{1-t} - \frac{2}{1+t^2} = \Big(\underbrace{\ln|t+1| - \ln|1-t| - 2 \operatorname{arctg} t}_{=: G(t)}\Big)' \qquad \forall t \in (0,1),\ \forall t \in (1, +\infty).$$

↑ rozklad na parc. zlomky

Pak dle 2. substituční metody platí

$G(\varphi^{-1}(x)) \in \int f(x)\,dx$ na $(-\infty, -1)$ i na $(1, +\infty)$.

Položíme $\varphi^{-1}(x) = t$, tj. $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ (cf. (2) a (1)), platí v $(-\infty, -1)$ i v $(1, +\infty)$, že

$$\ln\left|1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| - \ln\left|1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \in \int f(x)\,dx.$$

II. $\int \underbrace{R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})}_{f(x)}\,dx$, $R(x,y)$ rac. fce
$a, b, c \in \mathbb{R}$

(i) Je-li $\underline{a=0}$ $\Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{bx+c}$ ... to umíme řešit – viz I.

(ii) Je-li $\underline{a>0}$ a $D := b^2-4ac = 0$, pak
$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)^2}$ (kde α je (reálný!) kořen polynomu ax^2+bx+c)

$$= \sqrt{a}\,|x-\alpha| = \begin{cases} \sqrt{a}(x-\alpha) & \text{v intervalu } (\alpha, +\infty) \\ \sqrt{a}(\alpha-x) & \text{v } -\text{"}- \ (-\infty, \alpha). \end{cases}$$

V obou těchto intervalech je pak f racionální fce (a už víme, jak ji integrovat).

Je-li $\underline{a>0 \text{ a } D\neq 0}$, pak lze použít <u>Eulerovu substituci</u>

$$\underline{\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t}$$

$$\Rightarrow \cancel{ax^2}+bx+c = \cancel{ax^2}+2tx\sqrt{a}+t^2$$

$$\Rightarrow x(b-2t\sqrt{a}) = t^2-c$$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} = \varphi(t) \ \dots \ \underline{\text{rac. fce}}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2t(b-2t\sqrt{a})-(t^2-c)(-2\sqrt{a})}{(b-2t\sqrt{a})^2}\,dt =$$

$$= \frac{2tb-4t^2\sqrt{a}+2t^2\sqrt{a}-2c\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}\,dt =$$

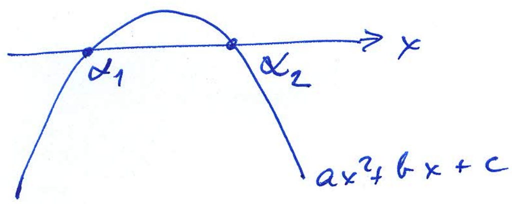
$$= \underbrace{2\cdot\frac{-t^2\sqrt{a}+bt-c\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}}_{\uparrow \text{rac. fce } r(t)}\,dt$$

Tedy x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ *) jsou rac. fce a dx má tvar $r(t)\,dt$. Daný integrál je převeden na integrál z racionální fce.

---

*) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x+t = \sqrt{a}\cdot\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}+t$ = rac. fce

(iii) $a < 0$, $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, kde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 < \alpha_2$. *)



Pro $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} = \sqrt{a(x-\alpha_1)^2 \frac{x-\alpha_2}{x-\alpha_1}} =$$

$$= (x-\alpha_1)\sqrt{-a}\sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x-\alpha_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx = \int R\left(x, \sqrt{-a}(x-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2-x}{x-\alpha_1}}\right)dx$$

$$= \int \tilde{R}\left(x, \sqrt{\frac{\alpha_2-x}{x-\alpha_1}}\right)dx \text{ ... integrál z případu I.}$$

Poznámka. Je-li $c > 0$, lze použít další Eulerovu substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}.$$

---

*) Pokud $a < 0$ a rovnice $ax^2+bx+c=0$ nemá 2 různé reálné kořeny, pak fce $\sqrt{ax^2+bx+c}$ není definována na žádném otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

III. $\int \underbrace{R(\sin x, \cos x)}_{f(x)}\,dx$, kde $R(x,y)$ je rac. fce

1) **Substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$**, $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi \quad (*)$$

Rovnice $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ má v intervalu $I_k = ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$. řešení

$$x = \varphi_k(t) = 2 \operatorname{arctg} t + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2*)$$

(neboť $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\underbrace{\left(\frac{x}{2} - k\pi\right)}_{\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ dle } (*)} \Rightarrow \frac{x}{2} - k\pi = \operatorname{arctg} t \Rightarrow (2*)$)

./.

Tedy $\varphi_k'(t) = \frac{2}{1+t^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Dále platí

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 1 \quad /\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \boxed{\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{1+t^2}}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \left(\cos^2\frac{x}{2}\right)\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int f(\varphi_k(t))\,\varphi_k'(t)\,dt = \int \underbrace{R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}}_{\text{rac. fce } r(t)}\,dt$$

---

2) Pokud: $R(x,-y) = -R(x,y)$ *), lze použít **substituci $t = \sin x$**

$R(-x,y) = -R(x,y)$, lze použít **substituci $t = \cos x$**

$R(-x,-y) = R(x,y)$, lze použít **substituci $t = \operatorname{tg} x$**

Poznámka. Substituce z bodu 2 bývají obvykle výhodnější než substituce z bodu 1).

---

*) tzn. že fce R je lichá v 2. proměnné.

IV. $\int R(e^{\alpha x})\,dx$, α , $R(t)$ = rac. fce proměnné t

substituce $t = e^{\alpha x}$ $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{\alpha}\ln t$, $dx = \frac{1}{\alpha}\frac{dt}{t}$

$\Rightarrow$ $\int R(e^{\alpha x})\,dx = \frac{1}{\alpha}\int R(t)\frac{dt}{t}$ ... integrál z racionální fce

---

V. $\int R(\ln x)\frac{dx}{x}$, $R(t)$ ... rac. fce

substituce

$t = \ln x$ $\Rightarrow$ $dt = \frac{dx}{x}$

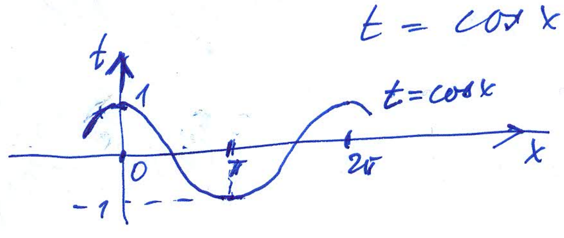
$\int R(\ln x)\frac{dx}{x} = \int R(t)\,dt$ ... integrál z rac. fce.

Př. Určete $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$.

Řešení. Buď $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. Pak $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$, kde $k\in\mathbb{Z}$, a f je spojitá v $D(f)$. Maximální otevřené intervaly, které jsou částí $D(f)$ mají tvar $I_k := (k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. Protože $f\in C(I_k)$, $k\in\mathbb{Z}$, tak f má na I_k, $k\in\mathbb{Z}$, primitivní fci.

Protože $\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int R(\sin x,\cos x)\,dx$, kde $R(u,v) = \frac{1}{u}$, a platí $R(-u,v) = \frac{1}{-u} = -R(u,v)$, lze použít substituci

$$t = \cos x =: \varphi(x), \quad x\in I_k.$$



Platí $\varphi(I_k) = \cos I_k = (-1,1)$, $\forall k\in\mathbb{Z}$,

$\varphi'(x) = -\sin x$ $\forall x\in I_k$

$\Rightarrow$ $\varphi'(x)\in\mathbb{R}$ $\forall x\in I_k$.

Dále máme

(1) $\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\sin x}\,dx = -\int \frac{1}{\sin^2 x}(-\sin x)\,dx = -\int \frac{1}{1-\cos^2 x}(\cos x)'\,dx$

$\forall x\in I_k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Podle 1. substituční metody platí

(2) $\int \frac{1}{1-\cos^2 x}(\cos x)'\,dx = G(\cos x) + C$,

kde $G \in \int \frac{1}{1-t^2}\,dt$ na $(-1,1)$.

Přitom

$$\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|1+t| - \ln|1-t|\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(1+t) - \ln(1-t)\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+t}{1-t} + C \qquad \forall x \in (-1,1).$$

Odtud máme

$$G(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} \qquad \forall t \in (-1,1).$$

Z (2) a (1) pak plyne

$$\underline{\int \frac{1}{\sin x}\,dx} = -G(\cos x) + C = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + C$$

$$\underline{= \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C \quad \text{na } I_k,\ k\in\mathbb{Z}.}$$

<u>Poznámka</u>: Jiné řešení – viz Jarník, Integrální počet I, str. 67.

Stejnoměrná spojitost fce

Buď $I \subset \mathbb{R}$ nedegenerovaný interval, f reálná fce definovaná v I. Víme: Fce f je spojitá v $I \iff$

(*) $\forall x \in I \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in I : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

$\delta = \delta(x, \varepsilon)$

Důležitý je případ, kdy δ nezávisí na x, tj: $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Definice. Buď $I \subset \mathbb{R}$ nedegenerovaný interval, f reálná fce definovaná v I. Řekneme, že fce f je stejnoměrně spojitá v I, jestliže

(**) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in I \; \forall y \in I : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

$\delta = \delta(\varepsilon)$

Poznámka. Je jasné, že stejnoměrně spojitá fce v intervalu I je spojitá v I. Obrácená implikace obecně neplatí.

Příklad. Fce $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I := (0,1)$, je spojitá v I.
Fce f však není stejnoměrně spojitá v I, neboť výrok (**) neplatí. Ukážeme, že (**) neplatí např. pro $\varepsilon = 1$:
Buď $\delta > 0$ libovolné. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby
$x = x_n := \frac{1}{n} < \min(1, \delta)$ a položme $y = y_n := \frac{1}{n+1}$.
Pak $x, y \in (0,1)$ a platí $|x-y| = x-y = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \delta$.
Ovšem $|f(x)-f(y)| = |n-(n+1)| = 1 = \varepsilon$. *)
Tedy k číslu $\varepsilon > 0$ neexistuje $\delta > 0$ tak, aby platil výrok (**).

Věta 3.5 (postačující podmínka pro stejnoměrnou spojitost). Buď $\langle a,b \rangle \subset \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C(\langle a,b \rangle)$. Pak f je stejnoměrně spojitá na $\langle a,b \rangle$.

Důkaz. Sporem. Předpokládejme, že f není stejnoměrně spojitá na $\langle a,b \rangle$. Pak
$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x \in \langle a,b \rangle, \exists y \in \langle a,b \rangle, |x-y| < \delta : |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$.
Volme $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak tedy

(3*) $\exists x_n \in \langle a,b \rangle \; \exists y_n \in \langle a,b \rangle, |x_n - y_n| < \frac{1}{n} : |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty ex. $\{x_{n_k}\}_k$ taková, že

---

*) Kdybychom položili $y = \frac{1}{n+k}$, kde $k \in \mathbb{N}$, pak by $x, y \in (0,1)$, $|x-y| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n} < \delta$ a přitom $|f(x)-f(y)| = |n-(n+k)| = k$, tzn. že $|f(x)-f(y)|$ může být libovolně velká, pokud $k \in \mathbb{N}$ je dostatečně velké.

$x_{n_k} \to x \in \langle a, b\rangle$.

Protože

$$|y_{n_k} - x| \leq \underbrace{|y_{n_k} - x_{n_k}|}_{< \frac{1}{n_k}} + |x_{n_k} - x| \to 0 \quad \text{pro } k \to \infty,$$

platí $y_{n_k} \to x$ pro $k \to \infty$.

Ze spojitosti fce f na $\langle a, b\rangle$ (a Heineho věty) plyne, že

$$f(x_{n_k}) \to f(x) \quad \text{pro } k \to \infty,$$

$$f(y_{n_k}) \to f(x) \quad \text{pro } k \to \infty.$$

Pak ale platí

$$0 < \varepsilon \underset{(3*)}{\leq} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq \underbrace{|f(x_{n_k}) - f(x)|}_{\to 0} + \underbrace{|f(x) - f(y_{n_k})|}_{\to 0} \to 0 \quad \text{pro } k \to \infty$$

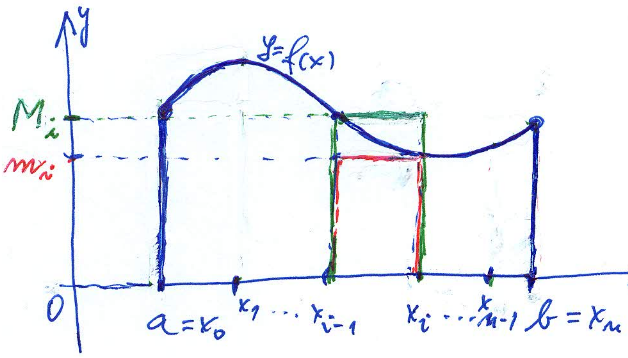
– spor.

Tedy f je stejnoměrně spojitá na $\langle a, b\rangle$. $\square$

Riemannův integrál

Motivace Nechť $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$, $a<b$, $f \in C(\langle a,b\rangle)$, $f>0$.

Jak vypočítat velikost plochy P „pod grafem fce f"?



Definice. Konečnou posloupnost bodů $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$ nazveme **dělením intervalu** $\langle a,b\rangle$, jestliže

$$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b.$$

Body $x_0,\dots,x_n$ nazveme **dělícími body**. **Normu dělení D** definujeme předpisem

$$\|D\|:=\max\{x_i-x_{i-1};\ i=1,\dots,n\}.$$

Položíme

(1) $$m_i:=\inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x), \quad M_i:=\sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x), \quad i=1,\dots,n,$$

a dělení D přiřadíme čísla

(2) $$s(D)=s(f,D):=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$$ ... dolní součet příslušný dělení D

(3) $$S(D)=S(f,D):=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$ ... horní součet příslušný dělení D

Je jasné, že

(4) $$s(D)\le S(D) \quad \forall \text{ dělení } D$$

Je naděje, že $s(D)$ a $S(D)$ budou konvergovat ~~k~~ k jistému číslu $A\in\mathbb{R}$, pokud $\|D\|\to 0$. Toto číslo A pak nazveme obsahem plochy P pod grafem fce f. Ovšem fakt, že limita A existuje, bude třeba dokázat.

