1. přednáška, MA 4, šk. r. 2016/17, LS, 23. 2. 2017

Metrické prostory III.

Definice. Buď (X, ϱ) metrický prostor. Množina $M \subset X$ se nazývá *řídká* (v X), jestliže $(\overline{M})^0 = \emptyset$.

Poznámka. (i) Protože pro $M \subset X$ platí $\overline{\overline{M}} := \overline{(\overline{M})} = \overline{M}$, je $(\overline{\overline{M}})^0 = (\overline{M})^0$, a tedy

$\overline{M}$ je řídká $\iff$ M je řídká.

(ii) Je-li $M_1 \subset M_2 \subset X$ a M_2 řídká, pak M_1 je řídká (neboť $(\overline{M_1})^0 \subset (\overline{M_2})^0 = \emptyset$, a tedy $(\overline{M_1})^0 = \emptyset$).

Věta 1 (charakterizace řídkých množin). Buď (X, ϱ) metr. prostor, $M \subset X$. PNTJE:

(i) M je řídká,

(ii) $X \setminus \overline{M}$ je hustá, *)

(iii) $\forall$ neprázdná otevřená množina $\Omega \subset X$ obsahuje neprázdnou otevřenou množinu Ω_1 takovou, že $\Omega_1 \cap M = \emptyset$.

Důkaz. (i) $\iff$ (ii): $\forall A \subset X$ platí $X = A^0 \cup \partial A \cup (X \setminus A)^0$ (jedná se o sjednocení disjunktních množin). Odtud pro $A = \overline{M}$ dostáváme

$$X = (\overline{M})^0 \cup \partial \overline{M} \cup (X \setminus \overline{M})^0.$$

Tedy $(\overline{M})^0 = \emptyset \iff X = \partial \overline{M} \cup (X \setminus \overline{M})^0 = \overline{(X \setminus \overline{M})}$, (neb $\partial \overline{M} = \partial (X \setminus \overline{M})$)

tj.

M je řídká $\iff$ $X \setminus \overline{M}$ je hustá.

(i) $\implies$ (iii): Buď M řídká a $\Omega \neq \emptyset$ otevřená. Nechť x je libovolný bod z Ω. Protože $(\overline{M})^0 = \emptyset$, platí $x \notin (\overline{M})^0$, a tedy

(1) $\forall\, \mathcal{U}(x)$: $\mathcal{U}(x) \cap (X \setminus \overline{M}) \neq \emptyset$.

---

*) Připomeňme si (viz MA 2, 22. přednáška):

Definice. Buď (X, ϱ) metr. prostor a $M \subset X$. Řekneme, že je hustá (v X), jestliže $\overline{M} = X$.

Zvolme $U(x)$ takové, že $U(x) \subset \Omega$ (což je možné, neboť Ω je otevřená a $x \in \Omega$).

Z (1) plyne

$$\exists\, y \in \underbrace{U(x)}_{\text{ot.}} \cap \underbrace{(X \setminus \overline{M})}_{\text{ot.}} \quad \dots \text{ ot. množina},$$

tedy

$$\exists\, U(y) \subset U(x) \cap (X \setminus \overline{M})$$

$$\Rightarrow \quad U(y) \cap \overline{M} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad U(y) \cap M = \emptyset .$$

Navíc $U(y) \subset U(x) \subset \Omega$.

Tedy stačí volit $\Omega_1 = U(y)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sporem. Není-li M řídká, je $(\overline{M})^\circ \neq \emptyset$.

Proto $\exists\, x \in \underbrace{(\overline{M})^\circ}_{\text{ot. množina}} \Rightarrow$

(2) $\quad \exists\, U(x) \subset \overline{M}$.

Z (2) plyne pro $\Omega_1 \subset \Omega := U(x)$ platí $\Omega_1 \subset \overline{M}$,
$\forall$ ot. neprázdnou množinu

a tedy jistě $\Omega_1 \cap M \neq \emptyset$. $\square$

Lemma 2 (charakterizace hustých množin). Buď (X, ϱ) metr. prostor, $M \subset X$. Pak M je hustá právě tehdy, jestliže $\forall$ otevřenou neprázdnou množinu $\Omega \subset X$ platí $M \cap \Omega \neq \emptyset$.

Důkaz. (i) Nechť $M \subset X$ je hustá a $\emptyset \neq \Omega$, $\Omega \subset X$ ot. Chceme dokázat, že $M \cap \Omega \neq \emptyset$.

Nechť $x \in \Omega$. Pak $\exists\, U(x) \subset \Omega$ (neb Ω je ot.). Protože M je hustá v X, tak

$$\left.\begin{aligned} &U(x) \cap M \neq \emptyset. \\ \text{Ovšem } \quad &U(x) \cap M \subset \Omega \cap M. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\Omega \cap M \neq \emptyset.}$$

(ii) Nechť $M \cap \Omega \neq \emptyset$ $\forall\, \Omega \subset X$, Ω ot., $\Omega \neq \emptyset$.
Buď $x \in X$ a $U(x)$ libovolné okolí bodu x. Pak pro $\Omega = U(x)$ dle předpokladu je $\emptyset \neq M \cap \Omega = M \cap U(x)$.
Protože $x \in X$ byl libovolný bod a $U(x)$ jeho libovolné okolí, je M hustá v X. $\square$

Lemma 3 (jedna vlastnost hustých množin). Buď (X,ϱ) metr. prostor. Nechť $M \subset X$ je hustá a $\Omega \subset X$ je hustá a otevřená. Pak $M \cap \Omega$ je hustá.

Důkaz. K důkazu hustoty množiny $M \cap \Omega$ použijeme Lemma 2. Nechť $\emptyset \neq G \subset X$, G otevřená. Pak $G \cap \Omega$ je otevřená a neprázdná.

neb průnik dvou ot. množin je ot. množina

neb Ω je hustá

Tedy $M \cap (G \cap \Omega) \neq \emptyset$ (neb M je hustá), tj.

$$G \cap (M \cap \Omega) \neq \emptyset \quad \forall G \subset X \text{ ot.},\ G \neq \emptyset.$$

Proto dle Lemmatu 2 je $M \cap \Omega$ hustá. $\square$

Věta 4 (o sjednocení řídkých množin). Nechť (X,ϱ) je metr. prostor a $M_i \subset X$, $i=1,\dots,n$, $(n \in \mathbb{N})$ jsou řídké množiny. Pak $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ je řídká množina.

Důkaz. Použijeme mat. indukci. Pro $n=1$ věta platí. Nechť věta platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Nechť $M_1,\dots,M_{n+1}$ jsou řídké množiny (v X). Pak dle indukčního předpokladu je množina $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ řídká množina, a tedy (dle Věty 1)

$$(3)\ \begin{cases} X \setminus \overline{\bigcup_{i=1}^{n} M_i} = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{M_i} \text{ je hustá množina}, \\ X \setminus \overline{M_{n+1}} \text{ je hustá množina.} \end{cases}$$

Protože $X \setminus \overline{M_{n+1}}$ je otevřená, tak z (3) (dle Lemmatu 3) plyne, že

$$\underbrace{\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{M_i}\right) \cap \left(X \setminus \overline{M_{n+1}}\right)}_{\overset{\text{de Morgan}}{=} X \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} \overline{M_i} = X \setminus \overline{\bigcup_{i=1}^{n+1} M_i}} \text{ je hustá}.$$

Tudíž, podle Věty 1, množina $\bigcup_{i=1}^{n+1} M_i$ je řídká. $\square$

Příklad 1. Nechť $X = \mathbb{R}$, $\varrho(x,y) = |x-y|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$. Množina racionálních čísel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ je spočetná. Tedy její prvky lze seřadit do posloupnosti $x_1, x_2, \ldots$.

Nechť M_i je množina, která obsahuje pouze bod x_i, $i = 1, 2, \ldots$. Pak množiny M_i, $i \in \mathbb{N}$, jsou řídké (neboť $(\overline{M_i})^0 = \emptyset$). Avšak $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = \mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}$ není řídká v $\mathbb{R}$ (neboť $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \Rightarrow (\overline{\mathbb{Q}})^0 = \mathbb{R} \neq \emptyset$).

Definice. Buď (X,ϱ) metr. prostor. Množina $M \subset X$ se nazývá 1. kategorie (v X), jestliže ex. posloupnost $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ řídkých množin taková, že $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.

Množina $M \subset X$ se nazývá 2. kategorie (v X), jestliže M není 1. kategorie.

Množina $M \subset X$ se nazývá reziduální, jestliže $X \setminus M$ je 1. kategorie.

Příklad 2. Buď $X = \mathbb{R}$, $\varrho(x,y) = |x-y|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$. Pak množina $\mathbb{N}$ přirozených čísel je 1. kategorie v (X,ϱ), neboť $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{i\}$ a množiny $\{i\}$, $i \in \mathbb{N}$, jsou řídké.

Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je také 1. kategorie – viz Příklad 1.

Věta 5 (Baireova). Buď (X,ϱ) neprázdný úplný prostor. Nechť $\Omega_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, jsou otevřené a husté množiny v X. Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ je množina hustá v X.

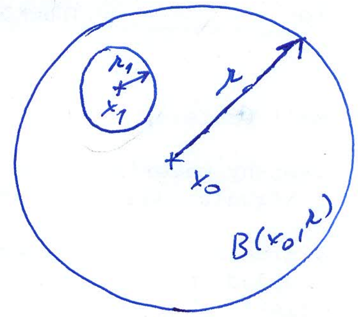
Důkaz. Buď $B(x,r) = \{y \in X;\ \varrho(x,y) < r\}$, $x \in X$, $r > 0$, a $\overline{B}(x,r)$ uzávěr koule $B(x,r)$.

Chceme dokázat, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ je hustá množina v X, tj., že

(4) $\quad \forall x_0 \in X\ \forall r > 0:\ B(x_0,r) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n \neq \emptyset.$

Nechť tedy $x_0 \in X$ a $r>0$. Protože Ω_1 je hustá v X a množina $B(x_0,r)\cap\Omega_1$ je otevřená, $\neq\emptyset$, tedy existuje $x_1\in\Omega_1$ a $r_1\in(0,\frac{r}{2})$ tak, že

(5) $\overline{B}(x_1,r_1)\subset B(x_0,r)\cap\Omega_1$.



Protože $\overline{\Omega_2}=X$ a množina $B(x_1,r_1)\cap\Omega_2$ je ot., $\neq\emptyset$, tak ex. $x_2\in\Omega_2$ a $r_2\in(0,\frac{r}{2^2})$ tak, že

(6) $\overline{B}(x_2,r_2)\subset B(x_1,r_1)\cap\Omega_2$.

Nechť $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ a nechť již jsou určeny x_{n-1} a r_{n-1}. Protože $\overline{\Omega_n}=X$ a množina $B(x_{n-1},r_{n-1})\cap\Omega_n$ je ot., $\neq\emptyset$, tak ex. $x_n\in\Omega_n$ a $r_n\in(0,\frac{r}{2^n})$ tak, že

(7) $\overline{B}(x_n,r_n)\subset B(x_{n-1},r_{n-1})\cap\Omega_n$.

Tímto postupem sestrojíme posloupnost bodů $\{x_n\}$ z X. Z konstrukce plyne, že platí: Je-li $n\in\mathbb{N}$, $i,j\in\mathbb{N}$, $i,j>n$, pak $x_i, x_j\in B(x_n,r_n)$, a tedy

$$\varrho(x_i,x_j)<2r_n<2\frac{r}{2^n}=\frac{r}{2^{n-1}}.$$

Odtud plyne, že $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost bodů z X. Protože X je úplný, existuje $x\in X$ tak, že $x_n\to x$.

Je-li $n\in\mathbb{N}$, $i\in\mathbb{N}$, $i>n$, pak body x_i leží v kouli $B(x_n,r_n)$

$\Rightarrow$ $x\in\overline{B}(x_n,r_n)\subset B(x_1,r_1)\subset B(x_0,r)$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Odtud a z (7) plyne, že $x\in\Omega_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Tedy $x\in B(x_0,r)\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_n$, tj. platí (4). □

Věta 6 (důsledek Baireovy věty). Buď (X,ϱ) neprázdný, úplný metr. prostor. Nechť $M\subset X$ je 1. kategorie. Pak $X\setminus M$ je hustá v X (a tedy neprázdná).

Speciálně, X je 2. kategorie (neboť $\forall$ množina $M\subset X$ 1. kategorie je $X\setminus M\neq\emptyset$).

Důkaz. Nechť $M \subset X$ je 1. kategorie. Pak $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$, kde M_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou řídké v X.

$\Updownarrow$

$X \setminus \overline{M_n}$ jsou husté v X (dle Věty 1)

Přitom $X \setminus \overline{M_n}$ jsou otevřené.

$\Rightarrow$ dle Baireovy věty

$\Rightarrow \underbrace{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus \overline{M_n})}$ je hustá v X

$\overset{\text{de Morgan}}{=} X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{M_n}$, tj. $\overline{X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{M_n}} = X$.

Tedy $\overline{X \setminus M} = \overline{X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n} \supset \overline{X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{M_n}} = X$,

tj. $\overline{X \setminus M} = X$. $\square$

Poznámka. Buď X neprázdná množina a $V(x)$, $x \in X$, výroková forma. Chceme dokázat, že existuje $x \in X$ takové, že platí výrok $V(x)$. Věta 6 nabízí následující postup:

Zvolte metriku ϱ na X tak, aby (X, ϱ) byl úplný metrický prostor a dokažte, že množina

$M := \{x \in X;\ \text{non } V(x)\}$ je 1. kategorie.

Pak dle Věty 6 platí $X \setminus M \neq \emptyset$, tj.

$\exists x \in X$ tak, že platí výrok $V(x)$.

Takto lze např. dokázat existenci fce $f \in C(\langle 0,1 \rangle)$, která nemá v žádném bodě derivaci (za X se volí prostor $C(\langle 0,1 \rangle)$).

2. přednáška, MA4, šk. r. 2016/17, LS, 24. 2. 2017

Věta 7 (Banachova o pevném bodě). Buď (X,ϱ) neprázdný, úplný metrický prostor. Nechť $f: X \to X$ je zobrazení s vlastností:

(1) $\exists\, \alpha \in (0,1)\ \forall x,y \in X:\ \varrho(f(x), f(y)) \le \alpha\, \varrho(x,y)$. *)

Pak $\exists!\, x \in X$ tak, že $f(x) = x$ (tzv. pevný bod zobrazení f).

Důkaz: Buď $x_0 \in X$. Definujme $\{x_n\}$ předpisem

(2) $$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nejprve dokážeme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost bodů prostoru X. Buď $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Pak

(3) $$\varrho(x_n, x_m) \underset{\text{dle (2)}}{=} \varrho(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) = \varrho(f^n(x_0), f^m(x_0)) \le$$

$$\underset{\text{dle (1)}}{\le} \alpha^n \varrho(x_0, f^{m-n}(x_0)) = \alpha^n \varrho(x_0, x_{m-n}) \le$$

$$\le \alpha^n \left[\varrho(x_0, x_1) + \varrho(x_1, x_2) + \ldots + \varrho(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \right]$$

Dále platí

$$\varrho(x_1, x_2) = \varrho(f(x_0), f(x_1)) \le \alpha\, \varrho(x_0, x_1),$$

$$\varrho(x_2, x_3) = \varrho(f^2(x_0), f^2(x_1)) \le \alpha^2 \varrho(x_0, x_1),$$

$$\vdots$$

$$\varrho(x_{m-n-1}, x_{m-n}) = \varrho(f^{m-n-1}(x_0), f^{m-n-1}(x_1)) \le \alpha^{m-n-1} \varrho(x_0, x_1).$$

Odtud a z (3) dostáváme

$$\varrho(x_n, x_m) \le \alpha^n \varrho(x_0, x_1) \left[1 + \alpha + \ldots + \alpha^{m-n-1} \right] =$$

$$= \alpha^n \varrho(x_0, x_1) \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} = \varrho(x_0, x_1) \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1 - \alpha} \le$$

$$\le \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \varrho(x_0, x_1) \to 0 \text{ pro } n \to \infty.$$

Tedy $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v úplném metr. prostoru (X,ϱ).

---

*) Zobrazení f splňující (1) se nazývá kontrakce.

Proto $\exists\, x \in X$ tak, že $x_n \to x$.

Z (1) plyne, že f je spojité zobrazení (neb když $y_n \to y$, pak dle (1) platí $\varrho(f(y_n), f(y)) \leq \alpha\, \varrho(y_n, y) \to 0$, tj. $f(y_n) \to f(y)$).

Proto platí

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Tedy x je pevný bod zobrazení f.

<u>Dokážeme jeho jednoznačnost</u>. Předpokládejme, že také platí $f(y) = y$ pro nějaké $y \in X$. Pak

$$\varrho(\underbrace{f(x)}_{=x}, \underbrace{f(y)}_{=y}) \leq \alpha\, \varrho(x, y),$$

tj. $\varrho(x,y) \leq \alpha\, \varrho(x,y)$. Protože $\alpha \in (0,1)$, je nutně $\varrho(x,y) = 0$, tj. $x = y$. $\square$

<u>Poznámka</u>. Předpis pro získání posl. $\{x_n\}$, tj. $x_n = f(x_{n-1})$, kde $x_0 \in X$ je libovolný bod z X, dává metodu přibližného řešení rovnice $f(x) = x$. Hovoříme o <u>metodě postupných aproximací</u>. Výběr bodu x_0 má pouze vliv na rychlost konvergence posloupnosti $\{x_n\}$.

Odhad chyby n-té aproximace dostaneme limitním přechodem pro $m \to \infty$ v nerovnosti

$$\varrho(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, \varrho(x_0, x_1), \quad m > n,$$

$$\Rightarrow \quad \varrho(x_n, x) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, \varrho(x_0, x_1) \quad \left(\frac{\text{odhad chyby}}{n\text{-té aproximace}}\right).$$

Banachova věta o pevném bodě lze např. použít k důkazu Picardovy věty o existenci a jednoznačnosti (Věta 85, MA 3, 23. přednáška).

Věta (Picardova o existenci a jednoznačnosti).

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $[x,y] \xrightarrow{f} f(x,y)$ je spojité zobrazení množiny Ω do $\mathbb{R}^n$, které je lokálně lipschitzovské v y, tzn.

$\forall [x,y] \in \Omega \ \exists\, U([x,y]) \ \exists\, L \in \mathbb{R} \ \forall [\tilde{x},y^1], [\tilde{x},y^2] \in U([x,y])$:

(4) $$\|f(\tilde{x},y^1) - f(\tilde{x},y^2)\|_{\mathbb{R}^n} \le L \, \|y^1 - y^2\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Je-li $[x_0,y^0] \in \Omega$, pak $\exists!$ maximální řešení y soustavy

(5) $$y' = f(x,y)$$

splňující podmínku

(6) $$y(x_0) = y^0.$$

K důkazu Picardovy věty také použijeme několik následujících tvrzení.

Lemma 8 (ekvivalentní charakterizace řešení Cauchyovy úlohy).

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $[x_0,y^0] \in \Omega$ a nechť $[x,y] \xrightarrow{f} f(x,y)$ je spojité zobrazení množiny Ω do $\mathbb{R}^n$. Pak vektorová funkce $y: I \to \mathbb{R}^n$ řeší na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ obsahujícím bod x_0 soustavu (5) s počáteční podmínkou (6) právě tehdy, když y je spojitá na I, $[x,y(x)] \in \Omega \ \forall x \in I$ a platí

(7) $$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\, dt \quad \forall x \in I.$$

Důkaz. ad "$\Rightarrow$": Buď y řešení Cauchyovy úlohy (5), (6) na intervalu I.

Z rovnosti

(8) $$y'(t) = f(t,y(t)) \quad \forall t \in I$$

plyne, že y je spojitá na I (neb tam má vlastní derivaci). Z věty o spojitosti složeného zobrazení pak dostaneme, že

(9) $f(t,y(t))$, $t \in I$, je spojitá fce na intervalu I.

Tedy $\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$ existuje $\forall x\in I$ a z (8) plyne, že

$$y(x)-\underbrace{y(x_0)}_{=y^0} = \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt \qquad \forall x\in I$$

$$\Leftrightarrow \qquad y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt \qquad \forall x\in I .$$

ad "$\Leftarrow$": Buď y spojité zobrazení s danými vlastnostmi. Z věty o spojitosti složeného zobrazení plyne (9). Proto vektorová fce y splňující (7) má vlastní derivaci $\forall x\in I$ a platí

$$y'(x) = f(x,y(x)) \quad \forall\, x\in I .$$

Dále z (7) plyne, že $y(x_0)=y^0$. Tedy y je řešením úlohy (5), (6). □

Definice. Nechť $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ a $[x,y]\xrightarrow{f} f(x,y)$ je zobrazení množiny Ω do $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že f splňuje v Ω Lipschitzovu podmínku (je v Ω lipschitzovské) vzhledem k y, existuje-li konstanta $L>0$ tak, že platí

$$\| f(x,y^1) - f(x,y^2)\|_{\mathbb{R}^n} \le L\,\|y^1-y^2\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall\,[x,y^1],[x,y^2]\in\Omega .$$

Lemma 9 (o Lipschitzově podmínce). Nechť $\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina. Buď $[x,y]\xrightarrow{f} f(x,y)$ spojité zobrazení množiny Ω do $\mathbb{R}^n$, které je na Ω lokálně lipschitzovské vzhledem k y. Nechť $K\subset\Omega$ je kompaktní množina. Pak f splňuje na K Lipschitzovu podmínku vzhledem k y.

Důkaz. **Sporem.** Buď $K\subset\Omega$ kompaktní množina a nechť f nesplňuje v K Lipschitzovu podmínku vzhledem k y. Pak $\forall m\in\mathbb{N}\ \exists [x_m,y_m],[x_m,z_m]\in K$ tak, že

$$(10)\qquad \|f(x_m,y_m) - f(x_m,z_m)\|_{\mathbb{R}^n} > m\,\|y_m - z_m\|_{\mathbb{R}^n}$$

(a tedy $y_m\neq z_m$ $\forall m\in\mathbb{N}$; jinak by (10) neplatilo).

Protože $f\in C(\Omega)$ a $K\subset\Omega$ je kompaktní, tak platí

$$M := \max_{[x,y]\in K} \|f(x,y)\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty .$$

Odtud a z (10) plyne

$$(11)\quad \|y_m - z_m\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{1}{m}\|f(x_m, y_m) - f(x_m, z_m)\|_{\mathbb{R}^n} \le \frac{2M}{m} \to 0$$
pro $m \to +\infty$.

Protože $[x_m, y_m] \in K$ $\forall m \in \mathbb{N}$ a K je kompaktní, tak existuje vybraná posloupnost $\{[x_{m_k}, y_{m_k}]\}_k$ a bod $[\xi, \eta] \in K$ tak, že

$$[x_{m_k}, y_{m_k}] \to [\xi, \eta] \quad \text{pro } k \to +\infty.$$

Odtud a z (11) plyne, že $[x_{m_k}, z_{m_k}] \to [\xi, \eta]$ pro $k \to +\infty$.
Dle (10) máme

$$(12)\quad \|f(x_{m_k}, y_{m_k}) - f(x_{m_k}, z_{m_k})\|_{\mathbb{R}^n} > m_k \|y_{m_k} - z_{m_k}\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(a $m_k \to +\infty$ pro $k \to +\infty$, neboť $\{m_k\}_k$ je vybraná z $\{m\}_m$).
Protože f je lokálně lipschitzovská vzhledem k y v Ω, $\exists\, \mathcal{U}([\xi,\eta])$ a $L \in (0, +\infty)$ tak, že

$$(13)\quad \|f(x,y) - f(x,z)\|_{\mathbb{R}^n} \le L\|y - z\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall [x,y], [x,z] \in \mathcal{U}([\xi,\eta]).$$

Z faktu, že $[x_{m_k}, y_{m_k}] \to [\xi, \eta]$ a $[x_{m_k}, z_{m_k}] \to [\xi, \eta]$ pro $k \to +\infty$ plyne existence $k_0 \in \mathbb{N}$ takového, že

$$[x_{m_k}, y_{m_k}], [x_{m_k}, z_{m_k}] \in \mathcal{U}([\xi, \eta]) \quad \forall k \in \mathbb{N},\ k \ge k_0.$$

Pak ovšem z (12) a (13) dostaneme

$$m_k \|y_{m_k} - z_{m_k}\|_{\mathbb{R}^n} \overset{(12)}{<} \|f(x_{m_k}, y_{m_k}) - f(x_{m_k}, z_{m_k})\|_{\mathbb{R}^n} \overset{(13)}{\le} L\|y_{m_k} - z_{m_k}\|_{\mathbb{R}^n}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$, odkud ihned plyne, že

$$m_k \le L \quad \forall k \in \mathbb{N},\ k \ge k_0,$$

což je spor, neboť $m_k \to +\infty$ pro $k \to +\infty$. $\square$

Lemma 10 (lokální existence a jednoznačnost). Nechť platí předpoklady Picardovy věty. Pak ex. $h>0$ a vektorová funkce y, která v intervalu (x_0-h, x_0+h) řeší Cauchyovu úlohu (5), (6).

Je-li ψ jiné řešení úlohy (5), (6), definované v otevřeném intervalu J obsahujícím bod x_0, pak $y=\psi$ v nějakém okolí bodu x_0.

Důkaz provedu pro $n=1$ (v obecném případě, kdy $n\in\mathbb{N}$, je důkaz zcela analogický).

Existují čísla $a>0$, $b>0$ tak, že

$$Q=Q(x_0,y^0;a,b):=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ |x-x_0|\le a, |y-y^0|\le b\}\subset\Omega.$$

Protože $f\in C(\Omega)$ a $Q\subset\Omega$ je kompaktní, tak existuje

$\max\limits_{[x,y]\in Q}|f(x,y)|=:M$ (a $M<+\infty$). Podle Lemmatu 9 f splňuje na Q Lipschitzovu podmínku vzhledem k y s konstantou L.

Zvolme nyní $h>0$ tak, aby

$$h\le a\ ,\quad Mh\le b\ ,\quad Lh<1.$$

Buď $C(I)$ prostor všech spojitých funkcí na intervalu $I:=\langle x_0-h, x_0+h\rangle$ s normou $\|\varphi\|:=\sup\limits_{x\in I}|\varphi(x)|$.

Ukážeme, že prostor $C(I)$ je úplný:

Buď $\{\varphi_k\}$ cauchyovská posl. v $C(I)$, tj. platí $\forall\varepsilon>0\ \exists k_0\in\mathbb{N}\ \forall k,l\in\mathbb{N},\ k,l\ge k_0:\ \|\varphi_k-\varphi_l\|<\varepsilon.$

Protože $\|\varphi_k-\varphi_l\|=\sup\limits_{x\in I}|\varphi_k(x)-\varphi_l(x)|$,

vidíme, že $\{\varphi_k\}$ splňuje BC podmínku pro stejnoměrnou konvergenci na intervalu I. Tedy dle Věty 57 (16. přednáška, MA3) ex. fce φ taková, že

(14) $\qquad \varphi_k \rightrightarrows \varphi$ na I.

Protože $\varphi_k\in C(I)$ a platí (14), tak z Věty 54 (15. přednáška, MA3) plyne, že $\varphi\in C(I)$. Dle Věty 53 (15. přednáška, MA3), (14) platí právě tehdy, když

$$c_k:=\sup_{x\in I}|\varphi_k(x)-\varphi(x)|\to 0 \text{ pro } k\to\infty,$$

což je ekvivalentní s podmínkou $\|\varphi_k-\varphi\|\to 0$ pro $k\to\infty$.

Tedy prostor $C(I)$ je úplný!

Nyní ukážeme, že množina

$$E := \{\varphi \in C(I);\ \|\varphi - y^0\| \le b\}$$

je uzavřená v prostoru $C(I)$. Nechť tedy $\varphi_k \to \varphi$ v prostoru $C(I)$ a $\varphi_k \in E$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Pak $\forall k \in \mathbb{N}$ platí

$$\|\varphi - y^0\| \le \|\varphi - \varphi_k\| + \underbrace{\|\varphi_k - y^0\|}_{\le b}$$

a odtud limitním přechodem pro $k \to +\infty$ dostaneme $\|\varphi - y^0\| \le b$, tj. $\varphi \in E$.

Tedy metrický prostor (E, ϱ), kde $\varrho(\varphi, \psi) := \|\varphi - \psi\|$ $\forall \varphi, \psi \in E$, je úplný (neboť E je uzavřená část úplného metrického prostoru $C(I)$).

Definujme nyní na prostoru E zobrazení T předpisem

$T\varphi = \xi$, kde

$$\xi(x) := y^0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \quad \forall x \in I \quad \forall \varphi \in E.$$

KONEC PŘEDNÁŠKY, DODĚLÁM TO PŘÍŠTĚ.

Pak <u>ξ je spojitá fce na intervalu I</u>. Navíc, je-li $\varphi \in E$, pak $[t, \varphi(t)] \in Q$ $\forall t \in I$ (neb $|t - x_0| \le h \le a$, $|\varphi(t) - y^0| \le \|\varphi - y^0\| \le b$ $\forall t \in I$). Tedy $|f(t, \varphi(t))| \le M$ $\forall t \in I$ $\forall \varphi \in E$. Odtud plyne

$$|\xi(x) - y^0| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi(t))|\, dt\right| \le M \left|\int_{x_0}^{x} dt\right| = M \cdot |x - x_0| \le Mh \le b \quad \forall x \in I.$$

Tudíž $\xi \in E$, a proto $T: E \to E$.

<u>Dokážeme, že T je kontrakce na E</u>. Pro $\varphi_1, \varphi_2 \in E$ máme

$$|T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))]\, dt\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} |f(\underbrace{t, \varphi_1(t)}_{\in Q}) - f(\underbrace{t, \varphi_2(t)}_{\in Q})|\, dt\right| \le \quad \text{podle Lipschitzovy podmínky}$$

$$\le L \left|\int_{x_0}^{x} \underbrace{|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|}_{\le \|\varphi_1 - \varphi_2\|}\, dt\right| \le L \|\varphi_1 - \varphi_2\| \underbrace{\left|\int_{x_0}^{x} dt\right|}_{= |x - x_0| \le h} \le$$

$$\le Lh \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

$$\Rightarrow \quad \|T\varphi_1 - T\varphi_2\| = \sup_{x \in I} |T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| \le \underbrace{Lh}_{< 1} \|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in E,$$

tj. T je kontrakce na E.

Tedy dle Banachovy věty o pevném bodě $\exists!$ řešení rovnice $T\varphi = \varphi$ $\iff$

$$\iff \varphi(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \quad \forall x \in I = \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle .$$

Dle Lemmatu 8 je funkce $y := \varphi|_{I^0}$ řešením Cauchyovy úlohy (5), (6).

Buď ψ jiné řešení Cauchyovy úlohy (5), (6) definované na otevřeném intervalu J obsahujícím bod x_0. Nechť $\tilde{h} \in (0, h)$ je takové číslo, že

$$\tilde{I} := \langle x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h} \rangle \subset J$$

(a tedy také $\tilde{I} \subset (x_0 - h, x_0 + h)$, neb $\tilde{h} < h$).

Pak použitím metody z předešlé části důkazu na interval $\tilde{I}$ místo na I dostaneme, že operátor $\tilde{T}$ daný na metrickém prostoru $\tilde{E} := \{\varphi \in C(\tilde{I});\ \|\varphi - y^0\| \le b\}$ předpisem $\tilde{T}\varphi = \xi$, kde

$$\xi(x) := y^0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \quad \forall x \in \tilde{I}\ \forall \varphi \in \tilde{E},$$

má právě jeden pevný bod $\tilde{\varphi} \in \tilde{E}$. Ovšem dle Lemmatu 8 platí, že fce $y|_{\tilde{I}}$ a $\psi|_{\tilde{I}}$ jsou také pevným bodem operátoru $\tilde{T}$. Tedy nutně $y|_{\tilde{I}} = \tilde{\varphi} = \psi|_{\tilde{I}}$, a proto $y = \psi$ na $(x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h})$. $\square$

Poznámka. (i) Důkaz Lemmatu 10 je možné provést i bez použití Lemmatu 9, jestliže nejprve zvolíme $U([x_0,y^0]) \subset \Omega$ tak, že funkce f je v $U([x_0,y^0])$ lipschitzovská vzhledem k y (což lze vzhledem k předpokladům v Picardově větě) a pak volíme čísla $a>0$, $b>0$ tak, aby $Q(x_0,y^0;a,b)\subset U([x_0,y^0])$.

Lemma 8 jsem dokázal proto, abychom si uvědomili souvislost Lipschitzovy podmínky vzhledem k y s její lokální verzí.

(ii) Jestliže $n\in\mathbb{N}$, pak (jak již bylo řečeno) důkaz Lemmatu 10 je zcela analogický jako v případě $n=1$ (místo s prostorem $C(I)$, kde $I=\langle x_0-h, x_0+h\rangle$, je třeba pracovat s prostorem $C(I,\mathbb{R}^n)$, kde normu v prostoru $C(I,\mathbb{R}^n)$ definujeme předpisem

$$\|\varphi\| := \sup_{x\in I}\|\varphi(x)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Lemma 11 (o jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy). Nechť jsou splněny předpoklady Picardovy věty. Buď φ řešení Cauchyovy úlohy (5), (6) definované na ot. intervalu J_φ a ξ řešení této úlohy v ot. intervalu J_ξ. Pak $\varphi=\xi$ na $J_\varphi \cap J_\xi$.

Důkaz. Sporem. Předpokládejme že ex. $\bar{x} \in J_\varphi \cap J_\xi$ tak, že $\varphi(\bar{x}) \neq \xi(\bar{x})$. BÚNO: $\bar{x} > x_0$. Buď

$$M = \{x \in \langle x_0, \bar{x}\rangle;\ \varphi(x) = \xi(x)\}.$$

Pak:

$M \neq \emptyset$, neboť $x_0 \in M$,

M je shora omezená (číslo $\bar{x}$ je horní odhad množiny M).

Buď $\bar{\bar{x}} := \sup M$. Protože φ a ξ jsou spojité fce, platí $\varphi(\bar{\bar{x}}) = \xi(\bar{\bar{x}}) =: \bar{\bar{y}}$. Nyní použijeme Lemma 10 na případ, kdy roli bodu $[x_0,y^0]$ hraje bod $[\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}]$. Dostaneme, že existuje $h>0$ a fce y, která v intervalu $(\bar{\bar{x}}-h, \bar{\bar{x}}+h)$ řeší Cauchyovu úlohu

$(\bar{\bar{5}})$ $\quad y' = f(x,y)$,

$(\bar{\bar{6}})$ $\quad y(\bar{\bar{x}}) = \bar{\bar{y}}$,

a pokud ψ je jiné řešení úlohy $(\bar{\bar{5}})$, $(\bar{\bar{6}})$, definované v otevřeném intervalu J obsahujícím bod $\bar{\bar{x}}$, pak $y=\psi$ v nějakém okolí bodu $\bar{\bar{x}}$.