V dalším budeme studovat součty (1) a (2) za obecnějších předpokladů, vynecháme zbytečný předpoklad, že $f > 0$ na $\langle a,b\rangle$ a místo $f \in C(\langle a,b\rangle)$ budeme předpokládat, že $f \in B(\langle a,b\rangle)$ (tj., že f je omezená na $\langle a,b\rangle$).
(bounded)

Definice. Nechť D a D' jsou dělení intervalu $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že dělení D' je zjemněním dělení D, jestliže každý bod dělení D je dělicím bodem dělení D'.

Lemma 36 (o dolních a horních součtech).
Nechť $f \in B(\langle a,b\rangle)$.

(i) Jestliže D je dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ a D' je jeho zjemnění, pak

(5) $$s(D) \le s(D') \le S(D') \le S(D).$$

(ii) Jestliže D_1 a D_2 jsou dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, pak

(6) $$s(D_1) \le S(D_2).$$

Důkaz. (i) Buď

(7) $D: \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$

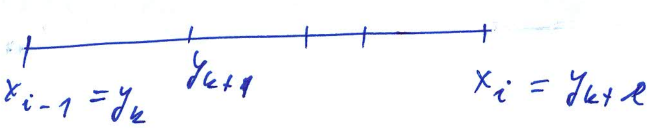
dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ a

$D': \quad a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b$

jeho zjemnění. Pak

$\forall i \in \{1,\dots,n\} \;\; \exists\, k = k(i) \in \mathbb{N},\ \exists\, l = l(i) \in \mathbb{N}:$

$$x_{i-1} = y_k < y_{k+1} < \dots < y_{k+l} = x_i .$$



Nechť čísla m_i, M_i, $i=1,\dots,n$, jsou čísla z (1). Položme

$$\lambda_j := \inf_{y \in \langle y_{j-1}, y_j\rangle} f(y), \quad \Lambda_j := \sup_{y \in \langle y_{j-1}, y_j\rangle} f(y), \quad j = 1,\dots,m.$$

Buď $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak

$$x_i - x_{i-1} = \sum_{j=1}^{l} (y_{k+j} - y_{k+j-1})$$

a

$$m_i \le \lambda_{k+j} \le \Lambda_{k+j} \le M_i$$

$\forall\ j \in \{1, \dots, l\}$, a tedy

$$\begin{aligned} m_i (x_i - x_{i-1}) &\le \sum_{j=1}^{l} \lambda_{k+j} (y_{k+j} - y_{k+j-1}) \\ &\le \sum_{j=1}^{l} \Lambda_{k+j} (y_{k+j} - y_{k+j-1}) \\ &\le M_i (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností přes $i \in \{1, \dots, n\}$, pak dostaneme (5).

(ii) Každé dvě dělení D_1 a D_2 intervalu $\langle a, b \rangle$ mají společné zjemnění D' (D' stačí určit body, které patří do D_1 i do D_2). Pak z (5) plyne

$$s(D_1) \le s(D') \le S(D') \le S(D_2),$$

a tedy platí (6). □

Důsledek 1. Jestliže $K_1 \le f(x) \le K_2$ $\forall x \in \langle a, b \rangle$, kde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$, pak $\forall$ dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ platí

(8) $$K_1 (b - a) \le s(D) \le S(D) \le K_2 (b - a).$$

Důkaz. Buď D dělení (7) a m_i, M_i $(i = 1, \dots, n)$ čísla z (1). Nechť D_0 je určené body a, b. Pak D je zjemněním D_0, a proto dle (5) platí

$$K_1 (b - a) \le s(D_0) \le s(D) \le S(D) \le S(D_0) \le K_2 (b - a).$$ □

Důsledek 2. Buď $\tilde{D}$ dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak (z Lemmatu 36 (ii) plyne):

a) Číslo $S(\tilde{D})$ je horním odhadem množiny $\{ s(D);\ D$ je dělení intervalu $\langle a, b \rangle \}$.

b) Číslo $s(\tilde{D})$ je dolním odhadem množiny $\{ S(D);\ D$ je dělení intervalu $\langle a, b \rangle \}$.

Definice (Darbouxova definice Riemannova integrálu).

Buď $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$, $a<b$, $f \in B(\langle a,b\rangle)$. Pak definujeme:

dolní Riemannův integrál $\underline{\int_a^b} f := \sup\{s(f,D),\ D \text{ dělení } \langle a,b\rangle\}$,

horní Riemannův integrál $\overline{\int_a^b} f := \inf\{S(f,D),\ D \text{ dělení } \langle a,b\rangle\}$.

Řekneme, že fce f má Riemannův integrál na $\langle a,b\rangle$ (píšeme $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$), jestliže $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ a definujeme

$$\int_a^b f = (R)\int_a^b f := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Poznámka. Pokud chceme zdůraznit proměnnou, pak místo symbolu $\int_a^b f$ často píšeme $\int_a^b f(x)\,dx$ (nebo např. $\int_a^b f(t)\,dt$ atd.)

Důsledek 3. Platí $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f\,dx \quad \forall f \in B(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz. Dle (6) máme

$$s(D_1) \le S(D_2) \quad \forall \text{ dělení } D_1 \text{ a } D_2 \text{ intervalu } \langle a,b\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f = \sup_{D_1} s(D_1) \le S(D_2) \quad \forall D_2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f \le \inf_{D_2} S(D_2) = \overline{\int_a^b} f. \quad \square$$

Důsledek 4. $\forall f \in B(\langle a,b\rangle)$ platí

(9) $$(b-a) \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le (b-a) \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x).$$

Důkaz. (9) plyne z Důsledku 3 a z triviálních odhadů

$$(b-a)\inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = s(D_0) \le \underline{\int_a^b} f, \quad \overline{\int_a^b} f \le S(D_0) = (b-a)\sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x),$$

kde D_0 je dělení $\langle a,b\rangle$ určené body a, b.

Př. 1. Buď $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$, $a<b$, $f(x) = k \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$.

Pak $s(f,D) = k(b-a) = S(f,D)$ $\forall$ dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f = k(b-a).$$

Př 2. Buď $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$, $a<b$, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\cap\langle a,b\rangle\\ 0, & x\in\langle a,b\rangle\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

Dirichletova fce

Pak $\forall$ dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ platí

$$s(f,D)=0\ ,\qquad S(f,D)=b-a>0$$

$$\Rightarrow\ \underline{\int_a^b} f = 0\ ,\qquad \overline{\int_a^b} f = b-a>0$$

$$\Rightarrow\ \int_a^b f \ \text{neexistuje}$$

Věta 37 (vztah spojitosti a riemannovské integrovatelnosti).

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz. Dle Věty 35 víme, že f je stejnoměrně spojitá na $\langle a,b\rangle$, tj.

(1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \langle a,b\rangle \ \forall y \in \langle a,b\rangle, \ |x-y| < \delta : \ |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Buď $\varepsilon > 0$. Dle (1) ex. $\delta > 0$ tak, že platí

(2) $x, y \in \langle a,b\rangle, \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Buď D dělení $\langle a,b\rangle$ s normou $\|D\| < \delta$,

$D: \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Protože spojitá fce nabývá na uzavřeném a omezeném intervalu suprema a infima, existují $y_i, z_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, \dots, n$, tak, že

$$M_i = \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) = f(y_i), \quad m_i = \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) = f(z_i).$$

Pak platí

$$0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le S(D) - s(D) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{\big(f(y_i) - f(z_i)\big)}_{< \varepsilon \text{ dle (2), neboť } |y_i - z_i| < x_i - x_{i-1} < \|D\| < \delta} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon (b-a),$$

tj. $\quad 0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon(b-a)$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné,

je $\quad \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \quad \Rightarrow f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. $\square$

Věta 38 (vztah monotonie a riemannovské integrovatelnosti).

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a f je monotónní fce na $\langle a,b\rangle$. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz. 1) Předpokládejme, že f je neklesající na $\langle a,b\rangle$. Buď $\delta > 0$. Nechť D je dělení intervalu $\langle a,b\rangle$,

$D: \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad \|D\| < \delta$

Pak
$$0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le S(D) - s(D) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

(neb $f \nearrow$)

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{< \delta} < \delta \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)}_{\overset{\shortparallel}{f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)}}$$

$$= \delta \left(f(b) - f(a) \right),$$

tj. $$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \delta \left(f(b) - f(a) \right).$$

Protože $\delta > 0$ bylo libovolné, platí $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$

$\Rightarrow \quad f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$. $\square$

Věta 39 (kritérium existence $(R)\int_a^b f$). Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a $f \in B(\langle a, b \rangle)$. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ právě tehdy, jestliže platí

(1) $\quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists D$ dělení $\langle a, b \rangle$: $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$.

Důkaz. (i) „$\Rightarrow$": Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$, $I := \int_a^b f$, $\varepsilon > 0$.

Pak $I = \underline{\int_a^b} f := \sup_D s(f, D)$, a tedy

(2) $\quad \exists D_1$ dělení $\langle a, b \rangle$: $I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, D_1)$.

Dále $I = \overline{\int_a^b} f := \inf_D S(f, D)$, a tedy

(3) $\quad \exists D_2$ dělení $\langle a, b \rangle$: $I + \frac{\varepsilon}{2} > S(f, D_2)$

Buď D zjemnění D_1 a D_2. Pak

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, D_1) \underset{\text{Lemma 36 (i)}}{\leq} s(f, D) \leq S(f, D) \underset{\text{Lemma 36 (i)}}{\leq} S(f, D_2) < I + \frac{\varepsilon}{2} ;$$

$\Rightarrow$ Interval $\left(I - \frac{\varepsilon}{2}, I + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ obsahuje čísla $s(f, D)$, $S(f, D)$, přičemž délka tohoto intervalu je ε. Tedy vzdálenost $S(f, D)$ od $s(f, D)$ je menší než ε, tj.

$$S(f, D) - s(f, D) = |S(f, D) - s(f, D)| < \varepsilon. \quad \square$$

(ii) "$\Leftarrow$": Nechť platí (1). Buď $\varepsilon > 0$. Dle (1) ex. dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ tak, že

$$S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon .$$

Pak

$$0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon .$$

Protože ε je libovolné kladné číslo, platí $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, tj. $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. $\square$

Věta 40 (o aproximaci $\overline{\int_a^b} f$ a $\underline{\int_a^b} f$).

Buď $-\infty < a < b < +\infty$ a $f \in B(\langle a,b\rangle)$. Pak

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall D, \ \|D\| < \delta :$$

(1) $\quad \overline{\int_a^b} f \le S(f,D) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon ,$

(2) $\quad \underline{\int_a^b} f - \varepsilon < s(f,D) \le \underline{\int_a^b} f .$

Důkar. Dokážeme (1), důkaz (2) je obdobný. ./.

Buď $\varepsilon > 0$. Z definice $\overline{\int_a^b} f := \inf_D S(f,D)$ ihned plyne, že

(3) $\quad \exists\, D_1$ dělení $\langle a,b\rangle$: $S(f,D_1) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$,

D_1: $\quad a = y_0 < y_1 < \dots < y_p = b .$

Fce f je omezená na $\langle a,b\rangle \Rightarrow \exists K \in (0,+\infty): |f(x)| \le K \ \forall x \in \langle a,b\rangle$.

$$\delta := \frac{\varepsilon}{4Kp} .$$

Buď

D: $\quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b , \quad \|D\| < \delta .$

Nechť D' je dělení $\langle a,b\rangle$, které má za dělicí body všechny dělicí body dělení D_1 a D (píšeme $D' = D_1 \cup D$), tedy D' je zjemnění D_1 i D.

D': $\quad a = z_0 < z_1 < \dots < z_m = b .$

Odhadujme $\quad |S(f,D) - S(f,D')|$.

Intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i=1,\dots,n$, rozdělíme do dvou skupin M_1, M_2:

$\langle x_{i-1}, x_i\rangle \in M_1$, jestliže žádný z bodů $y_1,\dots,y_{p-1}$ není vnitřním bodem tohoto intervalu, tj.

$$y_j \notin (x_{i-1},x_i) \quad \forall j=1,\dots,p-1.$$

$\langle x_{i-1},x_i\rangle \in M_2$ v opačném případě.

I) Intervaly $\langle x_{i-1},x_i\rangle\in M_1$ přispívají stejnou hodnotou do $S(f,D)$ i do $S(f,D')$.

II) Interval $\langle x_{i-1},x_i\rangle \in M_2$ přispívá do $S(f,D)$ hodnotou $M_i(x_i-x_{i-1})$, přičemž

$$|M_i(x_i-x_{i-1})| \le K(x_i-x_{i-1}) < K\cdot\delta$$

Interval $\langle x_{i-1},x_i\rangle\in M_2$ je tvaru $\langle z_k, z_{k+l}\rangle$, kde $l>1$ (neb mezi x_{i-1} a x_i je alespoň jeden bod y_j, $j\in\{1,\dots,p-1\}$). Je-li $\Lambda_{k+j} := \sup\limits_{\langle z_{k+j-1}, z_{k+j}\rangle} f$ pro $j=1,\dots,l$, pak příspěvek intervalu $\langle x_{i-1},x_i\rangle \in M_2$ k hodnotě $S(f,D')$ splňuje

$$\left|\sum_{j=1}^{l} \Lambda_{k+j}(z_{k+j}-z_{k+j-1})\right| \le \sum_{j=1}^{l} \underbrace{|\Lambda_{k+j}|}_{\le K}(z_{k+j}-z_{k+j-1})$$

$$\le K\sum_{j=1}^{l} (z_{k+j}-z_{k+j-1}) = K(x_i-x_{i-1}) < K\delta \quad \Longrightarrow$$

(4) $$|S(f,D)-S(f,D')| < \underbrace{(p-1)}_{\text{horní odhad počtu intervalů v množině } M_2}(K\delta+K\delta) = 2K\delta(p-1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Protože D' je zjemnění D_1, plyne z (3), že

(5) $$S(f,D') \le S(f,D_1) \overset{(3)}{<} \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy

$$S(f,D) = S(f,D') + \underbrace{S(f,D)-S(f,D')}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ dle (4)}} \overset{(5)}{<} \overline{\int_a^b} f+\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \overline{\int_a^b} f \le S(f,D) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon \quad \forall D,\ \|D\|<\delta. \quad \square$$

Věta 41 (o limitě dolních a horních součtů).