Protože fce φ a ξ také řeší Cauchyovu úlohu $(\bar{\bar{5}})$, $(\bar{\bar{6}})$, platí tedy $\varphi=\xi$ na jistém okolí bodu $\bar{\bar{x}}$. To je spor s definicí bodu $\bar{\bar{x}}$. $\square$

<u>Důkaz Picardovy věty</u>. Buď φ řešení Cauchyovy úlohy (5), (6) definované na ot. intervalu J_φ obsahujícím bod x_0 a nechť M je množina všech takových řešení.

Dle Lemmatu 10 platí $M \neq \emptyset$. Z Lemmatu 11 máme:

$(*)$ $\quad \varphi_1, \varphi_2 \in M \implies \varphi_1 = \varphi_2$ na $J_{\varphi_1} \cap J_{\varphi_2}$.

Buď $J_y = \bigcup_{\varphi \in M} J_\varphi$ (což je ot. interval obsahující bod x_0) a definujme na intervalu J_y fci y předpisem

$$y(x) = \varphi(x), \text{ pokud } x \in J_\varphi \text{ pro nějaké } \varphi \in M.$$

Z $(*)$ plyne, že definice fce y je korektní.

Je-li $x \in J_y$, pak ex. $\varphi \in M$ tak, že

$$x \in J_\varphi \quad \text{a} \quad y(x) = \varphi(x).$$

Protože $\varphi \in M$, platí

$(2*)$ $\quad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in J_\varphi$,

$(3*)$ $\quad \varphi(x_0) = y^0$.

Z faktu, že $x \in J_\varphi$ a že J_φ je ot. interval plyne, že ex. $U(x)$ tak, že $U(x) \subset J_\varphi$. Odtud a z definice fce y máme $y=\varphi$ na $U(x)$. Tedy $y'=\varphi'$ na $U(x)$. Z uvedeného a z $(2*)$ dostaneme

$$y'(x) = \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) = f(x, y(x)).$$

Protože bod $x \in J_y$ byl libovolný, vidíme, že fce y řeší na J_y

rovnici $y' = f(x,y)$. Dále platí $x_0 \in J_\varphi$, a tedy $y(x_0) = \varphi(x_0) = y^0$. Tudíž fce y je na intervalu J_y řešením Cauchyovy úlohy (5), (6). Z definice fce y pak plyne, že je to řešení maximální. *)

Nyní dokážeme, že maximální řešení úlohy (5), (6) jsou určena jednoznačně. Nechť y_1 a y_2 jsou dvě maximální řešení úlohy (5), (6). Nechť fce y_i je definována na intervalu J_{y_i}, $i = 1, 2$.**) Kdyby $J_{y_1} \setminus J_{y_2} \neq \emptyset$, pak by fce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in J_{y_1} \setminus J_{y_2} \\ y_2(x), & x \in J_{y_2} \end{cases}$$

byla řešením (dané Cauchyovy úlohy) definovaném na intervalu větším než J_{y_2}, což by byl spor s maximalitou y_2. Tedy $J_{y_1} \subset J_{y_2}$. Záměnou role y_1 a y_2 dostaneme $J_{y_2} \subset J_{y_1}$. Proto $J_{y_1} = J_{y_2}$. $\square$

Lemma 12 (vztah mezi soustavou dif. rovnic 1. řádu a diferenciální rovnicí n-tého řádu). Buď $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $g : \Omega \to \mathbb{R}$ funkce definovaná na Ω. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je ot. interval.

Jestliže vektorová fce $z = [z_1, \dots, z_n]$ je na intervalu J řešením soustavy dif. rovnic

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = g(x, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n), \end{cases}$$

pak fce $y := z_1$ je na intervalu J řešením dif. rovnice

$$(\mathrm{II}) \quad y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Naopak, je-li fce y řešením dif. rovnice (II) na intervalu J, pak

**) Z Lemmatu 11 máme, že $y_1 = y_2$ na $J_{y_1} \cap J_{y_2}$.

*) Je dobré si uvědomit, že každé maximální řešení je definováno na ot. intervalu J. Opak spolu s použitím Lemmatu 10, kde roli bodu x_0 by hrál koncový bod intervalu J, by vedl ke sporu s maximalitou řešení.

vektorová fce $z = [z_1, \dots, z_n]$, kde $z_i := y^{(i-1)}$, $i = 1, \dots, n$, je na intervalu J řešením soustavy dif. rovnic (I).

Důkaz. Nechť vektorová fce $z = [z_1, \dots, z_n]$ řeší soustavu dif. rovnic (I) a $y = z_1$. Odtud a z 1. rovnice v (I) máme

$$y' = z_1' = z_2 .$$

Odtud a z 2. rovnice v (I) plyne

$$y'' = z_2' = z_3 .$$

Tímto postupem dostaneme

$$y''' = z_3' = z_4 ,$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)} = z_{n-1}' = z_n ,$$

$$(*) \qquad y^{(n)} = z_n' = g(x, z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Z uvedeného máme

$$z_1 = y , \quad z_2 = y', \dots, z_n = y^{(n-1)} .$$

Odtud a z $(*)$ tedy plyne

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

tj. y řeší rovnici (II).

Předpokládejme nyní, že fce y je na intervalu J řešením dif. rovnice (II) a položme

$$z_1 = y$$
$$z_2 = y'$$
$$\vdots$$
$$z_{n-1} = y^{(n-2)}$$
$$z_n = y^{(n-1)} .$$

Odtud pak plyne

$$z_1' = y' = z_2$$
$$z_2' = y'' = z_3$$
$$\vdots$$
$$z_{n-1}' = y^{(n-1)} = z_n$$

a použijeme-li také (II), dostaneme

$$z_n' = y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = g(x, z_1, z_2, \dots, z_n) .$$

Tedy vektorová fce $z = [z_1, \dots, z_n]$ je řešením soustavy dif. rovnic (I). $\square$

V metrických prostorech (viz MA 3, přednášky 1–3) jsme jsme definovali pojmy kompaktnost, tot. omezenost, separabilita a úplnost a dokázali jsme některé vztahy mezi nimi. Nyní dokážeme další tvrzení týkající se těchto pojmů.

Věta 13 (ještě jedna charakterizace kompaktnosti). Metrický prostor (X, ϱ) je kompaktní právě tehdy, jestliže z každého otevřeného pokrytí prostoru X lze vybrat konečné pokrytí.

Důkaz. ad "$\Rightarrow$": Tato implikace platí dle Věty 11 (Borel), MA 3, 2. přednáška.

ad "$\Leftarrow$": Buď $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posl. bodů z X. Označme $M = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Rozlišíme dva případy.

1) Jestliže M má hromadný bod $x \in X$, pak

$$\forall k \in \mathbb{N} : P(x, \tfrac{1}{k}) \cap M \neq \emptyset,$$

a tedy $\forall k \in \mathbb{N}$ je množina $P(x, \frac{1}{k}) \cap M$ nekonečná.
Buď $k = 1$. Pak ex. $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $x_{n_1} \in P(x, 1)$.
Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ jsou již určena čísla $n_1, \dots, n_{k-1}$. Protože množina $P(x, \frac{1}{k}) \cap M$ je nekonečná, ex. $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k > n_{k-1}$, tak, že $x_{n_k} \in P(x, \frac{1}{k})$. Mat. indukcí tímto postupem dostaneme rostoucí posl. přirozených čísel $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ splňující $x_{n_k} \in P(x, \frac{1}{k})$. Odtud plyne, že $x_{n_k} \to x$ pro $k \to +\infty$.

2) Jestliže M nemá hromadný bod v X, pak

$$\forall x \in X \ \exists r = r(x) > 0 : \quad P(x, r(x)) \cap M = \emptyset .$$

Ovšem $\displaystyle X = \bigcup_{x\in X} U(x, r(x))$, což je otevřené pokrytí prostoru X.
Dle předpokladu tedy ex. konečná množina $K \subset X$ taková, že

$$X \subset \bigcup_{x\in K} U(x, r(x)) .$$

Pak také $\displaystyle M \subset \bigcup_{x\in K} U(x, r(x))$.

Protože ovšem $\displaystyle M \cap \bigcup_{x\in K} P(x, r(x)) = \bigcup_{x\in K} \underbrace{(M \cap P(x, r(x)))}_{=\emptyset} = \emptyset,$

platí MCK. Tedy alespoň jeden prvek se vyskytuje v posloupnosti $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nekonečněkrát, a proto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ obsahuje konstantní, a tedy konvergentní podposloupnost. $\square$

4. přednáška, MA4, šk. r. 2016/17, LS. 3.3.2017

Opakování.

Definice. Metrický prostor (X,ϱ) je *separabilní*, jestliže obsahuje spočetnou hustou podmnožinu.

Příklad. Nechť $-\infty<a<b<+\infty$. Dokažte, že prostor $C(\langle 0,1\rangle)$ s normou $\|f\|:=\sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle}|f(x)|$, $f\in C(\langle a,b\rangle)$, je separabilní.

Důkaz. Buď $f\in C(\langle 0,1\rangle)$ a $\varepsilon>0$. Pak dle Věty 61 (Weierstrass), MA3, 7. přednáška, ex. reálný polynom P takový, že $\|f-P\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k x^k$ a

(1) $$K:=\max\{|x|^k;\ x\in\langle a,b\rangle,\ k\in\{0,1,\dots,n\}\}.$$

Zvolme čísla $b_0,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{Q}$ tak, aby

(2) $$\sum_{k=0}^{n}|a_k-b_k|<\frac{\varepsilon}{2K}.$$

Buď $\tilde{P}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_k x^k$. Pak dle (1) a (2) platí

$$\|P-\tilde{P}\|=\sup_{x\in\langle a,b\rangle}\left|\sum_{k=0}^{n}(a_k-b_k)x^k\right|\le\sup_{x\in\langle a,b\rangle}\sum_{k=0}^{n}|a_k-b_k|\cdot\underbrace{|x|^k}_{\le K}\le$$

$$\le K\sum_{k=0}^{n}|a_k-b_k|<K\cdot\frac{\varepsilon}{2K}=\frac{\varepsilon}{2},$$

a tedy

$$\|f-\tilde{P}\|\le\|f-P\|+\|P-\tilde{P}\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Tudíž množina všech polynomů s racionálními koeficienty je hustá v daném prostoru. Protože tato množina je spočetná, je daný prostor separabilní. □

Věta 14 (o separabilitě podprostoru metr. prostoru). Každá část separabilního metr. prostoru (X,ϱ) je separabilní metrický prostor.

Důkaz. Buď (X,ϱ) separabilní metr. prostor a $M\subset X$. Nechť množina Q je spočetná a hustá v X.

Srovnejme body množiny Q v posloupnost,

$$Q = \{x_1, x_2, \dots\},$$

a uvažujme systém všech okolí $U(x_m, \frac{1}{k})$, kde $m, k \in \mathbb{N}$. Tento systém je spočetný. Je-li $M \cap U(x_m, \frac{1}{k}) \neq \emptyset$, zvolíme bod $z_{m,k} \in M \cap U(x_m, \frac{1}{k})$ a množinu takto získaných bodů označíme symbolem Q_M,

$$Q_M := \{z_{m,k};\ m, k \in \mathbb{N}\} \quad \text{(to je spočetná množina).}$$

Ukážeme, že $\overline{Q_M} = M$.

Buď $x \in M$. Chceme dokázat, že $x \in \overline{Q_M}$, tj., že $\rho(x, Q_M) = 0$. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Protože $\overline{Q} = X$,

$$\exists x_m \in Q:\ \rho(x, x_m) < \frac{1}{n}, \quad \text{tj. } x \in U(x_m, \tfrac{1}{n}).$$

Tedy $M \cap U(x_m, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$, a proto je definován bod $z_{m,n} \in Q_M$, který leží v $U(x_m, \frac{1}{n})$. Odtud máme

$$\rho(x, Q_M) \le \rho(x, z_{m,n}) \le \rho(x, x_m) + \rho(x_m, z_{m,n}) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \to 0$$

pro $n \to +\infty$. Tedy $\rho(x, Q_M) = 0$. □

Z Věty 14 plyne: Dokážeme-li, že existuje neseparabilní část R metr. prostoru (X, ρ), pak prostor (X, ρ) nemůže být separabilní. Neseparabilní část R lze často nalézt pomocí následující věty.

Věta 15 (kritérium neseparability). Buď (R, ρ) metr. prostor a nechť množina R je nespočetná. Existuje-li $\alpha > 0$ tak, že

(3) $\quad \forall x, y \in R,\ x \neq y:\ \rho(x, y) \ge \alpha,$

pak (R, ρ) není separabilní.

Důkaz. Buď $Q \subset R$ a $\overline{Q} = R$. Definujme zobrazení $f: R \to Q$ takto: pro $x \in R$ zvolme $f(x) \in Q$ tak, že platí $\rho(x, f(x)) < \frac{\alpha}{2}$. Takto definované zobrazení f je prosté.

Je-li tedy $f(x)=f(y)$, pak

$$\underline{\underline{\varrho(x,y)}} \le \varrho(x,f(x)) + \varrho(\underbrace{f(x)}_{=f(y)},y) < \frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2} = \underline{\underline{\alpha}}.$$

Tedy podle (3), $x=y$. Proto mohutnost množiny Q je alespoň takové jako mohutnost množiny R. Ovšem R je nespočetná množina, tedy i Q je nespočetná.

Dokázali jsme: Je-li množina Q hustá v R, pak Q je nespočetná. Tudíž R není separabilní. □

Příklad. Nechť $B(\langle 0,1\rangle)$ je množina všech omezených funkcí definovaných na $\langle 0,1\rangle$ a $\|f\| := \sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |f(x)|$, $f\in B(\langle 0,1\rangle)$.
Dokažte, že prostor $(B(\langle 0,1\rangle), \|\cdot\|)$ není separabilní.

Důkaz. Pro $r\in\langle 0,1\rangle$ definujme fci f_r na $\langle 0,1\rangle$ předpisem

$$f_r(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t=r \\ 0 & \text{if } t\neq r \end{cases}$$

a položme $R=\{f_r\,;\ r\in\langle 0,1\rangle\}$. Pak $R\subset B(\langle 0,1\rangle)$ a pro $r_1,r_2\in\langle 0,1\rangle$, $r_1\neq r_2$, platí

$$(*)\quad \|f_{r_1}-f_{r_2}\| = \sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |f_{r_1}(t)-f_{r_2}(t)| = 1,$$

tj. je splněna podmínka (3) Věty 15 s $\alpha=1$.
Protože $\langle 0,1\rangle$ je nespočetná množina a pro $r_1,r_2\in\langle 0,1\rangle$, $r_1\neq r_2$, je $f_{r_1}\neq f_{r_2}$, je i množina R nespočetná.
Z Věty 15 proto plyne, že (R,ϱ), kde ϱ je metrika indukovaná normou $\|\cdot\|$, je neseparabilní metr. prostor.
Odtud a z Věty 14 pak plyne, že $(B(\langle 0,1\rangle), \|\cdot\|)$ není separabilní prostor. □

Definice. Buď (X,ϱ) metr. prostor a $\mathcal{B}$ nějaký systém otevřených množin prostoru X. Řekneme, že $\mathcal{B}$ je báze ot. množin prostoru X, jestliže $\forall$ ot. $\Omega\subset X$ existuje $\mathcal{B}^*\subset\mathcal{B}$ tak, že $\Omega = \bigcup_{G\in\mathcal{B}^*} G$.

Poznámka. Báze ot. množin prostoru X nemusí obsahovat $\emptyset$, neboť sjednocení prázdného systému množin je $\emptyset$.

Věta 16 (charakterizace separabilních prostorů). Metr. prostor je separabilní právě tehdy, když má spočetnou bázi otevřených množin.

Důkaz. ad "$\Rightarrow$": Nechť (X,ϱ) je separabilní metr. prostor a $M \subset X$ je spočetná a hustá v X. Položme

$$\mathcal{B} = \{U(x,r);\ x \in M,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}.$$

Množina $M \times \mathbb{Q}$ je spočetná (viz Lemma 23 (o kartézském součinu spočetných množin), MA1, 6. přednáška). Systém $\mathcal{B}$ je obrazem množiny $M \times \mathbb{Q}$ při zobrazení $[x,r] \xrightarrow{f} U(x,r)$, a tedy je spočetný (dle Lemmatu 21 (o obrazu spočetné množiny), MA1, 6. přednáška).

Dokážeme, že systém $\mathcal{B}$ je báze ot. množin prostoru X. Množiny v $\mathcal{B}$ jsou otevřené (jsou to okolí bodu x). Buď $\Omega \subset X$ ot. množina, $\Omega \neq \emptyset$. Nechť

$$\mathcal{B}^* = \{G \in \mathcal{B},\ G \subset \Omega\}.$$

Odtud plyne, že $\bigcup_{G \in \mathcal{B}^*} G \subset \Omega$. Dokážeme opačnou inkluzi. Buď $x \in \Omega$. Pak $\exists\, \delta > 0$ tak, že $U(x,\delta) \subset \Omega$. Protože $\overline{M} = X$, tak $\exists\, y \in M \cap U(x,\frac{\delta}{4})$. Buď $r \in (\frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{2}) \cap \mathbb{Q}$. Pak $\varrho(x,y) < \frac{\delta}{4}$, a tedy $x \in U(y,\frac{\delta}{4}) \subset U(y,r)$. Dále $\forall z \in U(y,r)$ platí

$$\varrho(x,z) \leq \varrho(x,y) + \varrho(y,z) < \frac{\delta}{4} + r < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} < \delta,$$

a tedy $U(y,r) \subset U(x,\delta) \subset \Omega$. Odtud plyne, že $U(y,r) \in \mathcal{B}^*$. Protože $x \in U(y,r)$, je $x \in \bigcup_{G \in \mathcal{B}^*} G$. Ovšem x byl libovolný bod z Ω. Tedy $\Omega \subset \bigcup_{G \in \mathcal{B}^*} G$ a důkaz rovnosti $\Omega = \bigcup_{G \in \mathcal{B}^*} G$ je dokončen. Z uvedeného plyne, že $\mathcal{B}$ je báze ot. množin prostoru X.

ad "$\Leftarrow$": Buď $\mathcal{B} = \{G_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ spočetná báze neprázdných ot. množin prostoru (X,ϱ). Zvolme $\forall n \in \mathbb{N}$ bod $x_n \in G_n$ a položme

$M = \{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Pak M je spočetná. Dokážeme, že M je hustá v X. Dle Lemmatu 2 (1. přednáška) stačí dokázat, že $\forall$ ot. množinu $\Omega \neq \emptyset$ platí $\Omega \cap M \neq \emptyset$.

Buď tedy $\Omega \subset X$ ot. neprázdná množina. Pak ex. $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ tak, že $\Omega = \bigcup\limits_{G_n \in \mathcal{B}^*} G_n$. Proto existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $G_n \subset \Omega$. Odtud ihned máme (dle volby x_n), že $x_n \in \Omega$, a tedy $x_n \in \Omega \cap M$. Tudíž $\Omega \cap M \neq \emptyset$. $\square$

Lemma 17 (o otevřených a uzavřených množinách v podprostoru metrického prostoru). Buď (X, ϱ) metr. prostor, $M \subset X$, $A \subset M$. Pak platí:

(i) $\overline{A}^M = \overline{A}^X \cap M$.

(ii) Množina A je uzavřená v M právě tehdy, existuje-li množina $B \subset X$ uzavřená v X tak, že $A = B \cap M$.

(iii) Množina A je otevřená v M právě tehdy, existuje-li množina $B \subset X$ otevřená v X tak, že $A = B \cap M$.

Důkaz. ad (i): $\left.\begin{array}{l} \overline{A}^X = \{x \in X;\ \varrho(x, A) = 0\} \\ \overline{A}^M = \{x \in M;\ \varrho(x, A) = 0\} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A}^M = \overline{A}^X \cap M.$

ad (ii): "$\Rightarrow$": Protože $A = \overline{A}^M$ a dle (i) $\overline{A}^M = \overline{A}^X \cap M$, stačí volit $B = \overline{A}^X$.

"$\Leftarrow$": Nechť tedy $A = B \cap M$, kde $B \subset X$ je uzavřená v X.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pak } \overline{A}^M \subset \overline{A}^X \underset{\uparrow \text{ neb } A \subset B \text{ a } B \text{ je uzavřená v } X}{\subset} B \\ \overline{A}^M \subset M \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overline{A}^M \subset B \cap M \underset{\uparrow \text{dle předpokladu}}{=} A \Rightarrow A = \overline{A}^M$, tedy A je uzavřená v M.

ad (iii). $A \subset M$ otevřená v M $\Leftrightarrow$ $M \setminus A$ je uzavřená v M

$\underset{\uparrow \text{dle (ii)}}{\Leftrightarrow}$ $\exists C \subset X$ uzavřená v X tak, že platí

$(*)\quad M \setminus A = C \cap M.$

Položme $B = X \setminus C$. Pak $B \subset X$ je otevřená v X a z $(*)$ plyne

$$(2*)\quad \underline{\underline{B\cap M}} \underset{\uparrow\,\text{dle definice } B}{=} (X\setminus C)\cap M = M\setminus C = M\setminus(C\cap M) \underset{\uparrow\,\text{dle}(*)}{=} M\setminus(M\setminus A) = \underline{\underline{A}}.$$

Naopak, platí-li (2*), pak

$$\underline{\underline{M\setminus A}} \underset{\uparrow\,\text{dle}(2*)}{=} M\setminus(B\cap M) = M\setminus B = \underbrace{(X\setminus B)}_{=C}\cap M = \underline{\underline{C\cap M}},\ \text{tj. platí } (*).$$

Tedy $A\subset M$ je otevřená v M $\Longleftrightarrow$ $\exists\, B\subset X$ otevřená v X tak, že platí $A=B\cap M$. $\square$

5. přednáška, MA4, šk. r. 2016/17, LS, 9. 3. 2017

Důsledek Lemmatu 17. Buď (X,ϱ) metr. prostor, $A\subset M\subset X$. Je-li A otevřená (uzavřená) v M a M otevřená (uzavřená) v X, pak A je otevřená (uzavřená) v X.

Důkaz. Dle Lemmatu 17 je A otevřená (uzavřená) v M právě tehdy, existuje-li otevřená (uzavřená) množina $B\subset X$ tak, že $A=B\cap M$. Je-li M otevřená (uzavřená) v X, pak $B\cap M$ je průnik dvou otevřených (uzavřených) množin v X, což je otevřená (uzavřená) množina v X. $\square$

Poznámka. Lemma 17 (iii) a Věta 16 lze použít k jinému důkazu Věty 14, která tvrdí: Je-li (X,ϱ) separabilní metr. prostor a $M\subset X$, pak (M,ϱ) je separabilní.

Je-li totiž (X,ϱ) separabilní metr. prostor a $\mathcal{B}=\{\Omega_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ jeho spočetná báze ot. množin, pak $\mathcal{B}_M:=\{\Omega_n\cap M;\ n\in\mathbb{N}\}$ je spočetná báze ot. množin v prostoru (M,ϱ). *) To plyne takto: Je-li $A\subset M$ otevřená v M, pak dle Lemmatu 17 (iii) existuje $B\subset X$ otevřená v X tak, že $A=B\cap M$. Dále platí, že ex. $\mathcal{B}^*\subset\mathcal{B}$ tak, že $B=\bigcup_{\Omega_n\in\mathcal{B}^*}\Omega_n$. Pak ale

$$A=B\cap M=\Big(\bigcup_{\Omega_n\in\mathcal{B}^*}\Omega_n\Big)\cap M=\bigcup_{\Omega_n\in\mathcal{B}^*}\underbrace{(\Omega_n\cap M)}_{\text{prvky ze systému } \mathcal{B}_M}.$$

Tedy $\mathcal{B}_M$ je skutečně spočetná báze ot. množin v prostoru (M,ϱ). Z Věty 16 pak plyne separabilita prostoru (M,ϱ).

Souvislé prostory a množiny

Definice. Buď (X,ϱ) metr. prostor. Řekneme, že množina $A\subset X$ je *obojetná* (v X), je-li zároveň otevřená i uzavřená (v X).

Př. Buď $X=\mathbb{R}$, $\varrho(x,y)=|x-y|\ \forall x,y\in X$. Nechť $M=(0,1)\cup[2,4]$, $A=[2,4]$. Pak $\overline{A}^X=A$ (tedy A je uzavřená v X). Odtud plyne, že $\overline{A}^M=\overline{A}^X\cap M=A\cap M=A$, tedy A je uzavřená v M. Dále

$$A=\underbrace{(1{,}5\ ,\ 4{,}5)}_{\text{ot. v } X}\cap M\ \underset{\text{dle Lemmatu 17 (iii)}}{\Longrightarrow}\ A \text{ je otevřená v } M.$$

Tudíž A je obojetná v M.

Označíme-li $B:=(0,1)=M\setminus A$, pak B je také obojetná v M (neboť je

*) množiny $\Omega_n\cap M$, $n\in\mathbb{N}$, jsou otevřené v M dle Lemmatu 17 (iii).

doplňkem v M množiny, která je zároveň otevřená i uzavřená v M).

Definice. Buď (X,ρ) metr. prostor, $A,B\subset X$. Řekneme, že množiny A,B jsou oddělené, jestliže $\overline{A}\cap B=\emptyset=A\cap\overline{B}$.

Př. Buď $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|x-y|$ $\forall x,y\in X$, $A=(0,1)$, $B=(1,2)$.
Pak množiny A,B jsou oddělené v X, neboť

$$\overline{A}\cap B=\langle 0,1\rangle\cap(1,2)=\emptyset=(0,1)\cap\langle 1,2\rangle=A\cap\overline{B}.$$

Věta 18 (vlastnosti oddělených množin). Buď (X,ρ) metrický prostor, $A,B\subset X$. Pak platí:

(i) A,B jsou oddělené (v X) $\Rightarrow A\cap B=\emptyset$ (tj. A,B jsou disjunktní).

(ii) A,B jsou oddělené (v X), $A_1\subset A$, $B_1\subset B$, pak A_1,B_1 jsou oddělené (v X).

Nechť navíc $M=A\cup B$. Pak platí:

(iii) $\overline{A}\cap B=\emptyset=A\cap\overline{B} \iff \overline{A}^M\cap B=\emptyset=A\cap\overline{B}^M$

(tj. platí: A,B jsou oddělené v X $\iff$ A,B jsou oddělené v M).

(iv) A,B jsou oddělené (v X) $\iff$ A,B jsou disjunktní a uzavřené v M.

(v) A,B jsou oddělené (v X) $\iff$ A,B jsou disjunktní a otevřené v M.

(vi) A,B jsou oddělené (v X) $\iff$ A,B jsou disjunktní a obojetné v M.

Důkaz. (i) ... to je triviální

ad (ii): nechť $\overline{A}\cap B=\emptyset=A\cap\overline{B}$. Protože $\overline{A_1}\subset\overline{A}$ a $\overline{B}_1\subset\overline{B}_1$, tak platí

$$\overline{A_1}\cap B_1\subset\overline{A}\cap B=\emptyset,$$
$$A_1\cap\overline{B_1}\subset A\cap\overline{B}=\emptyset,$$

odkud ihned plyne $\overline{A_1}\cap B_1=\emptyset=A_1\cap\overline{B_1}$.

ad (iii): Je-li $E\subset X$, označme $E^c=X\setminus E$. Platí

$$\overline{A}=\overline{A}\cap X=\overline{A}\cap(\underbrace{M\cup M^c}_{=X})=(\underbrace{\overline{A}\cap M}_{=\overline{A}^M})\cup(\underbrace{\overline{A}\cap M^c}_{=\overline{A}^{M^c}})=\overline{A}^M\cup\overline{A}^{M^c}.$$

Tedy $\overline{A}\cap B=(\overline{A}^M\cup\overline{A}^{M^c})\cap B=(\overline{A}^M\cap B)\cup(\underbrace{\overline{A}^{M^c}\cap B}_{=\emptyset})=\overline{A}^M\cap B$

$=\emptyset$, neboť $\overline{A}^{M^c}\subset M^c$ a $B\cap M^c=\emptyset$ neboť $B\subset M$

a zaměníme-li roli A a B, dostaneme

$$A\cap\overline{B}=A\cap\overline{B}^M.$$

Tedy $\overline{A}\cap B=\emptyset=A\cap\overline{B}\iff\overline{A}^M\cap B=\emptyset=A\cap\overline{B}^M$,
což dokazuje (iii).

ad (iv). Nechť A, B jsou oddělené v X. Z (iii) máme, že A, B jsou oddělené v M. Tedy

(*) $\qquad \overline{A}^M \cap B = \emptyset \quad \wedge \quad A \cap \overline{B}^M = \emptyset$.

Protože $\overline{A}^M \subset M = A \cup B$ a (dle (*)) $\overline{A}^M \cap B = \emptyset$, platí $\overline{A}^M \subset A$, a tedy $\overline{A}^M = A$.

Analogicky se dokáže, že $\overline{B}^M = B$.

Tudíž A a B jsou uzavřené v M. Z (i) plyne, že A a B jsou disjunktní.

Naopak, jsou-li A a B disjunktní a uzavřené v M, pak

$$\underbrace{\overline{A}^M \cap B = A \cap B}_{\text{neb } \overline{A}^M = A} = \emptyset \quad , \quad \underbrace{A \cap \overline{B}^M = A \cap B}_{\text{neb } B = \overline{B}^M} = \emptyset ,$$

což znamená, že A, B jsou oddělené.

ad (v): Toto tvrzení plyne z (iv) a z faktu, že

$A = M \setminus B \quad , \quad B = M \setminus A$ (tedy A je otevřená v M, neb A je v M doplňkem uzavřené množiny B; obdobně B je otevřená v M, neb je v M doplňkem uzavřené množiny A).

ad (vi): Toto tvrzení plyne z (iv) a (v). □

Definice. Metrický prostor (X, ρ) nazýváme souvislým, není-li sjednocením dvou neprázdných oddělených množin. Množina $M \subset X$ se nazývá souvislá, je-li (M, ρ) souvislý metr. prostor.

Poznámka. Jednobodová množina je souvislá v každém metr. prostoru.

Věta 19 (souvislé množiny v $\mathbb{R}$). Neprázdná množina $M \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$ je souvislá $\iff$ M je interval (i zvrhlý, tj. jednobodová množina).

Důkaz. Buď M množina v $\mathbb{R}$ obsahující alespoň 2 body (jinak je tvrzení jasné).

I. Nechť M není interval. Buď $\alpha = \inf M$, $\beta = \sup M$. Protože M má alespoň 2 body, je $\alpha < \beta$. Protože M není interval, existuje c tak, že $\alpha < c < \beta \ \wedge \ c \notin M$. Pak

(1) $\qquad M \subset \underbrace{(M \cap (-\infty, c))}_{=:A} \cup \underbrace{(M \cap (c, +\infty))}_{=:B}$.

Množiny A a B jsou neprázdné (což plyne z definice infima a suprema)

a oddělené (neboť intervaly $(-\infty, c)$ a $(c, +\infty)$ jsou oddělené).
Přitom dle (1) platí $M = A \cup B$, a tedy <u>M není souvislá</u>.

II. <u>Nechť M je interval.</u> Předpokládejme, že M není souvislá.
Tedy $M = A \cup B$, kde $A \neq \emptyset \neq B$, $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$. $\boxed{*}$
Zvolme $a \in A$, $b \in B$ a zvolme označení tak, že $a < b$.

Nechť $\sigma := \sup (A \cap \langle a, b \rangle)$. Protože $a, b \in M$ a M je interval, tak platí $\langle a, b \rangle \subset M$. Z definice čísla σ plyne, že
$$a \leq \sigma \leq b.$$

Je-li $\sigma \in A$, je $\sigma \neq b$ (neb $b \in B$ a platí $A \cap B = \emptyset$). Tedy $\sigma < b$. Protože $\langle a, b \rangle \subset M$, tak z definice suprema σ a z rovnosti $M = A \cup B$ plyne, že $(\sigma, b) \subset B$. Odkud máme, že $\sigma \in \overline{(\sigma, b)} \subset \overline{B}$. Tedy $\sigma \in A \cap \overline{B} \overset{\text{dle } \boxed{*}}{=} \emptyset$ – spor.

Je-li $\sigma \in B$, pak ex. $x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, tak, že $x_n \to \sigma$ (což plyne z definice suprema). Tedy $\sigma \in \overline{A}$. Tudíž
$$\sigma \in B \cap \overline{A} \overset{\text{dle } \boxed{*}}{=} \emptyset \text{ – spor.}$$

Proto M je souvislá.

<u>Závěr</u>: M je souvislá $\Leftrightarrow$ M je interval. $\square$

<u>Věta 20 (vlastnosti souvislých množin)</u>. Buď (X, ρ) metr. prostor.

(i) Je-li $M \subset X$ souvislá množina a $M \subset N \subset \overline{M}^X$, pak N je souvislá množina.

(ii) Jsou-li $M_\gamma \subset X$, $\gamma \in \Gamma$, souvislé množiny a $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma \neq \emptyset$, pak $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$ je souvislá množina.

<u>Důkaz</u>. <u>ad (i)</u>: <u>Předpokládejme, že N není souvislá.</u> Pak

(2) $$N = A \cup B, \text{ kde } A \neq \emptyset \neq B \text{ a } \overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}.$$

Poznamenejme, že z (2) plyne

(3) $$N \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ N \cap B \neq \emptyset.$$

Pak

(4) $$M = \underbrace{(M \cap A) \cup (M \cap B)}_{\text{oddělené množiny (neb jsou částí oddělených množin } A \text{ a } B)}.$$

Protože M je souvislá, je buďto $M \cap A = \emptyset$, nebo $M \cap B = \emptyset$.

Ovšem

$$M \cap A = \emptyset \Rightarrow M \subset B \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{B} \Rightarrow N \subset \overline{B} \overset{\text{dle (2)}}{\Rightarrow} N \cap A = \emptyset,$$

to plyne z (2) a faktu, že $M \subset N$

neb $N \subset \overline{M}$ dle předpokladu

což je **spor** s (3).

Obdobně

$$M \cap B = \emptyset \Rightarrow M \subset A \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{A} \Rightarrow N \subset \overline{A} \Rightarrow N \cap B = \emptyset,$$

což je **spor** s (3).

Tudíž N je souvislá.

ad (ii): Předpokládejme, že $M := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$ není souvislá.

Pak $M = A \cup B$, kde A, B jsou neprázdné a oddělené.

Dle předpokladu ex. $a \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$ $(\subset M = A \cup B)$.

BÚNO $a \in A$ (tak značím označení množin A, B).

Protože $B \neq \emptyset$, tak ex. $b \in B$. Tedy ex. $\gamma_0 \in \Gamma$ tak, že $b \in M_{\gamma_0}$.