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a $f \in B(\langle a,b\rangle)$. Buď $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ posloupnost dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ taková, že $\|D_m\| \to 0$ pro $m \to \infty$. Pak
$$\lim_{m\to\infty} S(f,D_m) = \overline{\int_a^b} f \quad , \quad \lim_{m\to\infty} s(f,D_m) = \underline{\int_a^b} f .$$

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$. Dle Věty 40
$$\exists \delta > 0 \ \forall D, \|D\| < \delta : \ \overline{\int_a^b} f \leq S(f,D) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon .$$
Protože $\|D_m\| \to 0$, ex. $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\|D_m\| < \delta$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0$. Proto
$$\overline{\int_a^b} f \leq S(f,D_m) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}, m \geq m_0 .$$
$$\Rightarrow \quad \left| S(f,D_m) - \overline{\int_a^b} f \right| < \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}, m \geq m_0$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{m\to\infty} S(f,D_m) = \overline{\int_a^b} f .$$
Obdobně se dokáže, že $\lim_{m\to\infty} s(f,D_m) = \underline{\int_a^b} f$. $\square$

Poznámka. Význam Věty 41 spočívá v tom, že k výpočtu $\overline{\int_a^b} f$ není třeba počítat infimum $\{S(f,D),\ D \text{ dělení } \langle a,b\rangle\}$, ale stačí vzít nějakou posl. D_m splňující $\|D_m\| \to \infty$ a určit $\lim_{m\to\infty} S(f,D_m)$. Obdobně pro $\underline{\int_a^b} f$.

Př. 1. Určete $\int_0^1 f$, kde $f(x) = x$ $\forall x \in \langle 0,1\rangle$.

Řešení. Protože $f \in C(\langle 0,1\rangle)$, tak $f \in \mathcal{R}(\langle 0,1\rangle)$.

Tedy $\int_0^1 f = \overline{\int_0^1} f = \underline{\int_0^1} f$.

Buď $D_m = \left\{ \frac{i}{m} \right\}_{m=0}^{m}$ dělení intervalu $\langle 0,1\rangle$.

Pak $\|D_m\| = \frac{1}{m} \to 0$ pro $m \to \infty$. Dále platí
$$S(f,D_m) = \sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{i}{m}\right)\left(\frac{i}{m} - \frac{i-1}{m}\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{i}{m}\,\frac{1}{m} = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m} i =$$
$$= \frac{1}{m^2}(1 + 2 + \dots + m) = \frac{1}{m^2}\,\frac{m+1}{2}\cdot m = \frac{m^2}{m^2}\,\frac{1+\frac{1}{m}}{2} =$$

$$= \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \underset{\uparrow}{=} \overline{\int_0^1} f = \int_0^1 f .$$

dle Věty 41

Tedy $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$.

Poznámka ke Př. 1. $s(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(0 + 1 + \dots + n-1) = \frac{1}{n^2} \frac{n-1}{2} \cdot n =$$

$$= \frac{n^2}{n^2} \frac{1-\frac{1}{n}}{2} = \frac{1-\frac{1}{n}}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} = \underline{\int_0^1} f .$$

15. přednáška MA-2, LS, šk. r. 2015/16, 12. 4. 2016

Věta 42 (vlastnosti Riemannova integrálu).

(i) (linearita) Nechť $f, g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak $f+g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, $\lambda f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a platí

(1) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$,

(2) $\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$.

(ii) (monotonie) Nechť $f, g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a $f \le g$ na $\langle a,b\rangle$. Pak

(3) $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

(iii) (aditivita*)) Nechť $c \in (a,b)$ a f je fce definovaná na $\langle a,b\rangle$. Pak

(4) $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle) \Leftrightarrow (f \in \mathcal{R}(\langle a,c\rangle) \wedge f \in \mathcal{R}(\langle c,b\rangle))$.

Je-li $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, pak

(5) $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

(iv) (absolutní konvergence) Je-li $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, pak $|f| \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a platí

(6) $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

Důkaz. ad (i): Nechť $f, g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Platí

$f, g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle) \Rightarrow f, g \in \mathcal{B}(\langle a,b\rangle) \Rightarrow (f+g) \in \mathcal{B}(\langle a,b\rangle)$.

Dále pro libovolný interval $I \subset \langle a,b\rangle$ máme

$$\sup_I (f+g) \le \sup_I f + \sup_I g$$

(neboť $(f+g)(x) \le \sup_I f + \sup_I g \quad \forall x \in I$)

a podobně

$$\inf_I (f+g) \ge \inf_I f + \inf_I g.$$

Proto $\forall$ dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ platí

(7) $s(f,D) + s(g,D) \le s(f+g,D) \le S(f+g,D) \le S(f,D) + S(g,D)$.

---

*) Tzn., že integrál je aditivní fcí intervalu.

Buď $\{D_n\}_n$ posl. dělení $\langle a,b\rangle$ splňující $\|D_n\|\to 0$.
Pak z (7) a Věty 41 plyne

$$\int_a^b f + \int_a^b g \le \underline{\int_a^b}(f+g) \le \overline{\int_a^b}(f+g) \le \int_a^b f + \int_a^b g .$$

Tedy $\underline{\int_a^b}(f+g) = \overline{\int_a^b}(f+g)$ a platí (1). **)

Buď $f\in\mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a $\lambda>0$. Pak $(\lambda f)\in B(\langle a,b\rangle)$ a pro libovolný interval $I\subset\langle a,b\rangle$ platí

$$\sup_I(\lambda f) = \lambda \sup_I f \quad , \quad \inf_I(\lambda f) = \lambda \inf_I f .$$

Proto pro posl. $\{D_n\}_n$ dělení $\langle a,b\rangle$, splňující $\|D_n\|\to 0$, máme

$$\lambda s(f,D_n) = s(\lambda f, D_n) \le S(\lambda f, D_n) = \lambda S(f,D_n) \quad \forall n\in\mathbb{N} .$$

Odtud a z Věty 41 dostáváme

$$\lambda\int_a^b f = \underline{\int_a^b}(\lambda f) \le \overline{\int_a^b}(\lambda f) = \lambda\int_a^b f .$$

Tedy $\underline{\int_a^b}(\lambda f) = \overline{\int_a^b}(\lambda f)$ a platí (2).

K dokončení důkazu homogenity Riemannova integrálu stačí dokázat:

$$f\in\mathcal{R}(\langle a,b\rangle) \Rightarrow (-f)\in\mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$$

a platí $\int_a^b(-f) = -\int_a^b f$.

Protože pro libovolný interval $I\subset\langle a,b\rangle$ platí

$$\sup_I(-f) = -\inf_I f \quad , \quad \inf_I(-f) = -\sup_I f ,$$

tak pro posloupnost dělení $\{D_n\}_n$ intervalu $\langle a,b\rangle$, splňující $\|D_n\|\to 0$, máme

$$-S(f,D_n) = s(-f,D_n) \le S(-f,D_n) = -s(f,D_n) \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Odtud a z Věty 41 pak dostáváme

$$-\int_a^b f = \underline{\int_a^b}(-f) \le \overline{\int_a^b}(-f) = -\int_a^b f ,$$

tedy $(-f)\in\mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a $\int_a^b(-f) = -\int_a^b f$.

Pozn. Důkaz (2) lze provést i bez Věty 41 (a bez Věty 39) ./.

**) Jiný důkaz (1) je na listě 6 (místo Věty 41 použiji Větu 39).

ad (ii): Nechť $f, g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, $f \le g$ na $\langle a,b\rangle$.

Dle (i) máme

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g-f) \ge 0, \quad \text{neboť } s(g-f,D) \ge 0$$

$\forall$ dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$. Tedy platí (3).

ad (iii): I. Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a,c\rangle) \wedge f \in \mathcal{R}(\langle c,b\rangle)$.

Buď $\{D_n^1\}_n$ posl. dělení $\langle a,c\rangle$, splňující $\|D_n^1\| \to 0$, a $\{D_n^2\}_n$ posl. dělení $\langle c,b\rangle$, splňující $\|D_n^2\| \to 0$.

Nechť $D_n = D_n^1 \cup D_n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak $\|D_n\| \to 0$ a $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$s(f,D_n^1) + s(f,D_n^2) = s(f,D_n) \le S(f,D_n) = S(f,D_n^1) + S(f,D_n^2).$$

Odtud limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostáváme (cf. Věta 41)

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

a tedy $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, tj. $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, a platí (2).

II. Nechť nyní $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Buď $\varepsilon > 0$. Podle Věty 39 (kritérium existence $\int_a^b f$)

$$\exists D \text{ dělení } \langle a,b\rangle : \ S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

Protože pro zjemnění D' dělení D platí (cf. Lemma 36 (i))

$$s(f,D) \le s(f,D') \le S(f,D') \le S(f,D),$$

je $\quad S(f,D') - s(f,D') \le S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$

Tedy BÚNO lze předpokládat, že dělení D obsahuje bod c. Označme: D_1 dělení $\langle a,c\rangle$, které obsahuje body dělení D, které patří do $\langle a,c\rangle$; D_2 dělení $\langle c,b\rangle$, které obsahuje body dělení D, které patří do $\langle c,b\rangle$. Pak

$$(8) \begin{cases} s(f,D) = s(f,D_1) + s(f,D_2), \\ S(f,D) = S(f,D_1) + S(f,D_2). \end{cases}$$

Víme, že

$$0 \le \underbrace{S(f,D) - s(f,D)} < \varepsilon$$
$$\overset{\text{dle (8)}}{=} \underbrace{S(f,D_1) - s(f,D_1)}_{\ge 0} + \underbrace{S(f,D_2) - s(f,D_2)}_{\ge 0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S(f,D_1)-s(f,D_1)<\varepsilon \quad \wedge \quad S(f,D_2)-s(f,D_2)<\varepsilon.$$

Tedy podle Věty 39 $\int_a^c f$ i $\int_c^b f$ existují. Z dokázané části I tvrzení (ii) pak plyne, že platí (2).

ad (iv): Buď $f\in R(\langle a,b\rangle)$. Pak $f\in B(\langle a,b\rangle)$ $\Rightarrow |f|\in B(\langle a,b\rangle)$. Buď $\varepsilon>0$. Podle Věty 39 $\exists D$ dělení $\langle a,b\rangle$: $S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$.

Nechť

$$D:\quad a=x_0<x_1<\dots<x_n=b,$$

$$I_i:=\langle x_{i-1},x_i\rangle,\ i=1,\dots,n.$$

Jestliže dokážeme, že pro libovolný neprázdný interval $I\subset\langle a,b\rangle$ platí

$$(*)\qquad \sup_I f-\inf_I f\ \ge\ \sup_I|f|-\inf_I|f|,$$

pak máme

$$\varepsilon>S(f,D)-s(f,D)=\sum_{i=1}^n\left(\sup_{I_i}f-\inf_{I_i}f\right)(x_i-x_{i-1})\ \underset{\substack{\text{dle }(*)\\ \text{s } I=I_i}}{\ge}$$

$$\ge\sum_{i=1}^n\left(\sup_{I_i}|f|-\inf_{I_i}|f|\right)(x_i-x_{i-1})$$

$$=S(|f|,D)-s(|f|,D),$$

tedy $|f|\in R(\langle a,b\rangle)$ dle Věty 39.

Dále platí

$$-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|\quad\forall x\in\langle a,b\rangle,$$

a tedy

$$-\int_a^b|f|\le\int_a^b f\le\int_a^b|f|,$$

tzn., že $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$.

Zbývá dokázat $(*)$: Buď $\varepsilon>0$. Pak ex. $x,y\in I$ tak, že

$$|f(x)|>\sup_I|f|-\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{a}\quad|f(y)|<\inf_I|f|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud máme

$$(9)\quad \sup_I|f|-\inf_I|f|<|f(x)|+\frac{\varepsilon}{2}-\left(|f(y)|-\frac{\varepsilon}{2}\right)=$$

$$= \big| |f(x)| - |f(y)| \big| + \varepsilon \leq |f(x) - f(y)| + \varepsilon .$$

Protože

$$f(x) - f(y) \leq \sup_I f - f(y) \leq \sup_I f - \inf_I f$$

a také

$$f(y) - f(x) \leq \sup_I f - f(x) \leq \sup_I f - \inf_I f,$$

platí $\quad |f(x) - f(y)| \leq \sup_I f - \inf_I f .$

Odtud a z (9) plyne

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f + \varepsilon ,$$

a protože ε je libovolné kladné číslo, tak platí (*). $\square$

<u>Důsledek 1.</u> Z Věty 42 plyne, že $\mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ je vektorový prostor a zobrazení $f \longmapsto \int_a^b f$ je lineární forma na $\mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.

<u>Důsledek 2.</u> Buď $-\infty < a < c < d < b$ a $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle c,d\rangle)$. (Případ, kdy $c = a$ nebo $d = b$, je přímo obsažen ve Větě 42 (iii).)

<u>Důkaz.</u> Dle Věty 42 (iii) platí $f \in \mathcal{R}(\langle c,b\rangle)$. Opětovnou aplikací této věty na $\langle c,b\rangle$ místo na $\langle a,b\rangle$ dostaneme $f \in \mathcal{R}(\langle c,d\rangle)$.

<u>KONEC PŘEDNÁŠKY</u>

(To co následuje na listě 6 jsem na přednášce nedělal.)

Jiný důkaz Věty 42 (i). Nechť $f, g \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Jako dříve dostaneme

(7) $s(f,D) + s(g,D) \le s(f+g,D) \le S(f+g,D) \le S(f,D) + S(g,D)$

$\forall$ dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$.

Buď $\varepsilon > 0$. Pak podle Věty 39 (kritérium existence $\int_a^b f$) platí:

(8) $\exists\, D_1$ dělení $\langle a,b\rangle$: $S(f,D_1) - s(f,D_1) < \frac{\varepsilon}{2}$,

(9) $\exists\, D_2$ dělení $\langle a,b\rangle$: $S(g,D_2) - s(g,D_2) < \frac{\varepsilon}{2}$

Buď $D = D_1 \cup D_2$. Pak dle Lemmatu 36 (i) platí:

$$s(f,D_1) \le s(f,D) \le S(f,D) \le S(f,D_1).$$

Odtud a z (8) plyne

(10) $$S(f,D) - s(f,D) \le S(f,D_1) - s(f,D_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Obdobně dostaneme

(11) $$S(g,D) - s(g,D) \le S(g,D_2) - s(g,D_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dle (10) a (11) interval

$$I(f,g,D) := \langle s(f,D) + s(g,D),\ S(f,D) + S(g,D)\rangle$$

má délku menší než ε. Dle (7) tento interval obsahuje čísla $s(f+g,D)$ a $S(f+g,D)$, tedy $S(f+g,D) - s(f+g,D) < \varepsilon$, což dle Věty 39 znamená, že $\int_a^b (f+g)$ existuje. Protože

$$s(f+g,D) \le \int_a^b (f+g) \le S(f+g,D),$$

číslo $\int_a^b (f+g)$ dle (7) leží v intervalu $I(f,g,D)$.

Analogicky, protože

$$s(f,D) + s(g,D) \le \int_a^b f + \int_a^b g \le S(f,D) + S(g,D),$$

číslo $\int_a^b f + \int_a^b g$ leží v intervalu $I(f,g,D)$. Tedy

$$\left| \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right) - \int_a^b (f+g) \right| < \text{délka intervalu } I(f,g,D) < \varepsilon.$$

Protože ε je libovolné kladné číslo, musí platit, že

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g).$$ $\square$

16. přednáška MA 2, LS, šk. r. 2015/16, 13. 4. 2016

Poznámka. Implikace

$$|f| \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$$

obecně neplatí. To lze ukázat např. na příkladě

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0,1\rangle \cap \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \langle 0,1\rangle \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pak $|f| = 1 \in \mathcal{R}(\langle 0,1\rangle)$, ale $f \notin \mathcal{R}(\langle 0,1\rangle)$,

neboť $\underline{\int_0^1} f = -1$, $\overline{\int_0^1} f = 1$.

Definice. (i) Je-li $a \in D(f)$, pak $\int_a^a f := 0$.

(ii) Je-li $a > b$, pak $\int_a^b f := -\int_b^a f$, má-li RHS smysl.

Poznámka. Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pak

(*) $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$, má-li RHS smysl.

Důkaz. 1) Jestliže $a = b = c$, pak dle definice jsou všechny tři integrály rovny nule a (*) platí.

2) Jestliže právě 2 body z bodů a, b, c jsou totožné, pak opět s použitím výše uvedené definice snadno ověříme, že (*) platí.

3) Jestliže všechny 3 body jsou různé, pak máme $3! = 6$ možných pořadí těchto 3 bodů. Pomocí Věty 42(iii) a výše uvedené definice lze ověřit, že (*) opět platí.

Např., je-li $a < b < c$, pak (*) plyne přímo z Věty 42(iii).

Je-li $a < c < b$, pak dle Věty 42(iii) a zmíněné definice platí

$$\int_a^b f \underset{\text{Věta 42(iii)}}{=} \int_a^c f + \int_c^b f \Rightarrow \int_a^c f = \int_a^b f - \int_c^b f \overset{\text{dle definice (ii)}}{=} \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Atd.

Věta 43 (o neurčitém Riemannově integrálu). Buď $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a $F(x) := \int_a^x f$ pro $x \in \langle a,b\rangle$. Pak:

(i) F je spojitá na $\langle a,b\rangle$.

(ii) Je-li $a \le x_0 < b$ a f spojitá v bodě x_0 zprava, pak
$F'_+(x_0) = f(x_0)$.

(iii) Je-li $a < x_0 \le b$ a f spojitá v bodě x_0 zleva, pak
$F'_-(x_0) = f(x_0)$.

(iv) Speciálně, je-li $f \in C(\langle a,b\rangle)$, pak $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a,b)$.

Důkaz. ad (i): Dokážeme, že fce F je spojitá zprava v každém bodě $x_0 \in \langle a,b)$. (Obdobně by se dokázalo, že F je spojitá zleva v každém bodě $x_0 \in (a,b\rangle$.)

Protože $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, platí $f \in B(\langle a,b\rangle)$. Tedy

$\exists K \in (0,+\infty)\ \forall t \in \langle a,b\rangle : |f(t)| \le K.$

Buď $x_0 \in \langle a,b)$ a $\varepsilon > 0$. Položme

$$\delta := \min\left(b - x_0, \frac{\varepsilon}{K}\right) \qquad (\text{tedy } \delta > 0).$$

Dokážeme, že

(1) $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$, je-li $x_0 < x < x_0 + \delta$

(pro $x = x_0$ to platí triviálně).

Je-li $x_0 < x < x_0 + \delta$, pak $x < x_0 + b - x_0 = b$. Navíc

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^x f = F(x_0) + \int_{x_0}^x f.$$

Proto

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f\right| \le \int_{x_0}^x \underbrace{|f|}_{\le K} \le K(x - x_0) <$$

$$< K\cdot\delta \le K\cdot\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

tj. (1) platí.

ad (ii): Buď $x_0 \in \langle a,b)$ a $\varepsilon > 0$. Protože f je v bodě x_0 spojitá zprava, existuje $\delta \in (0, b - x_0)$ tak, že

(2) $|f(t)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in \langle x_0, \underbrace{x_0+\delta}_{< x_0+b-x_0=b})$.

Pak $\forall h \in (0,\delta)$ platí

$$\left| \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,dt \right| \le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \underbrace{|f(t)-f(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ dle } (2)}\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Tedy $\lim\limits_{h\to 0_+} \left(\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) \right) = 0$,

což znamená, že $F'_+(x_0) = f(x_0)$.

ad (iii): Důkaz se provede obdobně jako v (ii).

ad (iv): (iv) je důsledkem (ii) a (iii). $\square$

Důsledek. Buď $f \in C((a,b))$, kde $-\infty \le a < b \le +\infty$, $c \in (a,b)$ a $F(x) := \int_c^x f \quad \forall x \in (a,b)$. Pak

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b).$$

Speciálně odtud plyne, že $\forall f \in C((a,b))$ má primitivní fci na (a,b) (což dokazuje Větu 21 (o existenci primitivní fce) ~~ve~~ z 8. přednášky).

Důkaz. Stačí dokázat, že $F'(x) = f(x) \ \forall x \in (\alpha,\beta)$, kde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla splňující $a < \alpha < c < \beta < b$.

Je-li $\alpha < c < \beta$, pak $f \in C(\langle \alpha,\beta \rangle) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f$ existuje.

Dále $\forall x \in (\alpha,\beta)$ platí

$$F(x) = \int_c^x f = \int_\alpha^x f - \int_\alpha^c f$$

$$\Rightarrow F'(x) = \left(\int_\alpha^x f\right)' - \left(\int_\alpha^c f\right)' \underset{\uparrow \text{ dle Věty 43 (iv)}}{=} f'(x) - 0 = f'(x) \quad \forall x \in (\alpha,\beta).$$

$\square$

Poznámka.

Je-li $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ a $\mathcal{F}(x) := \int_x^b f$ pro $x \in \langle a,b\rangle$, pak

$$\mathcal{F}(x) = \int_a^b f - \underbrace{\int_a^x f}_{=:F(x)} = \int_a^b f - F(x) \quad \forall x \in \langle a,b\rangle .$$

Odtud a z Věty 43 plyne:

(i) $\mathcal{F}$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$.

(ii) Je-li $a \leq x_0 < b$ a f spojitá v bodě x_0 zprava, pak $\mathcal{F}'_+(x_0) = -f(x_0)$.

(iii) Je-li $a < x_0 \leq b$ a f spojitá v bodě x_0 zleva, pak $\mathcal{F}'_-(x_0) = -f(x_0)$.

(iv) Speciálně, je-li $f \in C(\langle a,b\rangle)$, pak $\mathcal{F}'(x) = -f(x)$ $\forall x \in (a,b)$.

Věta 44 (Newton-Leibnizova formule). Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Nechť $F \in \int f$ na (a,b). Pak existují konečné limity $\lim_{x\to b-} F(x)$, $\lim_{x\to a+} F(x)$ a platí

$$(R)\int_a^b f = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x) =: [F]_a^b .$$

Důkaz. Buď $\tilde{f} : (a-1, b+1) \to \mathbb{R}$ fce daná předpisem

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(a), & x \in (a-1, a) \\ f(x), & x \in \langle a, b\rangle \\ f(b), & x \in (b, b+1). \end{cases}$$

Nechť $G : (a-1, b+1) \to \mathbb{R}$ je fce definovaná předpisem $G(x) := \int_a^x \tilde{f}$, $x \in (a-1, b+1)$. Protože $\tilde{f} \in C((a-1,b+1))$, tak podle Důsledku Věty 43 platí

(1) $\quad G \in \int \tilde{f}$ na $(a-1, b+1)$.

$\Rightarrow \quad G|_{(a,b)} \in \int f$ na (a,b).

Tedy (dle Věty 20, 8. přednáška) $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tak, že

$F = G|_{(a,b)} + c$. Z (1) plyne, že fce G je spojitá i v bodech a i b. Tudíž existují konečné limity

$$\lim_{x \to b-} F(x) = \lim_{x \to b-} G(x) + c,$$

$$\lim_{x \to a+} F(x) = \lim_{x \to a+} G(x) + c.$$

Navíc platí

$$\int_a^b f = G(b) = G(b) - \underbrace{G(a)}_{=0} = \lim_{x \to b-} G(x) - \lim_{x \to a+} G(x)$$

$$= \lim_{x \to b-} (F(x) - c) - \lim_{x \to a+} (F(x) - c) = [F]_a^b . \quad \square$$

Věta 45 (charakterizace riemannovské integrovatelnosti)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a f je funkce definovaná na $\langle a,b \rangle$. PNTJE:

(i) $f \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$;

(ii) $\exists I \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení $\langle a,b \rangle$, $\|D\| < \delta$,

$\forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$, $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$:

$$\Big| \underbrace{\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}_{=: \sigma(f,D,\xi) \ \dots\ \text{Riemannův součet}} - I \Big| < \varepsilon .$$

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Buď $\varepsilon > 0$. Pak podle Věty 40 (o aproximaci $\overline{\int_a^b} f$ a $\underline{\int_a^b} f$), 14. přednáška,

$\exists \delta > 0\ \forall D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení $\langle a,b \rangle$, $\|D\| < \delta$:

$$\int_a^b f - \varepsilon < s(f,D) \le S(f,D) < \int_a^b f + \varepsilon .$$

Protože

$$m_i = \inf_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f \le f(\xi_i) \le M_i = \sup_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f ,$$

platí

$$\int_a^b f - \varepsilon < s(f,D) \le \sigma(f,D,\xi) \le S(f,D) < \int_a^b f + \varepsilon .$$

Tedy platí (ii) s číslem $I := \int_a^b f$.

KONEC PŘEDNÁŠKY, DŮKAZ DOKONČÍM PŘÍŠTĚ

17. přednáška MA 2, LS, šk. r. 2015/16, 19.4.2016

Pokračování důkazu Věty 45 (charakterizace riemannovské integrovatelnosti):

(ii) $\Rightarrow$ (i): **I.** Nejprve dokážeme, že (ii) $\Rightarrow f \in B(\langle a,b\rangle)$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Dle (ii) $\exists \delta > 0$ (tak, že platí (ii)).

Buď D ekvidistantní dělení intervalu $\langle a,b\rangle$,

$D: \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$,

splňující $\|D\| < \delta$. Pak platí

$$\Big|\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}_{=\sigma(f,D,\xi)} - I\Big| < \varepsilon$$

$\forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$, kde $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1,\dots,n$.

Buď $t \in \langle a,b\rangle$ libovolný bod. Pak $\exists\, j = j(t) \in \{1,\dots,n\}$ tak, že $t \in \langle x_{j-1}, x_j\rangle$. Definujme

$$\xi_i = \begin{cases} x_i, & i \in \{1,\dots,n\} \setminus j \\ t, & i = j \end{cases} \qquad \xi := \{\xi_i\}_{i=1}^{n}.$$

Pak

$$|f(t)| \cdot \|D\| = |f(t)(x_j - x_{j-1})| = \Big|\sigma(f,D,\xi) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$\leq \underbrace{|\sigma(f,D,\xi) - I|}_{<\varepsilon} + \Big|I - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

$$\leq \varepsilon + |I| + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \underbrace{|f(x_i)|}_{\leq K := \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |f(x_i)|}(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \varepsilon + |I| + K(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad |f(t)| \leq \frac{1}{\|D\|}\big(\varepsilon + |I| + K(b-a)\big) \quad \forall t \in \langle a,b\rangle,$$

tj. $f \in B(\langle a,b\rangle)$.