Ovšem také $a \in M_{\gamma_0}$ (neb $a \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$). Pak

$$M_{\gamma_0} = M_{\gamma_0} \cap M = M_{\gamma_0} \cap (A \cup B) = (M_{\gamma_0} \cap A) \cup (M_{\gamma_0} \cap B). \text{ — spor.}$$

souvislá množina.

oddělené množiny (neb A a B jsou oddělené); přitom jsou neprázdné, neb $a \in M_{\gamma_0} \cap A$, $b \in M_{\gamma_0} \cap B$

Tedy $M = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$ je souvislá množina. □

V MA3, 3. přednáška, jsme dokázali:

Věta 12 (charakterisace spojitosti zobrazení). Nechť (X, ρ), (Y, σ) jsou metr. prostory a $f: X \to Y$ zobrazení definované na X. PNTJE:

(i) f je spojité na X.

(ii) $\forall$ ot. množinu G v prostoru (Y, σ) je množina $f_{-1}(G)$ ot. v prostoru (X, ρ).

(iii) $\forall$ uzavřenou množinu F v prostoru (Y, σ) — " — $f_{-1}(G)$ uzavřená — " — .

Tato věta je speciální případ následující Věty 21. (Volíme-li $M = X$ ve Větě 21, dostaneme Větu 12 z MA3.)

Věta 21 (charakterizace zobrazení spojitého na množině).

Nechť (X,ρ), (Y,σ) jsou metr. prostory, $M\subset X$ a $f: X\to Y$ zobrazení splňující $M\subset D(f)$. PNTJE:

(i) f je spojité na množině M (tj: f je spojité v každém bodě $x\in M$ vzhledem k M).

(ii) $\forall$ ot. množinu G v prostoru (Y,σ) je množina $M\cap f_{-1}(G)$ otevřená v M.

(iii) $\forall$ uzavřenou množinu F v prostoru (Y,σ) je množina $M\cap f_{-1}(F)$ uzavřená v M.

KONEC PŘEDNÁŠKY, Důkaz uděláme příště.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nechť G je ot. v (Y,σ) a $x\in M\cap f_{-1}(G)$.

Pak $f(x)\in G$, G je ot. v (Y,σ), a tedy

(5) $\exists\varepsilon>0:\ U_Y(f(x),\varepsilon)\subset G.$

Protože f je spojité v bodě x vzhledem k M, tak

$$\exists\delta>0:\ f(U_X(x,\delta)\cap M)\subset U_Y(f(x),\varepsilon),$$

odkud plyne

$$U_X(x,\delta)\cap M\subset f_{-1}(U_Y(f(x),\varepsilon))\underset{\text{dle (5)}}{\subset} f_{-1}(G).$$

$$\Rightarrow \underbrace{U_X(x,\delta)\cap M}_{\text{okolí bodu } x \text{ v metr. prostoru } (M,\rho)}\subset M\cap f_{-1}(G).$$

Tedy množina $M\cap f_{-1}(G)$ obsahuje s každým bodem i jeho okolí v prostoru (M,ρ), tzn., že $M\cap f_{-1}(G)$ je otevřená v M.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nechť $x\in M$ a $\varepsilon>0$. Pak $U_Y(f(x),\varepsilon)$ je ot. množina v (Y,σ) obsahující bod $f(x)$. Tedy dle (ii) je $M\cap f_{-1}(U_Y(f(x),\varepsilon))$ množina otevřená v M (která ovšem obsahuje bod x). Tudíž ex. $\delta>0$ tak, že

$$U_X(x,\delta)\cap M\subset M\cap f_{-1}(U_Y(f(x),\varepsilon)),$$

a tedy $f(U_X(x,\delta)\cap M)\subset U_Y(f(x),\varepsilon)$,

tj. f je spojité v bodě x vzhledem k M. Protože $x\in M$ byl libovolný bod, je f spojité na M.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Buď $F\subset Y$ uzavřená. Protože $\underbrace{D(f)}_{=f_{-1}(Y)}\supset M$, platí $f_{-1}(Y)\supset M$. Tedy

$$\underbrace{M\cap f_{-1}(\underbrace{Y\setminus F}_{\text{ot. v } Y})}_{\text{ot. v } M \text{ dle (ii)}} = M\cap(f_{-1}(Y)\setminus f_{-1}(F)) = (\underbrace{M\cap f_{-1}(Y)}_{=M,\ \text{neb } f_{-1}(Y)\supset M})\setminus(M\cap f_{-1}(F)) = M\setminus(M\cap f_{-1}(F)),$$

tj. $M \cap f_{-1}(Y \setminus F) = M \setminus (M \cap f_{-1}(F))$.

$\Rightarrow \quad \underline{M \cap f_{-1}(F)} = M \setminus (\underbrace{M \cap f_{-1}(Y \setminus F)}_{\text{ot. v } M})$ ... uzavřená v M.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Buď $G \subset Y$ otevřená. Pak $F := Y \setminus G$ je uzavřená v Y. Tedy dle (iii) platí

$$\underbrace{M \cap f_{-1}(F)}_{\text{uzavřená v } M} = M \cap f_{-1}(Y \setminus G) = M \cap \left(f_{-1}(Y) \setminus f_{-1}(G)\right) =$$

$$= \underbrace{\left(M \cap f_{-1}(Y)\right)}_{= M \text{ neb } f_{-1}(Y) = D(f) \supset M} \setminus \left(M \cap f_{-1}(G)\right) = M \setminus \left(M \cap f_{-1}(G)\right)$$

$\Rightarrow \quad M \cap f_{-1}(G) = M \setminus (\underbrace{M \cap f_{-1}(F)}_{\text{uzavřená v } M})$ ... otevřená v M. $\square$

6. přednáška, MA 4, šk. r. 2016/17, LS, 10. 3. 2017

Věta 22 (o spojitém obrazu souvislé množiny). Nechť (X,ϱ), (Y,σ) jsou metrické prostory a $f: X \to Y$ zobrazení spojité na souvislé množině $M \subset X$. Pak $f(M)$ je souvislá množina.

Důkaz. Sporem. Nechť $f(M)$ není souvislá. Pak $f(M) = A \cup B$, kde A, B jsou neprázdné, disjunktní otevřené množiny v $f(M)$. Pak

(1) $$M = M \cap f_{-1}(\underbrace{f(M)}_{=A\cup B}) = M \cap f_{-1}(A \cup B) = (M \cap f_{-1}(A)) \cup (M \cap f_{-1}(B)).$$

Dle předchozí věty (kde za X a Y vezmu M a $f(M)$) jsou $M \cap f_{-1}(A)$ a $M \cap f_{-1}(B)$ množiny otevřené v M a tyto množiny jsou disjunktní (neb A a B jsou disjunktní). Navíc jsou neprázdné (neb A i B jsou neprázdné). Tedy z (1) plyne, že M není souvislá, což je spor. $\square$

Definice. Řekneme, že metr. prostor (X,ϱ) je křivkově souvislý, jestliže pro každé 2 body $a, b \in X$ ex. spojité zobrazení $\varphi: \langle 0,1 \rangle \to X$ tak, že $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$. *)

Množina $M \subset X$ se nazývá křivkově souvislá, je-li metr. prostor (M,ϱ) křivkově souvislý.

Věta 23 (vztah souvislého a křivkově souvislého prostoru). Buď (X,ϱ) křivkově souvislý metr. prostor. Pak (X,ϱ) je souvislý.

Důkaz. Sporem. Nechť X není souvislý. Pak ex. neprázdné, oddělené množiny $A, B \subset X$ tak, že $X = A \cup B$. Buď $a \in A$, $b \in B$. Protože X je křivkově souvislý, tak ex. spojité zobrazení $\varphi: \langle 0,1 \rangle \to X$ takové, že $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$. Dle Věty 22 je $\varphi(\langle 0,1 \rangle)$ souvislá množina. Ovšem

$$\varphi(\langle 0,1 \rangle) = \varphi(\langle 0,1 \rangle) \cap X \underset{\text{neb } X = A\cup B}{=} (A \cap \varphi(\langle 0,1 \rangle)) \cup (B \cap \varphi(\langle 0,1 \rangle)).$$

oddělené a neprázdné množiny, neboť A, B jsou oddělené a platí $a \in A \cap \varphi(\langle 0,1 \rangle)$, $b \in B \cap \varphi(\langle 0,1 \rangle)$

---

*) Někdy budu φ nazývat křivkou v X spojující body a, b (nebo křivkou v X s koncovými body a, b, nebo křivkou v X z bodu a do bodu b).

Tedy $\varphi(\langle 0,1\rangle)$ není souvislá množina – spor. Proto X je souvislý. $\square$

Jiný důkaz Věty 23. Buď $a \in X$.

$\forall x \in X$ buď φ_x křivka spojující body a, x, tj.:

$\varphi_x : \langle 0,1\rangle \to X$, $\varphi_x(0) = a$, $\varphi_x(1) = x$.

Buď $I = \langle 0,1\rangle$. Platí $X = \bigcup_{x\in X} \varphi_x(I)$. Dle Vět 19 a 22 platí

$\forall x \in X$ je $\varphi_x(I)$ souvislá množina,

která ovšem obsahuje bod $a = \varphi_x(0)$. Tedy z Věty 20 (ii) plyne, že $\bigcup_{x\in X} \varphi_x(I)$ je souvislá množina. Tudíž $X = \bigcup_{x\in X} \varphi_x(I)$ je souvislý metr. prostor. $\square$

Příklad. (Udělat na cvičení!) Buď $X = \mathbb{R}^2$ a ϱ eukleidovská metrika v $\mathbb{R}^2$. Nechť $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x \leq 1, y = \sin\frac{\pi}{x}\}$. Dokažte, že:

(i) M je křivkově souvislá (a tedy i souvislá) množina.

(ii) $N := M \cup \{[0,0]\}$ je souvislá množina, která není křivkově souvislá.

Definice. Buď (X,ϱ) metr. prostor. Řekneme, že množina $C \subset X$ je komponenta (souvislosti) metrického prostoru (X,ϱ), jestliže C je maximální souvislá množina v X (tj. neexistuje souvislá množina $D \subset X$ taková, že $C \subsetneqq D$).

Komponentou (souvislosti) množiny $M \subset X$ rozumíme komponentu (souvislosti) metr. prostoru (M,ϱ).

(Analogicky lze definovat komponenty křivkové souvislosti metr. prostoru (X,ϱ) a komponenty křivkové souvislosti množiny $M \subset X$.)

Poznámka. Buď (X,ϱ) metrický prostor.

(i) Prázdná množina má právě jednu komponentu, totiž prázdnou množinu. Je-li však $X \neq \emptyset$, pak i komponenty (souvislosti) prostoru X jsou neprázdné, neboť libovolná množina $\{x\}$, kde $x \in X$, je souvislá.

(ii) Je-li $x \in X$, pak množina C_x, která je sjednocením všech souvislých množin $M \subset X$, které obsahují bod x, je komponenta (souvislosti) prostoru X (neboť toto sjednocení je dle Věty 20 (ii) souvislá množina a každá souvislá množina D, obsahující množinu C_x, obsahuje i bod x, takže D je jednou z množin, jejichž sjednocením je C_x).

(iii) Jsou-li C_1 a C_2 dvě komponenty prostoru X, pak buďto $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ nebo $C_1 = C_2$. Je-li totiž $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, je množina $C = C_1 \cup C_2$ souvislá (dle Věty 20 (iii)) a obsahuje množinu C_i, $i=1,2$, takže nutně je rovna množině C_i, $i=1,2$ (neboť C_i je maximální souvislá část množiny X). Proto $C_1 = C = C_2$.

(iv) Je-li C komponenta prostoru X, pak z Věty 20(i) plyne, že C je uzavřená.

(v) Protože každý bod $x \in X$ leží v komponentě C_x (viz (ii)), platí $X = \bigcup_{x \in X} C_x$.

Z této Poznámky ihned plyne následující tvrzení.

Věta 24 (o rozkladu metr. prostoru). Nechť (X,ϱ) je neprázdný metr. prostor a $\mathcal{S}$ je systém všech komponent (souvislosti) prostoru (X,ϱ). Pak systém $\mathcal{S}$ obsahuje pouze neprázdné uzavřené množiny, které jsou disjunktní, a platí $X = \bigcup_{C \in \mathcal{S}} C$.

Věta 25 (o komponentách ot. množiny v NLP). Buď $(X, \|\cdot\|)$ NLP a $\Omega \subset X$ otevřená množina. Pak komponenty (souvislosti) množiny G jsou otevřené v X.

Důkaz. Buď $\Omega \subset X$ otevřená množina a C její komponenta. Máme dokázat:

(2) $\quad \forall x \in C \; \exists U(x) : U(x) \subset C$.

Je-li $x \in C$, je $x \in \Omega$ a protože Ω je ot. množina, ex. $\delta > 0$ tak, že $U(x,\delta) \subset \Omega$. Tvrdím, že

(3) $\quad$ množina $U(x,\delta)$ je křivkově souvislá.

Předpokládejme, že (3) platí. Pak $U(x,\delta)$ je souvislá (viz Věta 23). Dále dle Věty 20 (ii) je množina

$$C^* = C \cup U(x,\delta)$$

souvislá. Protože $C \subset C^* \subset \Omega$ a C je komponenta množiny Ω, je nutně $C^* = C$, a tedy $U(x,\delta) \subset C$ (tj. platí (2)).

Zbývá dokázat (3).
Nejprve dokážeme, že platí

(4) $\quad y, z \in U(x,\delta),\ t \in \langle 0,1 \rangle \Rightarrow \varphi(t) := ty + (1-t)z \in U(x,\delta)$

(tedy $U(x,\delta)$ je konvexní množina).

Nechť tedy $y, z \in U(x,\delta)$ a $t \in \langle 0,1 \rangle$. Pak

$$\|\varphi(t) - x\| = \|ty + (1-t)z - x\| = \|t(y-x) + (1-t)(z-x)\| \leq$$
$$\leq t \underbrace{\|y-x\|}_{<\delta} + (1-t)\underbrace{\|z-x\|}_{<\delta} < t\delta + (1-t)\delta = \delta,$$

a tedy platí (4).

Nyní dokážeme, že pro pevné body $y, z \in U(x,\delta)$ je zobrazení

$$t \mapsto \varphi(t) := ty + (1-t)z \quad , t \in \langle 0,1 \rangle,$$

spojité. Nechť tedy $t_1, t_2 \in \langle 0,1 \rangle$. Pak

$$\|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\| = \|[t_1 y + (1-t_1)z] - [t_2 y + (1-t_2)z]\|$$
$$= \|(t_1 - t_2)y + (t_2 - t_1)z\| = |t_1 - t_2| \, \|y - z\| \to 0 \text{ pro } t_1 \to t_2.$$

Tedy φ je spojité zobrazení intervalu $\langle 0,1 \rangle$ (s hodnotami v $U(x,\delta)$ – viz (4)). Protože navíc $\varphi(0) = z$ a $\varphi(1) = y$, je φ křivka v $U(x,\delta)$ z bodu z do bodu y. Protože $y, z \in U(x,\delta)$ byly libovolné body, platí (3). $\square$

Poznámka. Je-li $(X, \|\cdot\|)$ NLP a $F \subset X$ uzavřená množina, pak komponenty (souvislosti) množiny F jsou uzavřené v X.

Důkaz. Z Věty 24 dostáváme, že komponenta C množiny F je uzavřená v metr. prostoru $(F, \|\cdot\|)$. Tedy $C = M \cap F$, kde $M \subset X$ je uzavřená množina. Proto C (jako průnik dvou uzavřených množin v X) je množina uzavřená v X.

Důsledek Věty 25. Každá otevřená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^1$, je sjednocením spočetného systému disjunktních otevřených intervalů. (Je-li $\Omega = \emptyset$, je ovšem i tento systém prázdný.)

Důkaz. Buď $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^1$, Ω otevřená. Dle Věty 25 množina Ω je sjednocením systému svých komponent, které jsou otevřené (a disjunktní). Z Věty 19 plyne, že tyto komponenty jsou otevřené intervaly v $\mathbb{R}^1$. Každému z těchto intervalů přiřadíme nějaké rac. číslo, které v něm leží. Protože tyto intervaly jsou disjunktní, je toto zobrazení prosté. Z uvedeného a faktu, že množina $\mathbb{Q}$ je spočetná ihned plyne dané tvrzení. $\square$

Věta 26 (o oblastech v $\mathbb{R}^n$). Souvislá otevřená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je křivkově souvislá.

KONEC PŘEDNÁŠKY

7. přednáška, MA 4, šk. r. 2016/17, LS, 16. 3. 2017

Fourierovy řady

Mocninné řady jsou velmi dobrou pomůckou ke studiu funkcí. Jejich použitelnost je však značně omezená. Má-li platit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ \forall x \in (-R,R)$, pak fce f musí mít v intervalu $(-R,R)$ derivace všech řádů (to je nutná podmínka, ale ne postačující). Navíc konvergence může být pomalá pro $|x|$ blízko poloměru konvergence R. Proto jsou zkoumány další způsoby rozvoje fcí v nekonečné řady. K nejdůležitějším patří Fourierovy řady.

Definice. Buď $n \in \mathbb{N}_0$, $l \in (0,+\infty)$, $a_k \in \mathbb{C} \ \forall k \in \mathbb{N}_0$, $b_k \in \mathbb{C} \ \forall k \in \mathbb{N}$. Pak fci

(1) $$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos \frac{2\pi}{l} kx + b_k \sin \frac{2\pi}{l} kx\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme trigonometrickým polynomem o periodě l stupně nejvýše n. *)

nekonečnou řadu

(2) $$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi}{l} kx + b_k \sin \frac{2\pi}{l} kx\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme trigonometrickou řadou o periodě l.

Poznámka. Je-li f fce s periodou $l > 0$, pak fce $f^*(y) := f\left(\frac{l}{2\pi} y\right)$ má periodu 2π, neboť

$$f^*(y+2\pi) = f\left(\frac{l}{2\pi}(y+2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{2\pi} y + l\right) = f\left(\frac{l}{2\pi} y\right) = f^*(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Tedy substituce $\boxed{y = \frac{2\pi}{l} x}$ $\left(\Leftrightarrow x = \frac{l}{2\pi} y\right)$ převádí trigonometrický polynom (1) a trigonometrickou řadu (2) na tvar

(1') $$T^*(y) = T\left(\frac{l}{2\pi} y\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos ky + b_k \sin ky), \quad y \in \mathbb{R},$$

(2') $$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ky + b_k \sin ky), \quad y \in \mathbb{R},$$

---

*) Definice stupně je korektní, později ukážeme, že fci T je možno vyjádřit jen jediným způsobem trigonometrickým polynomem o periodě l. Zavedení součinitele $\frac{1}{2}$ u a_0 je pouze užitečná formalita.

které mají periodu 2π. Proto budeme někdy věty vyslovovat jen pro periodu 2π, ale používat je pro libovolnou periodu $l \in (0,+\infty)$.

Definice. $a \in \mathbb{R}$, $l \in (0,+\infty)$

$$L^2(a,a+l) := \left\{ f : (a,a+l) \to \mathbb{C};\ \int_a^{a+l} |f(x)|^2\,dx < +\infty \right\},$$

$$(f,g) := \int_a^{a+l} f(x)\overline{g(x)}\,dx \quad \ldots \text{ skalární součin}$$

(ztotožňujeme fce, které se liší na množině)

$$\|f\| := \sqrt{(f,f)}$$

$$f \perp g \iff (f,g) = 0$$

Definice. Buď $l \in (0,+\infty)$. Pak systém fcí

$$\mathcal{T}_l = \left\{ 1, \cos\frac{2\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}2x, \sin\frac{2\pi}{l}2x, \ldots, \cos\frac{2\pi}{l}kx, \sin\frac{2\pi}{l}kx, \ldots \right\}$$

nazveme trigonometrickým systémem (s periodou l).

Je-li $l = 2\pi$, píšeme krátce $\mathcal{T}$ místo $\mathcal{T}_{2\pi}$.

Lemma 27 (o trigonometrickém systému). Buď $l \in (0,+\infty)$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$.

(i) Je-li $f,g \in \mathcal{T}_l$, $f \neq g$, pak $f \perp g$.

(ii) $(1,1) = \int_a^{a+l} 1 \cdot 1\,dx = l$.

(iii) $\left(\cos\frac{2\pi}{l}kx, \cos\frac{2\pi}{l}kx\right) = \int_a^{a+l} \cos^2\frac{2\pi}{l}kx\,dx = \frac{l}{2}$.

(iv) $\left(\sin\frac{2\pi}{l}kx, \sin\frac{2\pi}{l}kx\right) = \int_a^{a+l} \sin^2\frac{2\pi}{l}kx\,dx = \frac{l}{2}$.

Důkaz. Dokážeme např., že

$$\left(\cos\frac{2\pi}{l}kx, \cos\frac{2\pi}{l}mx\right) = 0 \quad \text{if } k \neq m,\ k,m \in \mathbb{N}.$$

Platí $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\cos\underbrace{\frac{2\pi}{l}kx}_{=:\alpha}, \cos\underbrace{\frac{2\pi}{l}mx}_{=:\beta}\right) = \frac{1}{2}\int_a^{a+l}\left[\cos\frac{2\pi}{l}(k+m)x + \cos\frac{2\pi}{l}(k-m)x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{\sin\frac{2\pi}{l}(k+m)x}{\frac{2\pi}{l}(k+m)}} + \underbrace{\frac{\sin\frac{2\pi}{l}(k-m)x}{\frac{2\pi}{l}(k-m)}}\right]_a^{a+l} = 0$$

fce s periodou l

Dále dokážu např., že platí (iii):

$$\left(\cos\frac{2\pi}{l}kx,\ \cos\frac{2\pi}{l}kx\right) = \int_a^{a+l} \frac{1+\cos\frac{2\pi}{l}2kx}{2}\,dx$$

$$= \frac{l}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{\sin\frac{4\pi}{l}kx}{\frac{4\pi}{l}k}\right]_a^{a+l}}_{=0} = \frac{l}{2}. \qquad \square$$

Věta 28 (Fourierovy koeficienty). Nechť $l \in (0,+\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, nechť řada

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi}{l}kx + b_k \sin\frac{2\pi}{l}kx\right)$$

konverguje v $\mathbb{R}$ stejnoměrně a má součet $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Pak

$$(3) \qquad a_k = \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(x)\cos\frac{2\pi}{l}kx\,dx \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

$$(4) \qquad b_k = \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(x)\sin\frac{2\pi}{l}kx\,dx \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$(5) \qquad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi}{l}kx + b_k \sin\frac{2\pi}{l}kx\right).$$

Protože prvky trigonometrického systému T_l jsou spojité fce na $\mathbb{R}$ a konvergence řady v (5) je stejnoměrná na $\mathbb{R}$, je $f \in C(\mathbb{R})$. Odtud plyne, že integrály v (3) a (4) existují.

Vynásobme rovnost v (5) fcí $\cos\frac{2\pi}{l}mx$, $m \in \mathbb{N}_0$, a integrujme od a do $a+l$:

$$(6) \qquad \int_a^{a+l} f(x)\cos\frac{2\pi}{l}mx\,dx = \int_a^{a+l}\left[\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2\pi}{l}kx + b_k\sin\frac{2\pi}{l}kx\right)\right]\cos\frac{2\pi}{l}mx\,dx.$$

Protože fce $\cos\frac{2\pi}{l}mx \in B(\mathbb{R})$ a řada v (5) konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$, tak řada za $\int_a^{a+l}$ na RHS(6) opět konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$. Tedy dle Věty 66 (záměna sumy a integrálu), 19. přednáška, MA3, lze tuto řadu v intervalu $(a, a+l)$ integrovat člen po členu. S použitím Lemmatu 27 dostaneme

$$\int_a^{a+l} f(x)\cos\frac{2\pi}{l}mx\,dx = a_m\frac{l}{2} \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0,$$

odtud ihned plyne (3).

Důkaz (4) je analogický. $\square$

Poznámka. Z Věty 28 plyne, že koeficienty trigonometrického polynomu jsou určeny jednoznačně.

Věta 28 nás přivádí k následující definici.

Definice (Fourierova řada). Nechť $f \in L(a, a+l)$, kde $a \in \mathbb{R}$, $l \in (0, +\infty)$. Pak řadu

(7) $$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi}{l} kx + b_k \sin \frac{2\pi}{l} kx \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

v níž čísla a_k, b_k jsou dána předpisem

(8) $$a_k = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \cos \frac{2\pi}{l} kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

(9) $$b_k = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \sin \frac{2\pi}{l} kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

nazýváme Fourierovou řadou fce f pro interval $\langle a, a+l \rangle$ a tento fakt značíme symbolem

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi}{l} kx + b_k \sin \frac{2\pi}{l} kx \right),$$

čísla a_k, b_k nazýváme Fourierovými koeficienty fce f v $\langle a, a+l \rangle$.

Fourierovu řadu fce f budeme značit symbolem Sf.

Definice. Symbolem P_l, $0 < l < +\infty$, označíme množinu všech l-periodických funkcí, které jsou (lebesgueovsky) integrovatelné na $\langle 0, l \rangle$.

Poznámka. $g \in P_l$, $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^{a+l} g(x)\, dx = \int_b^{b+l} g(x)\, dx$.

Kvůli cvičením předběhnu a uvedu zde 2 tvrzení.

Tvrzení 1. Je-li $f \in P_l$, $f'_+(x), f'_-(x) \in \mathbb{R}$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$, pak $Sf(x) = f(x)$.
(Toto tvrzení bude plynout z Diniho kritéria).

Tvrzení 2. Buď f l-periodická fce, která je omezená na $\mathbb{R}$.
Nechť ex. čísla
$$c_0 < c_1 < \dots < c_n = c_0 + l$$
tak, že v každém intervalu (c_{j-1}, c_j), $j \in \{1, \dots, n\}$, je fce f monotónní.
Pak platí:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$ je $Sf(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-) \right)$. *)

(ii) Je-li $f \in C((a,b))$, pak Sf je lokálně stejnoměrně konvergentní v (a,b).

(Toto tvrzení plyne z Dirichletova-Jordanova kritéria, které uvedu později.)

Definice. Trigonometrickou řadu $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi}{l} kx$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme kosinovou řadou a trigonometrickou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{2\pi}{l} kx$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme sinovou řadou.

*) Tedy, je-li f spojitá v bodě x, pak $Sf(x) = f(x)$.

Poznámka (komplexní tvar Fourierovy řady). Trigonometrický polynom

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\frac{2\pi}{l}kx + b_k \sin\frac{2\pi}{l}kx\right), \quad x\in\mathbb{R}$$

můžeme přepsat pomocí vzorců

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad (\text{které platí } \forall z\in\mathbb{C}).$$

Tedy pro $k\in\mathbb{N}$ platí

$$a_k \cos\frac{2\pi}{l}kx + b_k \sin\frac{2\pi}{l}kx = a_k\,\frac{e^{i\frac{2\pi}{l}kx}+e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}}{2} + b_k\,\frac{e^{i\frac{2\pi}{l}kx}-e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}}{2i}$$

$$= \underbrace{\frac{a_k - i b_k}{2}}_{=:\,c_k} e^{i\frac{2\pi}{l}kx} + \underbrace{\frac{a_k + i b_k}{2}}_{=:\,c_{-k}} e^{-i\frac{2\pi}{l}kx} = c_k e^{i\frac{2\pi}{l}kx} + c_{-k} e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}$$

$$\Rightarrow \quad T(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(c_k e^{i\frac{2\pi}{l}kx} + c_{-k} e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}\right), \quad x\in\mathbb{R},$$

kde

$$(10) \qquad c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - i b_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + i b_k}{2}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Obdobně trigonometrickou řadu

$$(11) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi}{l}kx + b_k \sin\frac{2\pi}{l}kx\right), \quad x\in\mathbb{R},$$

lze psát ve tvaru

$$(12) \qquad c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k e^{i\frac{2\pi}{l}kx} + c_{-k} e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}\right), \quad x\in\mathbb{R},$$

přičemž platí (10).

Z uvedeného plyne, že částečné součty řady (11) lze psát ve tvaru

$$s_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\frac{2\pi}{l}kx}, \quad n\in\mathbb{N}_0, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Použijeme-li vzorců (10) a faktu, že $\forall k\in\mathbb{N}$ platí

$$a_k = \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(x)\cos\frac{2\pi}{l}kx\,dx, \quad b_k = \frac{2}{l}\int_a^{a+l} f(x)\sin\frac{2\pi}{l}kx\,dx,$$

kde $a\in\mathbb{R}$, dostaneme

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k) = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{l}\left(\int_a^{a+l} f(x)\cos\frac{2\pi}{l}kx\,dx - i\int_a^{a+l} f(x)\sin\frac{2\pi}{l}kx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{l}\int_a^{a+l} f(x)\left(\cos\frac{2\pi}{l}kx - i\sin\frac{2\pi}{l}kx\right)dx = \frac{1}{l}\int_a^{a+l} f(x)\,e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}\,dx \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

neboť

$$\cos\frac{2\pi}{l}kx - i\sin\frac{2\pi}{l}kx = \frac{e^{i\frac{2\pi}{l}kx}+e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}}{2} - \cancel{i}\,\frac{e^{i\frac{2\pi}{l}kx}-e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}}{2\cancel{i}} = e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}$$

Obdobně dostaneme

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i\, b_k) = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{l}\int_a^{a+l} f(x)\left(\cos\frac{2\pi}{l}kx + i\sin\frac{2\pi}{l}kx\right)dx =$$

$$= \frac{1}{l}\int_a^{a+l} f(x)\, e^{i\frac{2\pi}{l}kx}\, dx \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

neboť

$$\cos\frac{2\pi}{l}kx + i\sin\frac{2\pi}{l}kx = \frac{e^{i\frac{2\pi}{l}kx} + e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}}{2} + \cancel{i}\,\frac{e^{i\frac{2\pi}{l}kx} - e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}}{2\cancel{i}} = e^{i\frac{2\pi}{l}kx}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{l}\int_a^{a+l} f(x)\,dx = \frac{1}{l}\int_a^{a+l} f(x)\,dx.$$

Celkem tedy

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{i\frac{2\pi}{l}kx}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \; x \in \mathbb{R},$$

$$c_k = \frac{1}{l}\int_a^{a+l} f(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{l}kx}\, dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

a

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{i\frac{2\pi}{l}kx}, \quad f \in L(a, a+l).$$

8. přednáška, MA4, šk. r. 2016/17, LS, 17. 3. 2017

Omezíme se na fce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ (víme, že to lze). Budeme se snažit odvodit věty, které udávají vztah mezi součtem Four. řady fce f a fcí f. K tomu účelu je vhodné nalézt jednoduchý vzoreček pro částečný součet Four. řady

Lemma 29 (o Dirichletově jádře). Buď

(1) $\quad D_n(x) := \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx, \quad n \in \mathbb{N}_0, \ x \in \mathbb{R}.$

Pak pro tuto fci (kterou nazýváme Dirichletovo jádro) platí:

(i) $\quad D_n(x) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad x \neq 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}_0;$ *)

(ii) D_n je sudá, spojitá, 2π-periodická fce, $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$;

(iii) $\quad \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = \pi \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad \left(\Rightarrow \int_0^{\pi} D_n(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\right)$

Důkaz. ad (i): Buď $n \in \mathbb{N}_0$, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Použijeme-li Eulerovy vzorce

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i},$$

dostaneme

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \ldots + \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-inx} + e^{-i(n-1)x} + \ldots + e^{-ix} + 1 + e^{ix} + \ldots + e^{i(n-1)x} + e^{inx}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-inx}\left(1 + e^{ix} + \ldots + e^{i2nx}\right) \underset{\text{je } e^{ix} \neq 1, \text{ neb } x \neq 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}}{=} \frac{1}{2} e^{-inx}\, \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} =$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2}\, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

ad (ii): Protože každý sčítanec v (1) je sudá, spojitá a 2π-periodická fce, platí totéž i pro D_n.
Z definice $D_n(x)$ ihned plyne, že $D_n(2k\pi) = D_n(0) = n + \frac{1}{2}$.

---

*) Z definice máme $D_n(2k\pi) = n + \frac{1}{2} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

ad (iii): $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx \underset{\text{sudost fce } D_n}{=} 2\int_0^{\pi} D_n(x)\,dx = 2\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos x+\dots+\cos nx\right)dx =$

$$= 2\left[\frac{1}{2}x + \sin x + \dots + \frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

□

Lemma 30 (vzorec pro částečné součty Four. řady). Buď $f \in P_{2\pi}$,

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$S_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Pak

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)D_n(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+y)+f(x-y)\right)D_n(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$ platí

dosadím za koeficienty Four. řady

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt\right) + \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\right)\cos kx + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\right)\sin kx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\underbrace{\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\cos kt\cos kx + \sin kt \sin kx\right)}_{=\cos(kt-kx)=\cos k(t-x)}\right]}_{=D_n(t-x)\ \dots\ \text{Dirichletovo jádro}}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)\,dt \underset{\substack{\text{substituce}\\ t-x=y \Rightarrow dt=dy}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\underbrace{f(x+y)D_n(y)}_{2\pi\text{-periodická fce}}dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)D_n(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x+y)D_n(y)\,dy + \int_0^{\pi} f(x+y)D_n(y)\,dy\right] =$$

substituce $y=-z \Rightarrow dy=-dz$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0} f(x-z)\underbrace{D_n(-z)}_{D_n \text{ je sudá fce}}(-dz) + \int_0^{\pi} f(x+y)D_n(y)\,dy\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x-z)D_n(z)\,dz + \int_0^{\pi} f(x+y)D_n(y)\,dy\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+y)+f(x-y)\right]D_n(y)\,dy.$$

□

Poznámka. Integrál $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)D_n(y)\,dy$ se nazývá Dirichletův integrál.
$|D_n(y)|$ je největší pro $y=0 \Rightarrow$ domněnka, že hodnota Dirichletova integrálu

(tj. i $s_n(x)$) bude nejvíce záviset hodnotách fce f v $U(x)$.
Tato domněnka je správná, k důkazu použijeme následující tvrzení.

Věta 31 (Riemannovo – Lebesgueovo lemma). Je-li $-\infty \le a < b \le +\infty$ a $f \in L^1(a,b)$, pak

(2) $$\lim_{\mu \to +\infty} \int_a^b f(x) \cos \mu x \, dx = 0 = \lim_{\mu \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin \mu x \, dx .$$

Důsledek. Je-li $f \in \mathcal{P}_\ell$, $\ell \in (0, +\infty)$, pak posl. Fourierových koeficientů $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ mají limitu 0.

Důkaz věty. Větu stačí dokázat pro reálnou fci f.
Dokážeme, že 1. limita v (2) je 0 (důkaz pro 2. limitu v (2) je obdobný).
Pro reálný prostor $L^1(a,b)$ definujeme
$$Q := \{ f \in L^1(a,b) ;\ \lim_{\mu \to +\infty} \int_a^b f(x) \cos \mu x \, dx = 0 \} .$$
Cíl: Dokázat, že $Q = L^1(a,b)$.