II. K důkazu existence $(R)\int_a^b f$ použijeme Větu 39.

Buď $\varepsilon > 0$. Pak dle (ii) $\exists \delta > 0$ (tak, že platí (ii)). Nechť

$D: \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

je dělení $\langle a,b\rangle$, $\|D\| < \delta$.

$\forall i \in \{1,\dots,n\}\ \exists\, \xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle: \ \underset{\sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f}{\underset{\|}{M_i}} - \varepsilon < f(\xi_i)$.

Označím $\xi := \{\xi_i\}_{i=1}^{n}$.

Pak

$$\underline{\underline{S(f,D)}} = \sum_{i=1}^{m} M_i (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{m} \left(f(\xi_i) + \varepsilon\right)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})} + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1})$$

$$= \underbrace{\sigma(f,D,\xi)}_{< I+\varepsilon \text{ dle (ii)}} + \varepsilon(b-a) < \underline{\underline{I + \varepsilon(1+b-a)}}.$$

Analogicky:

$$\forall i \in \{1,\dots,m\}\ \exists \tilde{\xi}_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle : \underset{\substack{\| \\ \inf\limits_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} f}}{m_i} + \varepsilon > f(\tilde{\xi}_i).$$

Označme-li $\tilde{\xi} := \{\tilde{\xi}_i\}_{i=1}^m$, pak

$$\underline{\underline{s(f,D)}} = \sum_{i=1}^{m} m_i (x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^{m} \left(f(\tilde{\xi}_i) - \varepsilon\right)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} f(\tilde{\xi}_i)(x_i - x_{i-1})}_{= \sigma(f,D,\tilde{\xi}) > I - \varepsilon \text{ dle (ii)}} - \varepsilon \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1})$$

$$> I - \varepsilon - \varepsilon(b-a) = \underline{\underline{I - \varepsilon(1+b-a)}}.$$

Tedy $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D$ dělení $\langle a,b\rangle$ tak, že

$$(*) \quad I - \varepsilon(1+b-a) < s(f,D) \le S(f,D) < I + \varepsilon(1+b-a)$$

$\Rightarrow$ rozdíl $S(f,D) - s(f,D)$ lze udělat vhodnou volbou dělení D libovolně malý $\Rightarrow$ (dle Věty 39) $\underline{\int_a^b f \text{ existuje}}$, $\underline{\text{tedy platí (i)}}$.

(Protože $\quad s(f,D) \le \int_a^b f \le S(f,D) \quad \forall D$,

tak z $(*)$ plyne, že

$$\left| \int_a^b f - I \right| < 2\varepsilon(1+b-a) \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_a^b f. \text{)}$$

$\square$

Poznámka. 1) Z důkazu plyne: Platí-li podmínka (ii), pak nutně $I = (R)\int_a^b f$.

2) Podmínka (ii) z Věty 45 je původní Riemannova definice $\int_a^b f$. (My jsme použili definici, která přísluší Darbouxovi.)

Věta 46 ($(R)\int_a^b f$ a změna fce f na konečné množině).
Buď $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, $a<b$, $g: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $g=f$ v $\langle a,b\rangle \setminus K$, kde K je konečná množina. Pak

$$\int_a^b g = \int_a^b f .$$

Důkaz Věty 46 plyne z následujícího lemmatu a z aditivity Riemannova integrálu.

Lemma 47. Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, $a<b$, $g: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$.
Nechť
(i) $g=f$ v $(a,b\rangle$ nebo (ii) $g=f$ v $\langle a,b)$.
Pak $\int_a^b g = \int_a^b f$.

Důkaz. ad (i) (v případě (ii) se důkaz provede analogicky).
Nechť tedy $a<b$ a $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$. Buď $\varepsilon>0$. Z Věty 40 plyne, že $\exists D$ dělení intervalu $\langle a,b\rangle$,

$$D: \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b ,$$

tak, že platí

$$(*) \qquad I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,D) \le S(f,D) < I + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kde } I := \int_a^b f .$$

Funkce f a g jsou omezené na $\langle a,b\rangle$. Tedy ex. $K \in (0,+\infty)$ tak, že

$$|f| \le K , \quad |g| \le K \quad \text{na } \langle a,b\rangle .$$

Buď

$$\delta \in \left(0, \min\left\{\frac{\varepsilon}{4K}, \frac{1}{2}\min_{i=1,\dots,n} |x_i - x_{i-1}|\right\}\right).$$

Nechť $D' = D \cup \{a+\delta\}$, tj.

$$D': \quad a = x_0 < a+\delta < x_1 < \dots < x_n = b .$$

Z $(*)$ a z Lemmatu 36 (i) plyne

$$(2*) \qquad I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,D') \le S(f,D') < I + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Dále platí

(3*) $$\underline{|S(f,D') - S(g,D')|} = |\delta \cdot \sup_{\langle a,a+\delta\rangle} f - \delta \cdot \sup_{\langle a,a+\delta\rangle} g|$$

$$= \delta \, |\sup_{\langle a,a+\delta\rangle} f - \sup_{\langle a,a+\delta\rangle} g| \leq \delta \cdot \Big(\underbrace{|\sup_{\langle a,a+\delta\rangle} f|}_{\leq K} + \underbrace{|\sup_{\langle a,a+\delta\rangle} g|}_{\leq K} \Big)$$

$$\leq \delta 2K < \underline{\frac{\varepsilon}{2}}$$

a obdobně

(4*) $$\underline{|s(f,D') - s(g,D')|} = |\delta \cdot \inf_{\langle a,a+\delta\rangle} f - \delta \cdot \inf_{\langle a,a+\delta\rangle} g|$$

$$\leq \delta \Big(\underbrace{|\inf_{\langle a,a+\delta\rangle} f|}_{\leq K} + \underbrace{|\inf_{\langle a,a+\delta\rangle} g|}_{\leq K} \Big) \leq \delta 2K < \underline{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Tedy

$$s(g,D') \underset{\uparrow \text{dle } (4*)}{\geq} s(f,D') - \frac{\varepsilon}{2} \underset{\uparrow \text{dle } (2*)}{>} I - \varepsilon$$

$$S(g,D') \underset{\uparrow \text{dle } (3*)}{\leq} S(f,D') + \frac{\varepsilon}{2} \underset{\uparrow \text{dle } (2*)}{<} I + \varepsilon.$$

Celkem tedy máme

(5*) $$I - \varepsilon < s(g,D') \leq S(g,D') < I + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad S(g,D') - s(g,D') < 2\varepsilon$$

$$\underset{\uparrow \text{dle Věty 39}}{\Rightarrow} \quad \int_a^b g \text{ existuje.}$$

Odtud a z (5*) pak plyne

$$I - \varepsilon < s(g,D') \leq \int_a^b g \leq S(g,D') < I + \varepsilon,$$

a proto

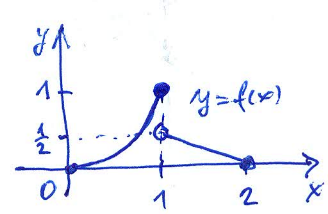
$$|I - \int_a^b g| < 2\varepsilon.$$

Protože ε je libovolné kladné číslo, platí $\int_a^b g = I := \int_a^b f$. □

__Dov.__ __Př.__ Určete $(R) \int_0^2 f$, kde $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \langle 0,1\rangle \\ -\frac{x}{2}+1, & x \in (1,2\rangle. \end{cases}$

__Návod:__ Použijte Větu 42(iii), Větu 46 a Větu 44.

__Výsledek:__ $$\underline{\int_0^2 f} = \int_0^1 f + \int_1^2 f = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \underline{\frac{7}{12}}.$$



Newtonův integrál.

Na 8. přednášce jsme zavedli pojem primitivní fce:

Definice Nechť $f, F : (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou fce definované v (a,b), kde $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je neprázdný interval. Řekneme, že F je primitivní fce k f na (a,b), jestliže $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$.

Viděli jsme, že např. fce $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1,1)$, nemá na $(-1,1)$ primitivní fci.

Úmluva. V dalším pojem fce znamená konečnou reálnou fci.

Definice. Buď $I \subset \mathbb{R}$ neprázdný interval. Řekneme, že fce $F : I \to \mathbb{R}$ je zobecněná primitivní fce k fci f na intervalu I, jestliže

(i) $F \in C(I)$;

(ii) existuje konečná množina $K \subset I$ tak, že
$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I \setminus K.$$

Poznámka (i) Pokud $I = (a,b)$, kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a F je primitivní fce k fci f na (a,b), pak F je také zobecněná primitivní fce k f na (a,b).

(ii) Aby f měla primitivní fci v (a,b), musí f být definována všude v (a,b). Zobecněnou primitivní fci na (a,b) však může mít i fce f, která je definována pouze v $(a,b) \setminus K$, kde K je konečná množina.

(iii) Z definice také plyne: Je-li $f = g$ v $I \setminus K$ a F je z.p.f. k f v I, pak F je také z.p.f. k g v I.*)

Př. Platí: $|Id|$ je z.p.f. k fci sgn v $\mathbb{R}$, neboť $|Id| \in C(\mathbb{R})$ a v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí $|Id|' = \operatorname{sgn}$ v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

---

*) Slova "zobecněná primitivní fce" budeme někdy zkracovat na "z.p.f."

Značení. Symbolem $ZPF(f,I)$ budeme značit množinu všech zobecněných primitivních fcí k fci f na intervalu I.

Věta 48 (o množině $ZPF(f,I)$). Je-li $F_0 \in ZPF(f,I)$, pak $ZPF(f,I) = \{F_0 + c;\ c \in \mathbb{R}\}$.

Důkaz. (i) Je jasné, že $F_0 + c \in ZPF(f,I)\ \forall c \in \mathbb{R}$.

(ii) Buď $G \in ZPF(f,I)$. Chceme dokázat, že $G = F_0 + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Víme: $G, F_0 \in C(I)$,

$G'(x) = f(x)\ \forall x \in I \setminus K_G$, kde $K_G \subset I$ je konečná množina,

$F_0'(x) = f(x)\ \forall x \in I \setminus K_{F_0}$, kde $K_{F_0} \subset I$ je konečná množina.

Nechť a, b jsou krajní body intervalu I, a nechť $a < b$.

Nechť $D := K_G \cup K_{F_0} \cup \{a, b\}$,

$D: \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Pak pro $i = 1, \dots, n$ platí

$G, F_0 \in C(\langle x_{i-1}, x_i \rangle)$, $G' = f = F_0'$ v (x_{i-1}, x_i).

Tedy $\exists c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tak, že $G = F_0 + c_i$ v $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

$\Rightarrow$ $G = F_0 + c_i$ v $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$

$G = F_0 + c_{i+1}$ v $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$, $i = 0, \dots, n-1$

$\Rightarrow$ $G(x_i) = F_0(x_i) + c_i$

$G(x_i) = F_0(x_i) + c_{i+1}$ $\forall i = 1, \dots, n-1$

$\Rightarrow$ $c_i = c_{i+1}$ $\forall i = 1, \dots, n-1$, tj. $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = c_n =: c$

$\Rightarrow$ $G = F_0 + c$. $\square$

Definice. Nechť $-\infty \le a < b \le +\infty$. Zobecněným přírůstkem fce $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ definované v (a,b) nazveme číslo

$$[F]_a^b := \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x),$$

pokud obě limity existují a jsou konečné.

Definice. Nechť $-\infty \le a < b \le +\infty$ a $ZPF(f,(a,b)) \neq \emptyset$. Pak definujeme <u>Newtonův integrál fce f od a do b</u> předpisem

(*) $\quad (N)\int_a^b f := [F]_a^b$, kde $F \in ZPF(f,(a,b))$,

má-li RHS (*) smysl.

Poznámka. (i) $(N)\int_a^b f$ nezávisí na volbě $F \in ZPF(f,(a,b))$.

(ii) Je-li $(N)\int_a^b f$ definován, pak fce f je definována v $(a,b) \setminus K$, kde K je konečná množina.

(iii) $(N)\int_a^b f$ je definován pro <u>neomezené intervaly i pro neomezené fce</u>.

(iv) Místo $(N)\int_a^b f$ budeme často psát jen $\int_a^b f$. (Ze souvislosti bude jasné, o který integrál se jedná. Navíc v dalším dokážeme, že $(N)\int_a^b f = (R)\int_a^b f$, pokud oba integrály existují.)

Značení. Symbolem $\mathcal{N}(a,b)$ označme množinu všech fcí f, pro které existuje $(N)\int_a^b f$ (tj. $(N)\int_a^b f$ je konečné číslo).

18. přednáška MA 2, LS, šk. r. 2015/16, 20.4.2016

Př: $(N)\int_0^1 x^\alpha dx \underset{\alpha+1>0}{=} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1-0}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}$, je-li $\alpha+1>0$.

$(N)\int_1^{+\infty} x^\beta dx \underset{\beta+1<0}{=} \left[\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{0-1}{\beta+1} = -\frac{1}{\beta+1}$, je-li $\beta+1<0$.

$(N)\int_0^{+\infty} x^\gamma dx$ neexistuje (nekonverguje) pro žádné $\gamma\in\mathbb{R}$, neboť

pro funkci $F(x) = \begin{cases} \frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1}, & \gamma+1\neq 0 \\ \ln x, & \gamma+1=0 \end{cases}$, $x\in(0,+\infty)$,

platí $F\in ZPF(x^\gamma,(0,+\infty))$ a $\forall\gamma\in\mathbb{R}$ je alespoň jedna z limit $\lim_{x\to+\infty} F(x)$, $\lim_{x\to 0+} F(x)$ nekonečná.

Budeme potřebovat následující větu. *)

Věta 49 (BC podmínka pro existenci konečné limity fce).
Nechť $x_0\in\langle-\infty,+\infty)$ a fce F je definována v $P_+(x_0,\delta_0)$, kde $\delta_0>0$. Pak existuje konečná $\lim_{x\to x_0+} F(x)$ právě tehdy, když platí

(BC) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x'\in P_+(x_0,\delta)\ \forall x''\in P_+(x_0,\delta): |F(x')-F(x'')|<\varepsilon$.

Důkaz. ad "$\Rightarrow$": Předpokládejme, že

(1) $\lim_{x\to x_0+} F(x) = A\in\mathbb{R}$.

Buď $\varepsilon>0$. Pak z (1) plyne, že

(2) $\exists\delta>0\ \forall x\in P_+(x_0,\delta): |F(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Odtud máme

$\forall x'\in P_+(x_0,\delta)\ \forall x''\in P_+(x_0,\delta): |F(x')-F(x'')| \leq$

$\leq |F(x')-A| + |A-F(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

a podmínka (BC) je ověřena.

---

*) Analogická tvrzení platí pro limitu zleva v bodech $x_0\in(-\infty,+\infty\rangle$ a pro oboustrannou limitu v bodech $x_0\in\mathbb{R}$.

ad "$\Leftarrow$": Nechť platí (BC). Buď $\varepsilon > 0$. Dle (BC) ex. $\delta > 0$ (takové, že platí (BC)). Buď $\{x_n\}$ posloupnost obsažená v $P_+(x_0, \delta_0)$ splňující $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Pak

(3) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0:\ x_n \in P_+(x_0, \delta)$.

Tedy

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ m \geq n_0:\ x_n, x_m \in P_+(x_0, \delta),$$

a odtud dle (BC) máme

$$|F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon.$$

Tzn. že posloupnost $\{F(x_n)\}$ splňuje (BC) podmínku pro existenci konečné limity, tj. $\exists A \in \mathbb{R}$ takové, že

(4) $$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = A.$$

Nyní dokážeme, že

(5) $$\lim_{x\to x_0} F(x) = A.$$

K důkazu použijeme Heineho větu. Buď $\{y_n\}$ posloupnost obsažená v $P_+(x_0, \delta_0)$ splňující $y_n \to x_0$.

Pak

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1:\ y_n \in P_+(x_0, \delta).$$

Dále z (4) plyne

(6) $\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2:\ |F(x_n) - A| < \varepsilon$.

Buď $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Pak

$$|F(y_n) - A| \leq \underbrace{|F(y_n) - F(x_n)|}_{< \varepsilon \text{ dle (BC)}} + \underbrace{|F(x_n) - A|}_{< \varepsilon \text{ dle (6)}} < 2\varepsilon.$$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} F(y_n) = A$ a (5) plyne z Heineho věty. ∎

Věta 50 (o existenci Newtonova integrálu). Nechť $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in C((a,b)) \cap B((a,b))$. Pak $(N)\int_a^b f$ existuje.

Důkaz. $f \in C((a,b)) \Rightarrow f$ má na (a,b) primitivní fci F.

Stačí tedy ověřit, že existují konečné limity $F(b_-)$, $F(a_+)$.

Pomocí (BC) podmínky z Věty 49 dokážeme existenci konečné limity $F(a_+)$. (Důkaz existence konečné limity $F(b_-)$ je analogický.)

Chceme tedy ověřit, že platí:

(*) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x' \in P_+(a,\delta)\ \forall x'' \in P_+(a,\delta): |F(x')-F(x'')|<\varepsilon.$

Buď $\varepsilon>0$. Z omezenosti fce f na (a,b) plyne existence $K \in (0,+\infty)$ tak, že

$$|f| \leq K \quad \text{na } (a,b).$$

Zvolme $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{K})$. Pak pro $x', x'' \in P_+(a,\delta)$, $x' \neq x''$, pomocí Lagrangeovy věty dostaneme

$$|F(x')-F(x'')| = |f(\xi)|\,|x'-x''|$$

$$\leq K|x'-x''| < K\delta < \varepsilon.$$

(ξ je jistý bod ležící uvnitř intervalu s krajními body x', x'')

Odtud plyne, že (*) platí. □

Věta 51 (vlastnosti Newtonova integrálu). Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

(i) (linearita) Nechť $f, g \in N(a,b)$ a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pak $\lambda f + \mu g \in N(a,b)$ a platí

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

(ii) (monotonie) Nechť $f, g \in N(a,b)$ a $f \leq g$ v $(a,b) \setminus K$, kde K je konečná množina. Pak

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(iii) (aditivita) Nechť $c \in (a,b)$ a $f: (a,b) \to \mathbb{R}$. Pak

$$f \in N(a,b) \iff (f \in N(a,c) \wedge f \in N(c,b)).$$

Je-li $f \in N(a,b)$, pak

(1) $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Důkaz. ad (i): Buď $F \in ZPF(f,(a,b))$, $G \in ZPF(g,(a,b))$.

Pak

$$\lambda F + \mu G \in C((a,b))$$

a

$$(\lambda F + \mu G)' = \lambda f + \mu G \ \text{ v } (a,b) \setminus (K_F \cup K_G) .$$

konečné množiny

Tedy $\lambda F + \mu G \in ZPF(\lambda f + \mu g, (a,b))$.

Dále platí

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = [\lambda F + \mu G]_a^b = \lim_{x \to b_-} (\lambda F(x) + \mu G(x)) - \lim_{x \to a_+} (\lambda F(x) + \mu G(x))$$

$$= \lambda (F(b_-) - F(a_+)) + \mu (G(b_-) - G(a_+))$$

$$= \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g .$$

ad (ii): Buď $h := g - f$. Pak $h \geq 0$ v $(a,b) \setminus K$.

Nechť $F \in ZPF(f,(a,b))$, $G \in ZPF(g,(a,b))$. Potom

$$H := G - F \in C((a,b)),$$

$$H' = G' - F' \ \text{ v } (a,b) \setminus (K_G \cup K_F)$$

$\Rightarrow$ $H \in ZPF(h,(a,b))$ a platí

$$H' \geq 0 \ \text{ v } (a,b) \setminus (K_G \cup K_F \cup K)$$

Nechť $D := K_G \cup K_F \cup K \cup \{a,b\}$,

$D: \ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Pak $H' = h$ v (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \dots, n$,

$H \in C(\langle x_{i-1}, x_i \rangle \cap (a,b))$, $i = 1, \dots, n$.

Odtud plyne, že H je neklesající v $\langle x_{i-1}, x_i \rangle \cap (a,b)$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, a tedy H je neklesající v (a,b). Proto

$$0 \leq [H]_a^b = \int_a^b h = \int_a^b (g - f) \underset{\text{dle (i)}}{=} \int_a^b g - \int_a^b f$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g .$$

ad (iii): I. Nechť $f \in N(a,b)$. Buď $F \in ZPF(f,(a,b))$.

Pak $F(b_-), F(a_+) \in \mathbb{R}$. Je-li $c \in (a,b)$ potom

$$F \in ZPF(f,(a,c)), \quad F \in ZPF(f,(c,b)),$$

F je spojitá v bodě c, a tedy $F(c_-) = F(c) = F(c_+) \in \mathbb{R}$.

Tudíž zobecněné přírůstky $[F]_a^c$, $[F]_c^b$ jsou definovány, což znamená, že $f \in \mathcal{N}(a,c) \wedge f \in \mathcal{N}(c,b)$.

Dále platí

$$\int_a^b f = [F]_a^b = F(b_-) - F(a_+) = F(b_-) - F(c) + F(c) - F(a_+)$$

$$= [F]_c^b + [F]_a^c = \int_c^b f + \int_a^c f = \int_a^c f + \int_c^b .$$

Tedy (1) platí.

II. Nechť $f \in \mathcal{N}(a,c) \wedge f \in \mathcal{N}(c,b)$, kde $c \in (a,b)$.

Pak ex. $F_1 \in ZPF(f, (a,c))$ a $[F_1]_a^c$ je definován,
ex. $F_2 \in ZPF(f, (c,b))$ a $[F_2]_c^b$ je definován.

Položme

$$F(x) := \begin{cases} F_1(x), & x \in (a,c) \\ F_1(c_-), & x = c \\ F_2(x) - F_2(c_+) + F_1(c_-), & x \in (c,b). \end{cases}$$

Pak $F \in C((a,b))$, neb $F = F_1$ v (a,c) a $F_1 \in C((a,c))$,
$F = F_2$ + konstanta a $F_2 \in C((c,b))$,

$$\lim_{x\to c_-} F(x) = \lim_{x\to c_-} F_1(x) = \underline{F_1(c_-)},$$

$$\lim_{x\to c_+} F(x) = \lim_{x\to c_+} \left(F_2(x) - F_2(c_+) + F_1(c_-)\right) =$$

$$= F_2(c_+) - F_2(c_+) + F_1(c_-) = \underline{F_1(c_-)},$$

tedy F je spojitá i v bodě c. Dále platí $F' = f$ v $(a,b) \setminus K$. *)
konečná množina

Navíc $\underline{[F]_a^b} = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) =$

$$= \lim_{x\to b_-} \left(F_2(x) - F_2(c_+) + F_1(c_-)\right) - \lim_{x\to a_+} F_1(x) =$$

$$= \underbrace{F_2(b_-) - F_2(c_+)}_{[F]_c^b} + \underbrace{F_1(c_-) - F_1(a_+)}_{[F]_a^c} = \underline{[F]_c^b + [F]_a^c}.$$

Tedy $[F]_a^b$ je definován, tzn. že $f \in \mathcal{N}(a,b)$. □

---

*) Tedy $F \in ZPF(f, (a,b))$.

19. přednáška MA 2, šk. r. 2015/16, 26.4.2016

Důsledek 1. Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Pak $\mathcal{N}(a,b)$ je vektorový prostor a zobrazení $f \longmapsto (N)\int_a^b f$ je lineární forma na $\mathcal{N}(a,b)$.

Důsledek 2. Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Jestliže $f, |f| \in \mathcal{N}(a,b)$, pak $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Důkaz. Platí $-|f| \leq f \leq |f|$ na (a,b). Tedy dle Věty 51(ii) máme $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$, tedy $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$. □

Důsledek 3. Je-li $-\infty \leq a \leq c < d \leq b \leq +\infty$ a $f \in \mathcal{N}(a,b)$, pak $f \in \mathcal{N}(c,d)$.

Důkaz: Tvrzení plyne z aditivity Newtonova integrálu. □

Definice. (i) $\int_a^a f := 0$ $\forall$ fci f $\forall a \in \mathbb{R}^*$.

(ii) Je-li $-\infty \leq b < a \leq +\infty$, pak $\int_a^b f := -\int_b^a f$, pokud existuje $\int_b^a f$.

Poznámka. Jestliže $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, pak $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$, má-li RHS smysl.

Poznámka. Nechť $-\infty \leq a < c < b \leq +\infty$ a $ZPF(f,(a,b)) \neq \emptyset$. Pak pro fci $F_c(x) := \int_c^x f$ $\forall x \in (a,b)$ platí $F_c \in ZPF(f,(a,b))$.

Důkaz. Nechť $F \in ZPF(f,(a,b))$. Pak

$\int_c^x f = [F]_c^x = F(x) - F(c)$, je-li $x \in (a,b)$, $x \geq c$,

$\int_c^x f = -\int_x^c f = -[F]_x^c = -(F(c) - F(x)) = F(x) - F(c)$, je-li $x \in (a,b)$, $x < c$.

Tedy $\forall x \in (a,b)$ platí $F_c(x) = F(x) - F(c)$ a odtud ihned plyne dané tvrzení. □

Věta 52 (per partes pro Newtonův integrál). Nechť $-\infty \le a < b \le +\infty$, $F \in ZPF(f, (a,b))$, $G \in ZPF(g, (a,b))$. Pak

(1) $$\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG ,$$

mají-li alespoň dva z napsaných "výrazů" smysl.

Důkaz. **I.** Nechť oba integrály existují. Tedy existují $\Phi \in ZPF(Fg, (a,b))$, $\Psi \in ZPF(fG, (a,b))$ a jsou definovány vlastní přírůstky $[\Phi]_a^b$, $[\Psi]_a^b$. Odtud plyne, že

$$\Phi' = Fg \text{ v } (a,b) \setminus K_1 , \quad \Psi' = fG \text{ v } (a,b) \setminus K_2 \quad (K_i \text{ konečné množiny}, \ i=1,2),$$

a tedy

$$(\Phi+\Psi)' = Fg + fG = (FG)' \text{ v } (a,b) \setminus (K_1 \cup K_2).$$

Protože navíc $\Phi+\Psi,\ FG \in C((a,b))$, platí

$$\Phi+\Psi,\ FG \in ZPF(Fg+fG, (a,b))$$

$$\Rightarrow \quad \Phi+\Psi = FG + c \quad \forall x \in (a,b), \text{ kde } c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \quad [FG]_a^b = [\Phi+\Psi]_a^b = [\Phi]_a^b + [\Psi]_a^b = \int_a^b Fg + \int_a^b fG ,$$

a tedy platí (1).

II. Protože (1) je symetrická vzhledem k f a g, důkaz bude úplný, dokážeme-li (1) za předpokladu, že RHS(1) má smysl. Nechť Ψ je jako v I. Pak

(2) $$\Phi := FG - \Psi \in C((a,b))$$

a platí

(3) $$\Phi' = (FG-\Psi)' = fG + Fg - fG = Fg \text{ v } (a,b) \setminus L,$$

kde L je konečná množina. Tedy $\Phi \in ZPF(Fg, (a,b))$ a platí

$$\underbrace{[\Phi]_a^b}_{\text{dle (3)} \to \text{"} \int_a^b Fg} \overset{(2)}{=} [FG-\Psi]_a^b = [FG]_a^b - [\Psi]_a^b = [FG]_a^b - \int_a^b fG .$$

□

Př. 1. $$\int_0^1 \ln x \, dx = [x \ln x]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{x} \, dx = -\int_0^1 dx = \underline{\underline{-1}}.$$

Věta 53 (o substituci v Newtonově integrálu). Nechť $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$, $-\infty \le a < b \le +\infty$ a $\varphi:(\alpha,\beta) \xrightarrow{na} (a,b)$ je ryze monotónní spojitá fce splňující $0 \ne \varphi'(t) \in \mathbb{R}$ $\forall t \in (\alpha,\beta)\setminus K$, kde K je konečná množina. Pak

(1) $\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\,|\varphi'|$, %.

existuje-li jeden z těchto integrálů.