I. Nejprve dokážeme, že

(3) Q je uzavřený lineární podprostor.

Linearita je jasná, neboť pro $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí
$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) \cos \mu x \, dx = c_1 \underbrace{\int_a^b f_1(x) \cos \mu x \, dx}_{\to 0} + c_2 \underbrace{\int_a^b f_2(x) \cos \mu x \, dx}_{\to 0} \to 0$$
pro $\mu \to +\infty$.

Uzavřenost. Buď $f \in \overline{Q}$. Chceme dokázat, že

(4) $$\lim_{\mu \to +\infty} \int_a^b f(x) \cos \mu x \, dx = 0 .$$

Buď $\varepsilon > 0$. Pak $\exists\, g \in Q$ tak, že $\|f - g\|_{L^1(a,b)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Protože $g \in Q$, existuje $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tak, že $\left| \int_a^b g(x) \cos \mu x \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall \mu \ge \mu_0$.
Tedy pro $\mu \ge \mu_0$ platí
$$\left| \int_a^b f(x) \cos \mu x \, dx \right| \le \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) \cos \mu x \, dx \right| + \left| \int_a^b g(x) \cos \mu x \, dx \right| \le$$
$$\le \|f - g\|_{L^1(a,b)} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
a (4) je ověřeno.

II. Nyní budeme dokazovat pro stále obecnější fce $f \in L^1(a,b)$, že patří do Q, až nakonec dostaneme, že $Q = L^1(a,b)$.

(i) Buď $f = \chi_I \in L^1(a,b)$, kde $I = (c,d) \subset (a,b)$.

Pak pro $\mu > 0$ máme

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\mu x\,dx\right| = \left|\int_c^d \cos\mu x\,dx\right| = \left|\left[\frac{\sin\mu x}{\mu}\right]_c^d\right| =$$

$$= \frac{1}{\mu}\,|\sin\mu d - \sin\mu c| \le \frac{2}{\mu} \to 0 \quad \text{pro } \mu \to +\infty$$

$\Rightarrow f \in Q$.

(ii) Buď $f = \chi_G \in L^1(a,b)$, kde $G = \bigcup_{k=1}^{m} I_k$, kde $I_1, \dots, I_m$ jsou disjunktní otevřené intervaly a $G \subset (a,b)$. Pak $f = \sum_{k=1}^{m} \chi_{I_k}$ a dle (i) platí $\chi_{I_k} \in Q$, $k = 1, \dots, m$. Protože Q je lineární podprostor, platí $f = \chi_G \in Q$.

(iii) Nechť $f = \chi_G \in L^1(a,b)$, kde $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, kde $I_1, I_2, \dots$ jsou disjunktní otevřené intervaly a $G \subset (a,b)$. Protože $\chi_G \in L^1(a,b)$ a $\chi_G = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{I_k}$, platí

(5) $$+\infty > |G| \underset{\text{dle σ-aditivity Lebesg. míry}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|.$$

Tedy pro $f_m := \sum_{k=1}^{m} \chi_{I_k}$ máme $f_m \in Q$ dle (ii) a dále

$$\|\underset{\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{I_k}}{\underset{\|}{f}} - \underset{\sum_{k=1}^{m}\chi_{I_k}}{\underset{\|}{f_m}}\|_{L^1(a,b)} = \left\|\sum_{k=m+1}^{\infty} \chi_{I_k}\right\|_{L^1(a,b)} \underset{\text{Lebesg. míra}}{=} \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} \chi_{I_k}\right| \underset{\text{dle σ-aditivity Lebesg. míry}}{=} \sum_{k=m+1}^{\infty} |\chi_{I_k}| \to 0$$

pro $m \to \infty$, neboť platí (5). Tedy $f \in \overline{Q} = Q$.

Tedy charakteristické fce ot. množin $G \subset (a,b)$ konečné Lebesg. míry patří do Q (neb každá ot. množina $G \subset (a,b)$ je spočetným sjednocením disjunktních ot. intervalů).

(iv) Buď $f = \chi_M \in L^1(a,b)$, kde $M \subset (a,b)$ je lebesgueovsky měřitelná množina. Z faktu, že $\chi_M \in L^1(a,b)$ plyne, že $|M| < +\infty$.

Z regularity Lebesg. míry dostáváme, že $\forall n \in \mathbb{N}$ ex. ot. množina G_n tak, že $M \subset G_n \subset (a,b)$ a $|G_n \setminus M| < \frac{1}{n}$.

Tedy
$$\|\chi_{G_n} - f\|_{L^1(a,b)} = |G_n \setminus M| < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty.$$
Protože dle (iii) platí $\chi_{G_n} \in Q$ a protože Q je uzavřená množina (cf. (3)), platí $f \in Q$.

(v) Buď f jednoduchá fce, $f \in L^1(a,b)$. Pak
$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{M_i}, \text{ kde } c_i \in \mathbb{R},\ M_i \subset (a,b) \text{ jsou měřitelné}, |M_i| < +\infty,$$
$i = 1, \dots, n$. Z (iv) plyne $\chi_{M_i} \in Q$, a protože Q je lineární podprostor, platí $f \in Q$.

(vi) Protože jednoduché fce jsou husté v $L^1(a,b)$ (viz přednáška z teorie míry a integrálu) a dle (v) patří do Q, platí $L^1(a,b) = \overline{Q}$, a odtud plyne $L^1(a,b) = Q$ (neb $Q = \overline{Q}$). □

Věta 32 (o lokalizaci). Nechť $f \in P_{2\pi}$, $x, s \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < \pi$. Nechť $s_n(x)$ je částečný součet Four. řady fce f v bodě x. Pak

(6) $$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s \iff \lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \left[f(x+y) + f(x-y) - 2s\right] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}\, dy = 0.$$

Poznámka. Protože integrál v (6) závisí pouze na hodnotách fce f v $U(x,\delta)$, vidíme, že konvergence F. řady v bodě x je lokální vlastnost. Tedy, jestliže $f, g \in P_{2\pi}$, $f = g$ v $U(x,\delta)$, kde δ je nějaké číslo z intervalu $(0,\pi)$, pak:

F. řada fce f konverguje v bodě x k číslu $s \in \mathbb{R} \iff$
$\iff$ F. řada fce g konverguje v bodě x k číslu $s \in \mathbb{R}$.

neb D_n je sudá fce

Důkaz věty. Víme, že $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y)\,dy = \pi \Rightarrow \int_0^{\pi} D_n(y)\,dy = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(y)\,dy = 1 \Rightarrow s = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} s\,D_n(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2s\,D_n(y)\,dy$.

Dále dle Lemmatu 30 platí

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x+y)+f(x-y)]\,D_n(y)\,dy .$$

Tedy

$$s_n(x) - s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x+y)+f(x-y)-2s]\,\underbrace{D_n(y)}_{=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{y}{2}}}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} [f(x+y)+f(x-y)-2s]\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}\,dy +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} \underbrace{\frac{f(x+y)+f(x-y)-2s}{\sin\frac{y}{2}}}_{=:g(y)}\,\sin(n+\tfrac{1}{2})y\,dy =: A_n + B_n .$$

Odtud a z (6) plyne, že stačí dokázat, že $B_n \to 0$ pro $n \to \infty$.

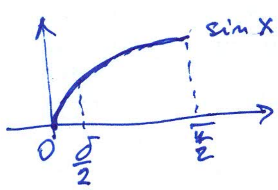
$\Downarrow$

$(A_n \to 0 \Leftrightarrow s_n(x) - s \to 0)$

Pro $y \in (\delta, \pi)$ platí

$|g(y)| \le [\,|f(x+y)| + |f(x-y)| + 2s\,]\cdot\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} \in L^1(0,2\pi)$, neb $f \in P_{2\pi}$.

Tedy $g \in L^1(\delta, \pi)$.



$x = \frac{y}{2} \in (\frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2})$ if $y \in (\delta, \pi)$

Proto $B_n \to 0$ dle Riemannova-Lebesgueova lemmatu (Věta 31).

□

9. přednáška, MA 4, šk. r. 2016/17, LS, 23.3.2017

Věta 33 (Diniho kritérium). Nechť $f \in P_{2\pi}$, $s, x \in \mathbb{R}$ a nechť ex. $\delta > 0$ tak, že Lebesgueův integrál

$$(1) \quad \int_0^\delta \frac{f(x+y) + f(x-y) - 2s}{y} \, dy \quad \text{konverguje.}$$

Pak číslo s je součtem Four. řady fce f v bodě x.

Důkaz. Dle Věty 32 (o lokalizaci) stačí ověřit, že pro nějaké $\delta \in (0, \pi)$ platí

$$(2) \quad \lim_{n \to \infty} \int_0^\delta \underbrace{\boxed{\frac{f(x+y) + f(x-y) - 2s}{y}}}_{\in L^1(0,\delta)} \underbrace{\frac{y}{\sin \frac{y}{2}}}_{\text{omezená, měř. fce na } (0,\delta)} \sin\left[\left(n + \tfrac{1}{2}\right) y\right] dy = 0 .$$

Tedy (2) plyne z (1) a z Riemannova – Lebesgueova lemmatu. □

Věta 34 (důsledky Diniho kritéria). Nechť $f \in P_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Nechť ex. vlastní limity $f(x+)$, $f(x-)$,

$$(3) \quad \lim_{y \to 0+} \frac{f(x+y) - f(x+)}{y}, \quad \lim_{y \to 0+} \frac{f(x-y) - f(x-)}{y} .$$

Pak řada $Sf(x)$ konverguje v bodě x a platí

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} .$$

Speciálně, pokud ex. vlastní jednostranné derivace $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, pak $Sf(x) = f(x)$.

(ii) Jestliže ex. $\alpha, \delta, K \in (0, +\infty)$ tak, že

$$|f(x+y) - f(x)| \le K |y|^\alpha \quad \forall y \in U(0,\delta),$$

pak $Sf(x) = f(x)$.

Důkaz. ad (i): Z (3) plyne, že fce

$$\frac{f(x+y) - f(x+)}{y}, \quad \frac{f(x-y) - f(x-)}{y}$$

jsou omezené na jistém $U_+(0,\delta)$. Pak pro $s := \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right)$ máme

$$\frac{f(x+y) + f(x-y) - 2s}{y} = \frac{f(x+y) - f(x+)}{y} + \frac{f(x-y) - f(x-)}{y} \in B(U_+(0,\delta)),$$

odkud plyne, že je splněna podmínka (1) z Diniho kritéria.
Tedy výsledek plyne z Věty 33.

ad (ii): Zvolíme příslušná $\alpha, \delta, K \in (0,+\infty)$ a položíme $s = f(x)$. Pak pro $y \in (0,\delta)$ platí

$$\left| \frac{f(x+y) - f(x-y) - 2s}{y} \right| \le \frac{|f(x+y) - f(x)|}{y} + \frac{|f(x-y) - f(x)|}{y} \le$$

$$\le 2K \, |y|^{\alpha - 1} = 2K y^{\alpha-1} \in L^1(0,\delta).$$

Tedy tvrzení opět plyne z Věty 33. □

Poznámky. 1) Existují $f \in P_{2\pi}$ takové, že Sf diverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.

2) Existují $f \in P_{2\pi} \cap C(\mathbb{R})$, jejíž F. ř. diverguje v bodech nespočetné husté podmnožiny množiny $\mathbb{R}$.

3) Je-li $f \in L^p(-\pi,\pi)$, $1 < p \le +\infty$, pak Sf konverguje s.v. k fci f v $(-\pi,\pi)$. (To dokázal v roce 1966 L. Carleson pro $p = 2$; pro $p \ne 2$ to dokázal v roce 1970 R.A. Hunt.)

Věta 35 (o limitě aritmetických průměrů). Buď $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a položme

$$b_1 = \frac{a_1}{1}, \quad b_2 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \ \dots, \ b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \ \dots .$$

Pak

$$(4) \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n .$$

Speciálně, existuje-li $\lim_{n\to\infty} a_n$, pak

$$(5) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Důkaz provedeme pro lim sup (přechodem k posl. $-a_1, -a_2, \dots$ pak dostaneme výsledek pro lim inf).

Buď $A := \limsup_{n\to\infty} a_n$, $B := \limsup_{n\to+\infty} b_n$. Důkaz provedeme sporem. Budeme tedy předpokládat, že $A < B$. Pak

$$(6) \quad \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} : \quad A < c_1 < c_2 < B .$$

Protože $c_1 > A = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$, kde $\alpha_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$,

tak $\exists\, n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \ge n_1, n \in \mathbb{N}: \ \alpha_n < c_1 \ \Downarrow \ a_n < c_1 .$

Pak $\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_1$ platí

$$b_n = \frac{a_1 + \dots + a_{n_1}}{n} + \frac{a_{n_1} + \dots + \overset{a_{n_1+(n-n_1)}}{\overset{\shortparallel}{a_n}}}{n} <$$

$$< \underbrace{\frac{a_1 + \dots + a_{n_1}}{n}}_{\to 0 \text{ pro } n \to +\infty} + \underbrace{\frac{n-n_1}{n}}_{} c_1 \to c_1 \text{ pro } n \to +\infty$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} b_n \le c_1 \underset{\text{dle (6)}}{<} c_2 ,$$

což je spor s faktem, že $\limsup_{n\to\infty} b_n = B \underset{\text{dle (6)}}{>} c_2$.

Tedy $B \le A$.

Speciální část ihned plyne z dokázaného a z faktu, že

$\lim_{n\to\infty} a_n$ ex. $\iff \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$. $\square$

Poznámka. (i) Rovnost (5) platí i v případě, že $a_n \in \mathbb{C}\ \forall n \in \mathbb{N}$ a platí $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{C}$.

(To plyne použitím speciální části Věty 35 na reálnou a imaginární část výrazu $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$.)

(ii) Existují posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$, pro které $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, zatímco $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ existuje – viz následující příklad:

$a_n = (-1)^n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Pak $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, ale

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{pro } n \text{ liché} \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 0 .$$

Sčítatelnost Four. řad metodou aritmetických průměrů (této metodě se také říká Cesarova sčítací metoda) se poprvé zabýval Fejér v r. 1900.

Úmluva. Pro fci $f \in P_{2\pi}$ a $x \in \mathbb{R}$ budeme symbolem $S_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$ značit n-tý částečný součet Four. řady fce f v bodě x. Dále položíme

$$\sigma_n(x) := \frac{1}{n+1}\left(S_0(x) + \dots + S_n(x)\right).$$

Lemma 36 (o Fejérově jádře). Nechť

$$(7) \qquad K_n(x) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x), \quad x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

kde D_k je Dirichletovo jádro. Pro fci K_n (kterou nazýváme Fejérovo jádro) platí

(i) $K_n(x) = \dfrac{1}{2(n+1)} \left(\dfrac{\sin (n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2, \ x \neq 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}_0;$

(ii) K_n je sudá, spojitá, 2π-periodická fce, $K_n(0) = \dfrac{n+1}{2}$, $\boxed{n \in \mathbb{N}_0;}$

(iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = \pi.$

Důkaz. ad (i): Platí

$$D_k(x) = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sin(2k+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \quad x \neq 2m\pi, \ m \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{N}_0.$$

Tedy

$$(8) \qquad K_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \frac{\sin(1 \cdot \frac{x}{2}) + \sin(3 \cdot \frac{x}{2}) + \dots + \sin((2n+1)\frac{x}{2})}{\sin \frac{x}{2}}, \quad x \neq 2m\pi, \ m \in \mathbb{Z}.$$

Protože

$$(9) \qquad \sin v + \sin 3v + \dots + \sin(2n+1)v = \frac{\sin^2(n+1)v}{\sin v}, \quad v \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z},$$

$\Big($ neboť $\text{LHS}(8) = \operatorname{Im}\left(e^{iv} + e^{i3v} + \dots + e^{i(2n+1)v}\right) =$

$= \operatorname{Im}\left[e^{iv}\left(1 + e^{i2v} + \dots + e^{i2nv}\right)\right] \underset{\substack{\text{ef } e^{i2v} \neq 1 \Leftrightarrow v \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{kvocient}}}{=} \operatorname{Im}\left[e^{iv} \dfrac{1 - e^{i2v(n+1)}}{1 - e^{i2v}}\right] =$

$= \operatorname{Im}\left[\dfrac{e^{iv}}{e^{iv}} \dfrac{1 - e^{i2v(n+1)}}{e^{-iv} - e^{iv}}\right] = \operatorname{Im} \dfrac{1 - e^{i2(n+1)v}}{-2i \sin v} = \operatorname{Im}\left[i \dfrac{1 - e^{i2(n+1)v}}{2 \sin v}\right] =$

$= \operatorname{Re} \dfrac{1 - e^{i2(n+1)v}}{2 \sin v} = \dfrac{1 - \cos 2(n+1)v}{2 \sin v} = \dfrac{\sin^2(n+1)v}{\sin v}$ $\Big)$

platí (cf. (8), (9))

$$K_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \, \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \, \frac{\sin^2(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

if $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

ad (ii): Že fce K_n je sudá, spojitá a 2π-periodická plyne z definice fce K_n a z faktu, že tytéž vlastnosti má Dirichletovo jádro.