Důkaz. I. Předpokládejme nejdříve, že φ je rostoucí fce. (%.)

(i) Dokážeme (1) v případě, že LHS(1) má smysl. Z předpokladu máme $\varphi' \ge 0$ v $(\alpha,\beta)\setminus K$ a v (1) lze psát φ' místo $|\varphi'|$.

Protože LHS(1) má smysl, tak existuje $F \in ZPF(f,(a,b))$ s konečnými hodnotami $F(a_+)$, $F(b_-)$. Protože $F \in C((a,b))$, je $G := F\circ\varphi \in C((\alpha,\beta))$. Dále

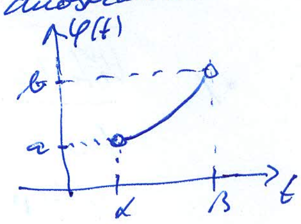
$F' = f$ v $(a,b)\setminus L$, kde $L \subset (a,b)$ je konečná množina.

Podle věty o derivaci složené fce platí

(2) $G' = (F\circ\varphi)' = (f\circ\varphi)\,\varphi'$ v $(a,b)\setminus M$, kde $M := K \cup \varphi^{-1}(L)$ je konečná množina.

Tedy $G = F\circ\varphi \in ZPF((f\circ\varphi)\cdot\varphi', (\alpha,\beta))$.

Podle věty o limitě složené fce (její verze pro jednostranné limity) platí



(3) $G(\alpha_+) = F(a_+)$, $G(\beta_-) = F(b_-)$,

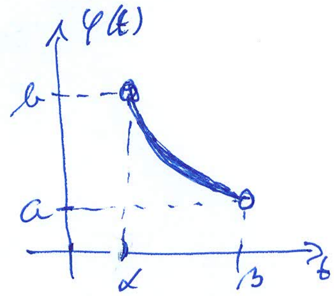
což jsou dle předpokladu konečná čísla. Proto

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi' = [G]_\alpha^\beta = [F]_a^b = \int_a^b f,$$ což je (1).

(ii) Předpokládejme nyní, že RHS(1) má smysl. Pak aplikujeme již dokázané na fci $(f\circ\varphi)\varphi'$ (hraje roli f) a na substituující fci $\varphi^{-1}:(a,b) \xrightarrow{na} (\alpha,\beta)$, která je spojitá a rostoucí v (a,b) a jejíž derivace $(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi'\circ\varphi^{-1}}$ je podle věty o derivaci inverzní fce v $(a,b)\setminus\varphi(K)$ konečná a nenulová.

Je tedy $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi' = \int_a^b (f\circ\varphi\circ\varphi^{-1})\underbrace{(\varphi'\circ\varphi^{-1})\cdot(\varphi^{-1})'}_{=1} = \int_a^b f.$

II. Je-li φ klesající, je důkaz analogický, jen je třeba (3) nahradit rovností



$$G(\alpha_+) = F(b_-), \quad G(\beta_-) = F(a_+).$$

V důsledku toho platí

$$\underbrace{[F]_a^b}_{=\int_a^b f} = G(\alpha_+) - G(\beta_-) = -[G]_\alpha^\beta \overset{\text{cf. (2)}}{=} -\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot\varphi'.$$

Protože však $(-\varphi') = |\varphi'|$ v $(\alpha,\beta)\setminus K$, dostáváme opět (1), má-li jedna strana v (1) smysl. □

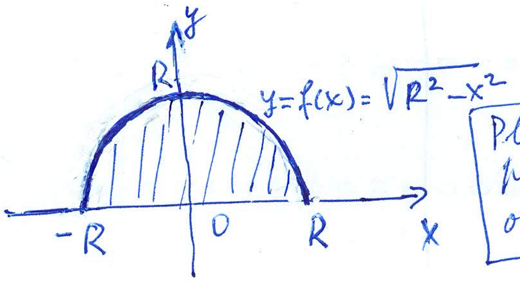
Př. 2. Určete $I := (N)\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,dx$, kde $R\in(0,+\infty)$.

Řešení: Substituce $x = R\sin t =: \varphi(t)$ pro $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) =: (\alpha,\beta)$

φ je rostoucí, spojitá fce v $(\alpha,\beta) = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$dx = R\cos t$, $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$\varphi((\alpha,\beta)) = \varphi((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})) = (-R,R)$



Plocha půlkruhu o poloměru R

Tedy $I = \int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\cdot R\cos t\,dt =$

$= \int_{-R}^{R} R\underbrace{\sqrt{\cos^2 t}}_{=|\cos t| = \cos t \text{ pro } t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} R\cos t\,dt = R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$

$= \frac{R^2}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} - 0\right)\right) = \frac{\pi R^2}{2}$

Věta 54 (srovnávací kritérium pro Newtonův integrál).

(i) Nechť $-\infty < a < b \le +\infty$. Je-li $f \in C(\langle a,b))$, existuje-li $a_1 \in \langle a,b)$ a fce $g:(a_1,b) \to \langle 0,+\infty)$ tak, že $|f| \le g$ v (a_1,b) a $g \in \mathcal{N}(a_1,b)$, pak $f, |f| \in \mathcal{N}(a,b)$.

(ii) Nechť $-\infty \le a < b < \infty$. Je-li $f \in C((a,b\rangle)$, existuje-li $b_1 \in (a,b\rangle$ a fce $g:(a,b_1) \to \langle 0,+\infty)$ tak, že $|f| \le g$ v (a,b_1) a $g \in \mathcal{N}(a,b_1)$, pak $f, |f| \in \mathcal{N}(a,b)$.

Důkaz. ad (i) ((ii) se dokáže analogicky).

Z předpokladů plyne, že $f, |f| \in C(\langle a,x\rangle)$ $\forall x \in (a,b)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f, |f| \in C((a,x)) \cap B((a,x))$ $\forall x \in (a,b) \Rightarrow$

(1) $(N)\int_a^x f$, $(N)\int_a^x |f|$ existují (dle existenční věty 50)

Protože $f, |f| \in C((a,b)) \Rightarrow$ ex. k nim primitivní fce na (a,b), označíme je F, Φ

$\Rightarrow F \in ZPF(f,(a,b))$, $\Phi \in ZPF(|f|,(a,b))$ (2).

Tedy

(3) $$\int_a^x f \underset{\text{dle definice Newton. integrálu}}{=} F(x) - F(a_+) \quad \forall x \in (a,b) \ ^{*)} \overset{\text{dle věty 48}}{\Rightarrow} \int_a^x f \in ZPF(f,(a,b))$$

(obdobně $\int_a^x |f| = \Phi(x) - \Phi(a_+)$ $\forall x \in (a,b) \Rightarrow \int_a^x |f| \in ZPF(|f|,(a,b))$).

Zbývá tedy dokázat, že existují konečné limity $F(b_-)$, $\Phi(b_-)$.

Z předpokladu $g \in \mathcal{N}(a_1,b)$ plyne, že ex. $G \in ZPF(g,(a_1,b))$ a existují konečné limity $G(a_1+)$ a $G(b_-)$.

Buď $\varepsilon > 0$. Fakt $G(b_-) \in \mathbb{R}$ a Věta 49 $\Rightarrow$

(4) $$\exists b_1 \in (a_1,b)\ \forall x', x'',\ b_1 < x' < x'' < b : |G(x') - G(x'')| < \varepsilon.$$

Protože $G' = g \ge 0$ v $(a,b) \setminus \underset{\text{konečná množina}}{K}$, je G neklesající v (a,b).

Tedy $|G(x') - G(x'')| = G(x'') - G(x')$.

Pro $b_1 < x' < x'' < b$ dostáváme

$$|F(x'') - F(x')| \underset{\text{dle (3)}}{=} \left| \int_a^{x''} f - \int_a^{x'} f \right| = \left| \int_{x'}^{x''} f \right| \underset{\text{monotonie (oba } \int_{x'}^{x''} f \text{ a } \int_{x'}^{x''} |f| \text{ ex.)}}{\le} \int_{x'}^{x''} |f| \overset{\text{opět monotonie}}{\le} \int_{x'}^{x''} g =$$

$$= G(x'') - G(x') \underset{\text{dle (4)}}{<} \varepsilon$$

---

*) Z (1) plyne, že $F(a_+) \in \mathbb{R}$.

Dokázali jsme, že fce F splňuje BC-podmínku pro existenci konečné limity $F(b-)$. (Existence konečné limity $\Phi(b-)$ se dokáže obdobně.) %.

Důkaz (ii) je analogický. $\square$

Př. 3. Dokažte, že existuje $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^\alpha}\,dx \quad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall \alpha\in(1,+\infty)$

1. fce $\frac{\sin^n x}{x^\alpha} \in C(\langle 1,+\infty))$
2. $|\sin^n x| = |\sin x|^n \leq 1 \quad \forall x\in\langle 1,+\infty)$ (volím $a_1 = a = 1$ ve Větě 54)

Tedy fce $f(x) = \frac{\sin^n x}{x^\alpha}$ splňuje $|f(x)| \leq g(x) := \frac{1}{x^\alpha} \quad \forall x\in\langle 1,+\infty)$.

3. $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{\overset{<0}{1-\alpha}}}{1-\alpha}\right]_1^{+\infty} = \frac{0-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \in \mathbb{R}.$

$\underset{\text{(dle Věty 54)}}{\Rightarrow}$ $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^\alpha}\,dx$ existuje $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall\alpha\in(1,+\infty)$.

(a také existuje $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin^n x|}{x^\alpha}\,dx$)

Důsledek Věty 54(i). Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f\in C(\langle a,b))$, $0\leq f\leq g$ na (a,b).

I. jestliže ex. $(N)\int_a^b g$, pak ex. $(N)\int_a^b f$.

II. jestliže neexistuje $(N)\int_a^b f$, pak neexistuje $(N)\int_a^b g$.

Důkaz. Část I plyne z Věty 54(i) (s volbou $a_1 = a$).
Část II plyne z části I. (Kdyby totiž $(N)\int_a^b g$ existoval, pak by dle I existoval i $(N)\int_a^b f$. - spor.) $\square$

Věta 55 (vztah mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem).

Jestliže $-\infty<a<b<+\infty$ a $f\in\mathcal{R}(\langle a,b\rangle)\cap\mathcal{N}(a,b)$, pak

(1) $$(R)\int_a^b f=(N)\int_a^b f.$$

Důkaz. Protože $f\in\mathcal{N}(a,b)$, tak ex. $F\in ZPF(f,(a,b))$ a ex. $[F]_a^b=F(b_-)-F(a_+)$ (tyto limity jsou konečné). Položme $F(a):=F(a_+)$, $F(b):=F(b_-)$. Pak $F\in C(\langle a,b\rangle)$ a platí $F'=f$ v $(a,b)\setminus K$, kde $K\subset\langle a,b\rangle$ je konečná množina.

Buď D' dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ určené množinou K,

$$D':\quad a=y_0<\dots<y_p=b.$$

Je-li D zjemnění dělení D',

$$D:\quad a=x_0<x_1<\dots<x_n=b,$$

pak platí

(2) $$(N)\int_a^b f=F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n\left(F(x_i)-F(x_{i-1})\right)\overset{\text{dle Lagrangeovy věty}}{=}\sum_{i=1}^n F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$
$$=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\underbrace{\sigma(f,D,\xi)}_{\text{Riemannův součet}},\ \text{kde } \xi=\{\xi_i\}_{i=1}^n,\ \xi_i\in\langle x_{i-1},x_i\rangle,\ i=1,\dots,n.$$

Buď $\varepsilon>0$. Protože $f\in\mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$, tak existuje dělení D'' intervalu $\langle a,b\rangle$ tak, že $S(f,D'')-s(f,D'')<\varepsilon$. Nechť $D=D'\cup D''$ (tedy D je zjemnění D' i D''). Pak

(3) $$S(f,D)-s(f,D)\le S(f,D'')-s(f,D'')<\varepsilon.$$

Dále platí

$$s(f,D)\le\underbrace{\sigma(f,D,\xi)}_{\text{dle (2)}\ =\ (N)\int_a^b f}\le S(f,D)\overset{\text{dle (3)}}{<}s(f,D)+\varepsilon$$

a také

$$s(f,D)\le(R)\int_a^b f\le S(f,D)<s(f,D)+\varepsilon.$$

Tedy $$\left|(R)\int_a^b f-(N)\int_a^b f\right|<\varepsilon$$ (neboť oba integrály leží v intervalu $\langle s(f,D),\,s(f,D)+\varepsilon\rangle$).

Protože ε bylo libovolné kladné číslo, tak musí platit (1). $\square$

20. přednáška MA2, šk. r. 2015/16, 27.4.2016

Věta 56 (1. věta o střední hodnotě pro integrály)

Buď $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Nechť pro fci g platí $g \geq 0$ v $\langle a,b\rangle \setminus K$, kde K je konečná množina. Jestliže existují $\int_a^b fg$ a $\int_a^b g$, pak existuje $\xi \in \langle a,b\rangle$ tak, že

$$(1) \qquad \int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g.$$

Důkaz. Protože $f \in C(\langle a,b\rangle)$, tak funkce f nabývá v $\langle a,b\rangle$ svého minima $m := \min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ a maxima $M := \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$.

Platí

$$m \leq f \leq M \quad \text{v } \langle a,b\rangle$$

$\Rightarrow$

$$mg \leq fg \leq Mg \quad \text{v } \langle a,b\rangle \setminus K$$

$\Rightarrow$ (2) $\quad m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g \quad$ (existence integrálů se předpokládá).
dle věty o monotonii

Protože $g \geq 0$ v $\langle a,b\rangle \setminus K$, platí $\int_a^b g \geq 0$ (opět dle věty o monotonii).

1) Je-li $\int_a^b g = 0$, pak z (2) plyne, že (1) platí $\forall\, \xi \in \langle a,b\rangle$.

2) Je-li $\int_a^b g \in (0,+\infty)$, pak z (2) dostáváme

$$m \leq \underbrace{\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}}_{=: p \in \mathbb{R}} \leq M.$$

Protože $f \in C(\langle a,b\rangle)$, existuje $\xi \in \langle a,b\rangle$ tak, že $f(\xi) = p$
$\Leftrightarrow$ platí (1). $\square$

Věta 57 (2. věta o střední hodnotě pro integrály).

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in C(\langle a,b \rangle)$. Nechť monotónní fce $g : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ splňuje $g \in ZPF(g', \langle a,b \rangle)$.
Pak existuje $\xi \in \langle a,b \rangle$ tak, že

(3) $$\int_a^b fg = g(a) \int_a^{\xi} f + g(b) \int_{\xi}^b f .$$

Speciálně, je-li g nerostoucí a nezáporná v $\langle a,b \rangle$, pak bod $\xi \in \langle a,b \rangle$ lze volit tak, že

(4) $$\int_a^b fg = g(a) \int_a^{\xi} f .$$

Důkaz. **I.** V obecné části věty lze předpokládat, že g je neklesající. (Kdyby totiž g byla nerostoucí, tak celou úvahu bychom mohli provést s fcí $(-g)$ a na platnost (3) tato změna nemá vliv.)

Funkce

(5) $$F(x) := \int_a^x f , \quad x \in \langle a,b \rangle ,$$

splňuje $F \in ZPF(f, \langle a,b \rangle)$

$\Rightarrow F \in C(\langle a,b \rangle)$.

Navíc $F(a) = 0$ dle (5).

Integrace per partes dává *)

(6) $$\underbrace{\int_a^b fg}_{} = \underbrace{[Fg]_a^b}_{} - \int_a^b Fg' .$$

víme, že tyto výrazy existují – viz *)

Tedy (podle věty o per partes) $\int_a^b Fg'$ existuje a platí (6).

---

*) Per partes lze použít, neboť:
$f \in C(\langle a,b \rangle)$ dle předpokladu, $g \in ZPF(g', \langle a,b \rangle) \Rightarrow g \in C(\langle a,b \rangle)$.

$\Rightarrow fg \in C(\langle a,b \rangle) \Rightarrow \int_a^b fg$ existuje.

Dále

(6½) $$[Fg]_a^b = F(b)g(b) - \underbrace{F(a)}_{=0}g(a) = F(b)g(b) \in \mathbb{R} .$$

Protože g je neklesající v $\langle a,b\rangle$ a $g\in ZPF(g',\langle a,b\rangle)$, platí

(7) $\quad g'\geq 0 \;\; v \;\; \langle a,b\rangle \setminus K,$

kde K je konečná množina.

Protože $F\in C(\langle a,b\rangle)$ a platí (7), tak podle 1. věty o střední hodnotě (použité na Fg' místo na fg) existuje $\xi\in\langle a,b\rangle$ tak, že

(8) $\quad \int_a^b Fg' = F(\xi)\int_a^b g' \underset{\uparrow\text{neb } g\in ZPF(g',\langle a,b\rangle)}{=} F(\xi)\big(g(b)-g(a)\big)$

Dosadíme-li (8) a $(6\frac{1}{2})$ do (6), dostaneme

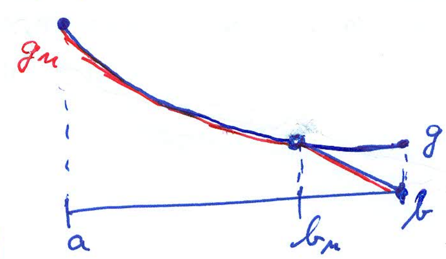
$$\int_a^b fg = F(b)g(b) - F(\xi)\big(g(b)-g(a)\big) =$$
$$= g(a)F(\xi) + g(b)\big(F(b)-F(\xi)\big) =$$
$$= g(a)\int_a^{\xi} f + g(b)\int_{\xi}^b f.$$

Tedy (1) platí a obecná část věty je dokázána.

II. Buď nyní g nerostoucí a nezáporná v $\langle a,b\rangle$.

Zvolme posloupnost bodů $b_n\in(a,b)$ tak, že $b_n\uparrow b$.

Pro každé $n\in\mathbb{N}$ definujme fci $g_n:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ předpisem



*)

(i) $g_n = g$ v $\langle a, b_n\rangle$,

(ii) $g_n(b) = 0$,

(iii) g_n lineární v $\langle b_n, b\rangle$

Snadno zjistíme, že $g_n\in ZPF(g_n',\langle a,b\rangle)$.

Fce g_n je nerostoucí a nezáporná v $\langle a,b\rangle$.

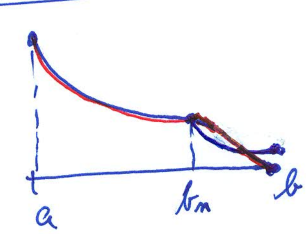
Navíc ovšem platí, že $g_n(a)=g(a)$, $g_n(b)=0$.

Dle obecné části věty tedy existují body $\xi_n\in\langle a,b\rangle$ tak, že

(9) $\quad \int_a^b f g_n = \underbrace{g_n(a)}_{=g(a)}\int_a^{\xi_n} f + \underbrace{g_n(b)}_{=0}\int_{\xi_n}^b f = g(a)\int_a^{\xi_n} f \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

---

*) POZOR: nemusí být $g_n\leq g$ na $\langle a,b\rangle$ – viz



Podle Bolzanovy - Weierstrassovy věty lze z posl. $\{\xi_n\}$ vybrat konvergentní posloupnost. BÚNO lze předpokládat, že již původní posl. $\{\xi_n\}$ je konvergentní. Pak

$$\xi := \lim_{n\to\infty} \xi_n \in \langle a,b\rangle \quad \text{a platí} \quad \int_a^{\xi_n} f \to \int_a^{\xi} f$$

(neb $\int_a^x f \in ZPF(f, \langle a,b\rangle) \Rightarrow \int_a^x f \in C(\langle a,b\rangle)$).

Z (9) tedy máme

(10) $\int_a^b f g_n \to g(a) \int_a^{\xi} f$ pro $n \to \infty$.

Náš cíl: ukázat, že

(11) $\int_a^b f g_n \to \int_a^b f g$.

Protože $f \in C(\langle a,b\rangle)$, je $f \in B(\langle a,b\rangle)$, tzn. že

$$\exists K \in (0,+\infty): \ |f| \leq K \text{ na } \langle a,b\rangle.$$

Všechny hodnoty fcí g, g_n $(n \in \mathbb{N})$ leží mezi 0 a $g(a)$.

Tedy $|g_n - g| \leq g(a) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Protože $g_n = g$ v $\langle a, b_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, platí

$$\left|\int_a^b fg - \int_a^b f g_n\right| = \left|\int_a^b f \underbrace{(g-g_n)}_{=0 \text{ v } \langle a,b_n\rangle}\right| = \left|\int_{b_n}^b f(g-g_n)\right| \leq$$

$$\leq \int_{b_n}^b \underbrace{|f|}_{\leq K} \cdot \underbrace{|g-g_n|}_{\leq g(a)} \leq K \int_{b_n}^b g(a) = K g(a)(b-b_n) \to 0 \text{ pro } n\to\infty.$$

monotonie integrálu

protože $b_n \nearrow b$

Tzn., že platí (11), tj. $\int_a^b f g_n \to \int_a^b f g$.

Podle (10) ale také $\int_a^b f g_n \to g(a) \int_a^{\xi} f$.

Protože posloupnost čísel $\{\int_a^b f g_n\}$ má nejvýše jednu limitu, dostáváme $\int_a^b f g = g(a) \int_a^{\xi} f$. $\square$

Věta 58 (Dirichletovo a Abelovo kritérium). *)

Buď $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f \in C(\langle a, b))$, $g \in ZPF(g, \langle a, b))$, g monotónní v $\langle a, b)$.

I. (Dirichlet) Jestliže

(i) ex. omezená $F \in PF(f, (a, b))$,

(ii) $g(b_-) = 0$,

pak $\int_a^b fg$ existuje.

II. (Abel) Jestliže

(i) ex. $\int_a^b f$,

(ii) $g \in B(\langle a, b))$,

pak $\int_a^b fg$ existuje.

Důkaz. Předpoklady garantují existenci $\int_a^x fg$ $\forall x \in (a, b)$. Stačí tedy ověřit BC podmínku pro existenci konečné limity $\lim_{x \to b_-} \int_a^x fg$ (neboť $\int_a^x fg \in ZPF(fg, (a, b))$).

ad I. Protože g je monotónní a $g(b_-) = 0$, je g buďto nerostoucí a nezáporná, nebo neklesající a nekladná. BÚNO lze předpokládat, že g je nerostoucí a nezáporná (jinak místo fce g vezmu fci $(-g)$).

Buď $\varepsilon > 0$. Protože $F \in B((a, b))$, tak $\exists K \in (0, +\infty)$: $|F| \leq K$ na (a, b).

Zvolme $x_0 \in (a, b)$ tak, že $g(x) < \frac{\varepsilon}{2K}$ $\forall x \in (x_0, b)$. Je-li ./.
$x_0 < x' < x'' < b$, pak dle 2. věty o střední hodnotě pro integrály

$$\exists \xi \in \langle x', x'' \rangle: \left| \int_a^{x''} fg - \int_a^{x'} fg \right| = \left| \int_{x'}^{x''} fg \right| = g(x') \left| \int_{x'}^{\xi} f \right| = \underbrace{g(x')}_{< \frac{\varepsilon}{2K}} \underbrace{|F(\xi) - F(x')|}_{< |F(\xi)| + |F(x')|} < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot 2K = \varepsilon.^{**)}$$

---

*) Platí analogie Dirichletova a Abelova kritéria pro případ kdy $-\infty \leq a < b < +\infty$.

**) Tedy ex. konečná limita $\lim_{x \to b_-} \int_a^x fg$.

ad II. Opět lze předpokládat, že g je nerostoucí, totéž platí i pro fci

(1) $g^* := g - g(b_-)$, navíc $g^* \geq 0$, $g^*(b_-) = 0$.

Dále $\int_a^b f$ existuje $\Rightarrow F \in B((a,b))$.

$F \in PF(f, (a,b)) \Rightarrow F \in C((a,b))$
a z existence $\int_a^b f \Rightarrow F$ má konečné limity $F(a_+)$, $F(b_-)$

Tedy dle Dirichletova kritéria $\int_a^b f g^*$ existuje.

Protože $\underbrace{\int_a^b f g^*}_{ex.} = \int_a^b fg - \int_a^b f g(b_-) = \int_a^b fg - g(b_-) \underbrace{\int_a^b f}_{ex.\ \text{dle předpokladu}}$

$\Rightarrow \int_a^b fg$ existuje. $\square$

Př. 1. Dokažte, že $(N) \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ existuje $\forall \alpha \in (0, +\infty)$.

Řešení. Fce $g(x) := \frac{1}{x^\alpha}$ je klesající na $\langle \pi, +\infty)$,

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$,

$g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \in ZPF\left(\frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}, \langle \pi, +\infty) \right)$,

$f(x) := \sin x \in C(\langle \pi, +\infty))$

$F(x) := -\cos x \in PF(\sin x, (\pi, +\infty))$,

$F \in B((\pi, +\infty))$.

Tedy dle Dirichletova kritéria $(N) \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ existuje $\forall \alpha \in (0, +\infty)$.

Př. 2. Dokažte, že $(N) \int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ neexistuje.

Řešení. Buď $f(x) := \frac{|\sin x|}{x}$, $F(x) := \int_\pi^x f$ $\forall x \in \langle \pi, +\infty)$.

ex. $\forall x \in \langle \pi, +\infty)$, neboť $f \in C(\langle \pi, +\infty))$

Pak $F \in ZPF(f, \langle \pi, +\infty))$.

Tedy existence $(N) \int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ je ekvivalentní s existencí konečné limity $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

Kdyby existovala konečná $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = A \in \mathbb{R}$, pak by také platilo $A = \lim\limits_{n\to\infty} F(n\pi)$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Ovšem $\forall k \in \mathbb{N}$ máme

$$F((k+1)\pi) - F(k\pi) = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \underset{\text{monotonie fce } \frac{1}{x}}{\geq} \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx$$

$$= \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (-1)^k \sin x\,dx = \frac{(-1)^k}{(k+1)\pi}\Big[-\cos x\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi} =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\pi}\Big(\underbrace{\cos(k+1)\pi}_{(-1)^{k+1}} - \underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k}\Big) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\pi}\cdot 2(-1)^{k+1} = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

$$(-1)^{k+1} - (-1)^k = 2(-1)^{k+1}$$

$$\Rightarrow F(n\pi) = \underbrace{F(\pi)}_{=0} + \underbrace{[F(2\pi) - F(\pi)]}_{\geq \frac{2}{(1+1)\pi}} + \dots + \underbrace{[F(n\pi) - F((n-1)\pi)]}_{\geq \frac{2}{(n-1+1)\pi}}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \underset{k+1=j}{=} \frac{2}{\pi}\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(n\pi) \geq \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j} = \frac{2}{\pi}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j} = +\infty.$$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} F(n\pi) = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ (neb F je neklesající, protože $f \geq 0$).

Proto $(N)\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ neexistuje (dle naší definice). (F je neomezená)

(Přitom dle Př. 1 $(N)\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ existuje.)