Dále platí

$$K_n(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \underbrace{D_k(0)}_{=(k+\frac{1}{2})} = \frac{1}{n+1}\,\frac{n+1}{2}\overbrace{\left(\frac{1}{2} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}^{n+1} = \frac{n+1}{2}.$$

první člen, poslední člen

počet členů děleno 2

částečný součet aritmetické řady (máme $n+1$ členů), diference je 1

ad (iii): $$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx}_{=\pi} = \pi. \qquad \square$$

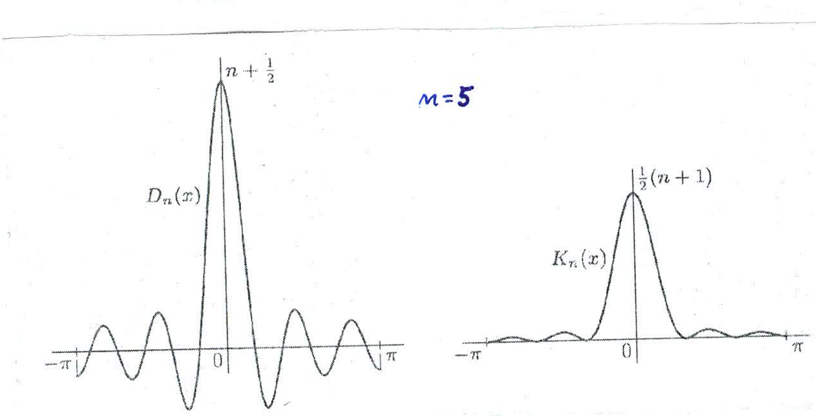
Poznámka. Fejérovo jádro má lepší vlastnosti než Dirichletovo jádro. Jednou z nich je jeho nezápornost. Také platí, že

$K_n(x) \rightrightarrows 0$ na $(-\pi,\pi)\setminus(-\delta,\delta)$ $\forall \delta\in(0,\pi)$, neboť

$$|K_n(x) - 0| = \left|\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 - 0\right| \underset{\forall x\in(-\pi,\pi)\setminus(-\delta,\delta)}{\le} \frac{1}{2(n+1)}\,\frac{1}{(\sin\frac{\delta}{2})^2} \to 0 \text{ pro } n\to\infty.$$

(Pro Dirichletovo jádro analogické tvrzení neplatí; že $D_n(\pi) =$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi}{2\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}} = \frac{1}{2}\Big(\sin n\pi \underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{=0} + \underbrace{\cos n\pi}_{=(-1)^n}\underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{=1}\Big) = \frac{1}{2}(-1)^n.\ )$$



Lemma 37 (vzorec pro σ_n). Nechť $f \in P_{2\pi}$. Pak platí

(10) $$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) K_n(y)\, dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+y) + f(x-y)] K_n(y)\, dy \quad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Důkaz. Z Lemmatu 30 máme, že

(11) $$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_n(y)\, dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+y) + f(x-y)] D_n(y)\, dy \quad \forall x \in \mathbb{R}.\ ^{*)}$$

Dle definice K_n máme

$$K_n(y) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_n(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Tudíž

$$\underline{\sigma_n(x)} := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x) \underset{\text{dle 1. rovnosti v (11)}}{=} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_k(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(y) \right)}_{= K_n(y)} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) K_n(y)\, dy \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Použijeme-li 2. rovnost v (11) místo 1. rovnosti, analogicky dostaneme 2. vyjádření pro $\sigma_n(x)$. $\square$

---

*) Snadno ověříme, že tento vzoreček platí i pro $n = 0$, tedy (11) platí $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

10. přednáška, MA 4, šk. r. 2016/17, LS, 24. 3. 2017

Věta 38 (Fejérova). Nechť $f \in P_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Jestliže $f(x+), f(x-) \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+)+f(x-)\right).$$

(ii) Je-li f spojitá na $(a,b) \subset \mathbb{R}$, pak $\sigma_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b).

Důkaz. ad (i): Položme $s := \frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$. Protože

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\,dy = 1$, platí

$$s = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s \underbrace{K_n(y)}_{\text{sudá fce}}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2s\,K_n(y)\,dy.$$

Odtud a vzorce pro σ_n (viz Lemma 37) plyne

(*) $$\sigma_n(x) - s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+y)+f(x-y)-2s\right]K_n(y)\,dy \quad \forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Buď $\varepsilon > 0$. Protože z definice čísla s plyne

$$\lim_{y\to 0+}\left[f(x+y)+f(x-y)-2s\right] = 0,$$

lze volit $\delta \in (0,\pi)$ tak, že $|f(x+y)+f(x-y)-2s| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall y \in (0,\delta)$.

S využitím vlastností Fejérova jádra pak z (*) dostáváme

$$|\sigma_n(x)-s| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}\underbrace{K_n(y)}_{K_n(y)\ge 0}\,dy + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(x+y)+f(x-y)-2s|\underbrace{\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2}_{K_n(y)}dy$$

$$\le \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\int_0^{\delta}K_n(y)\,dy}_{\le \int_{-\pi}^{\pi}K_n(y) = \pi} + \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{2(n+1)}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\underbrace{\int_0^{\pi}|f(x+y)+f(x-y)-2s|\,dy}_{<+\infty,}.$$

nebť $f \in P_{2\pi} \Rightarrow f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Tedy ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $|\sigma_n(x)-s| < \varepsilon$ $\forall n \ge n_0$, $n \in \mathbb{N}$, tj. platí (i).

ad (ii): Chceme dokázat, že $\sigma_n \rightrightarrows f$ na libovolném intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle \subset (a,b)$.

Zvolme $\omega \in (0,\pi)$ tak, aby $\langle\alpha-\omega, \beta+\omega\rangle \subset (a,b)$. Buď $\varepsilon > 0$.

Protože f je stejnoměrně spojitá na $\langle\alpha-\omega,\beta+\omega\rangle$, existuje $\delta \in (0,\omega)$ tak, že

$$|f(t)-f(\tau)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{if } t,\tau \in \langle\alpha-\omega,\beta+\omega\rangle \text{ a } |t-\tau|<\delta.$$

Pro každé $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a každé $y \in (0, \delta)$ tedy platí

$$|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)| \le |f(x+y) - f(x)| + |f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogicky jako v části (i), pro každé $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ dostaneme

(nyní ovšem $s = f(x)$)

$$|\sigma_n(x) - s| \le \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \underbrace{|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} K_n(y)\, dy +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_0^\pi |f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)|\, dy <$$

$$< \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \pi + \frac{1}{\pi} \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_0^\pi |f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)|\, dy.$$

Chceme nyní dostat odhad nezávislý na $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

Označme
$$M := \max_{x \in \langle \alpha, \beta \rangle} |f(x)|.$$

Víme, že $f \in P_{2\pi} \Rightarrow \int_0^{2\pi} f = \int_c^{c+2\pi} f \quad \forall c \in \mathbb{R}$.

Proto
$$\int_0^\pi |f(x+y)|\, dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{substituce} \\ x+y=t}}{=} \int_x^{x+\pi} |f(t)|\, dt \le \int_x^{x+2\pi} |f(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt$$

a obdobně
$$\int_0^\pi |f(x-y)|\, dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{substituce} \\ x-y=t}}{=} \int_x^{x-\pi} |f(t)|\, (-dt) = \int_{x-\pi}^{x} |f(t)|\, dt \le \int_{x-2\pi}^{x} |f(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt.$$

Tedy platí
$$\int_0^\pi |f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)|\, dy \le 2\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt + 2|f(x)| \cdot \pi \le$$
$$\le 2\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt + 2\pi M.$$

Proto
$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \underbrace{\left(2\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt + 2\pi M\right)}_{\uparrow \text{ pevné číslo nezávislé na } x \in \langle \alpha, \beta \rangle}.$$

Tudíž ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že
$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \langle \alpha, \beta \rangle \;\; \forall n \ge n_0,\ n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Poznámka. Jestliže $f \in P_{2\pi}$ a $f(x+), f(x-) \in \mathbb{R}$, pak $\{s_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ nemusí konvergovat. Fejérova věta však říká, že jediným "kandidátem" na součet Fourierovy řady fce f v bodě x je číslo $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ (které je rovno $f(x)$, je-li f spojitá v bodě x).

Z Fejérovy věty snadno dostaneme následující tvrzení.

Věta 39 (Weierstrassova). Nechť $f \in P_{2\pi} \cap C(\mathbb{R})$ je reálná fce. Pak $\forall \varepsilon > 0$ ex. reálný trigonometrický polynom T takový, že

$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Aplikací části (ii) Fejérovy věty (Věta 38) na fci f a interval $(a,b) := (-2\pi, 2\pi)$ dostáváme, že $\sigma_n \rightrightarrows f$ na $\langle -\pi, \pi \rangle$ a (z periodicity) tedy i na $\mathbb{R}$. Protože σ_n jsou trigonometrické polynomy, je věta dokázána. □

Poznámka. Platí analogie Věty 39 i pro komplexní fce reálné proměnné, neboť Větu 39 můžeme použít na reálnou a také na imaginární část dané fce.

Věta 40 (Hardy). Buď $\{a_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ posl. komplexních fcí definovaných na množině M. Nechť

$$\sigma_n(x) := \frac{s_0(x) + \dots + s_n(x)}{n+1}, \quad x \in M, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

kde $s_k(x) := \sum_{j=0}^{k} a_j(x)$. Předpokládejme, že

$\exists C \in \mathbb{R} \ \forall x \in M \ \forall k \in \mathbb{N}_0 : |k a_k(x)| \le C$.

Jestliže

(1) $\sigma_n(x) \rightrightarrows s(x)$ na M,

pak

(2) $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ na M.

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$. Pak ex. $\lambda \in (1, +\infty)$ tak, že $C(\lambda - 1) < \varepsilon$.

Potom $\forall x \in M$ platí

(3) $$\sum_{n < k \le [\lambda n]} |a_k(x)| = \sum_{n < k \le [\lambda n]} \overbrace{|k a_k(x)|}^{\le C} \cdot \frac{1}{k} \le C \sum_{n < k \le [\lambda n]} \overbrace{\frac{1}{k}}^{< \frac{1}{n}} < \frac{C}{n} \sum_{n < k \le \underbrace{[\lambda n]}_{\le \lambda n}} 1$$

$$< \frac{C}{n}(\lambda n - n) = \frac{C}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}(\lambda - 1) = C(\lambda - 1) < \varepsilon.$$

Dále $\forall x \in M$ platí

$$\underbrace{([\lambda n] + 1)\,\sigma_{[\lambda n]}(x)}_{= s_0(x) + \dots + s_{[\lambda n]}(x)} - \underbrace{(n+1)\,\sigma_n(x)}_{= s_0(x) + \dots + s_n(x)} = \underbrace{s_{n+1}(x) + \dots + s_{[\lambda n]}(x)}$$

kde je $[\lambda n] - n$ sčítanců, neboť $[\lambda n] = n + [\lambda n] - n$

$$= 1 \cdot \underbrace{a_{[\lambda n]}(x)} + 2 \cdot \underbrace{a_{[\lambda n]-1}(x)} + \dots + ([\lambda n] - n)\underbrace{a_{n+1}(x)} + ([\lambda n] - n)\underbrace{s_n(x)},$$

tento člen je jen v $S_{[\lambda n]}(x)$

tento člen je ve 2 sčítancích a to v $S_{[\lambda n]-1}$ a $S_{[\lambda n]}$

$a_{n+1}(x)$ a $S_n(x)$ jsou obsaženy ve všech sčítancích

tj.
$$([\lambda n]+1)\,\sigma_{[\lambda n]}(x)-(n+1)\,\sigma_n(x)=$$
$$=([\lambda n]-n)\,s_n(x)+([\lambda n]-n)\,a_{n+1}(x)+([\lambda n]-n-1)\,a_{n+2}(x)+\dots+1\cdot a_{[\lambda n]}(x),$$

odkud plyne
$$([\lambda n]-n)\,s_n(x)=([\lambda n]+1)\,\sigma_{[\lambda n]}(x)-(n+1)\,\sigma_n(x)-\sum_{n<k\le[\lambda n]}a_k(x)\,([\lambda n]-k+1),$$

a tedy $\forall x\in M$ platí
$$(4)\quad ([\lambda n]-n)\,\boxed{(s_n(x)-\sigma_n(x))}=([\lambda n]-n)\,s_n(x)-([\lambda n]-n)\,\sigma_n(x)=$$
$$=([\lambda n]+1)\,\sigma_{[\lambda n]}(x)-\underbrace{(n+1+[\lambda n]-n)}_{=([\lambda n]+1)}\,\sigma_n(x)-\sum_{n<k\le[\lambda n]}([\lambda n]-k+1)\,a_k(x)$$
$$=([\lambda n]+1)\,(\sigma_{[\lambda n]}(x)-\sigma_n(x))-\sum_{n<k\le[\lambda n]}([\lambda n]-k+1)\,a_k(x)$$

Odtud chceme vyjádřit $s_n(x)-\sigma_n(x)$, tj. dělit číslem $[\lambda n]-n$. Platí $[\lambda n]\le\lambda n<[\lambda n]+1$

$\Rightarrow\ [\lambda n]>\lambda n-1\ \Rightarrow\ [\lambda n]-n>\lambda n-1-n=n(\lambda-1)-1.$

Zvolme proto $n_0\in\mathbb{N}$ tak, aby $n_0(\lambda-1)-1>0$. Pak $\forall n\in\mathbb{N}_0,\ n\ge n_0$, máme $[\lambda n]-n>n(\lambda-1)-1>n_0(\lambda-1)-1>0$

a z (4) dostaneme
$$s_n(x)-\sigma_n(x)=\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\left(\sigma_{[\lambda n]}(x)-\sigma_n(x)\right)-\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{n<k\le[\lambda n]}\overbrace{([\lambda n]-k+1)}^{\le\lambda n-n+1=(\lambda-1)n+1}a_k(x)$$
$$\Rightarrow |s_n(x)-\sigma_n(x)|\le\frac{\lambda n+1}{n(\lambda-1)-1}\left(\left|\sigma_{[\lambda n]}(x)-s(x)\right|+\left|s(x)-\sigma_n(x)\right|\right)+$$
$$+\frac{n(\lambda-1)+1}{n(\lambda-1)-1}\underbrace{\sum_{n<k\le[\lambda n]}|a_k(x)|}_{<\varepsilon\text{ dle (3)}}$$
$$\Rightarrow |s_n(x)-\sigma_n(x)|\le\frac{\lambda n+1}{n(\lambda-1)-1}\left(\left|\sigma_{[\lambda n]}(x)-s(x)\right|+|s(x)-\sigma_n(x)|\right)+\frac{n(\lambda-1)+1}{n(\lambda-1)-1}\,\varepsilon$$
$\forall x\in M\ \forall n\ge n_0,$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \sup_{x\in M} |s_n(x) - \sigma_n(x)| \le \frac{\lambda n + 1}{n(\lambda-1)-1}\Big(\underbrace{\sup_{x\in M}|\sigma_{[\lambda n]}(x) - s(x)|}_{=c_{[\lambda n]}} + \underbrace{\sup_{x\in M}|\sigma_n(x) - s(x)|}_{=: c_n}\Big) +$$

$$+ \frac{n(\lambda-1)+1}{n(\lambda-1)-1}\,\varepsilon =$$

$$= \frac{\lambda n+1}{n(\lambda-1)-1}\big(c_{[\lambda n]} + c_n\big) + \frac{n(\lambda-1)+1}{n(\lambda-1)-1}\,\varepsilon \longrightarrow$$

$\frac{\lambda n+1}{n(\lambda-1)-1} \searrow \frac{\lambda}{\lambda-1}$, $c_{[\lambda n]} \searrow 0$, $c_n \searrow 0$ neb $\sigma_n(x) \rightrightarrows s(x)$ na M dle (1), $\frac{n(\lambda-1)+1}{n(\lambda-1)-1} \to \varepsilon$

$$\longrightarrow \frac{\lambda}{\lambda-1}\cdot 0 + \varepsilon = \varepsilon \quad \text{pro } n \to +\infty.$$

Tedy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{x\in M} |s_n(x) - \sigma_n(x)| \le \varepsilon .$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, platí $\boxed{(5)\ \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |s_n(x) - \sigma_n(x)| = 0.}$

Tedy

$$0 \le \sup_{x\in M} |s_n(x) - s(x)| \le \underbrace{\sup_{x\in M} |s_n(x) - \sigma_n(x)|}_{\searrow 0 \text{ dle } (5)} + \underbrace{\sup_{x\in M} |\sigma_n(x) - s(x)|}_{\searrow 0 \text{ dle } (1)},$$

a proto

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |s_n(x) - s(x)| = 0,$$

tj. platí (2). $\square$

Definice (funkce s konečnou variací). Buď $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$ a f konečná reálná funkce definovaná na $\langle a,b\rangle$. Řekneme, že **f má konečnou variaci na $\langle a,b\rangle$** (značení $f \in BV(\langle a,b\rangle)$), jestliže ex. $C \in (0,+\infty)$ tak, že platí

$$V(f,D) := \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq C$$

pro všechna dělení

$$D: \quad a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$$

intervalu $\langle a,b\rangle$.

Číslo $V_a^b(f) := \sup_D V(f,D)$ se nazývá **totální variace fce f** na $\langle a,b\rangle$.

Poznámky. 1) Lze se omezit na dělení

$$D: \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

2) Je-li D_1 zjemnění dělení D, pak

$$V(f,D) \leq V(f,D_1).$$

3) Je-li f monotónní na $\langle a,b\rangle$, pak

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|.$$

4) $f \in BV(\langle a,b\rangle) \Rightarrow f \in B(\langle a,b\rangle)$.

(Nechť pro $D: \ a \leq x \leq b$ máme

$$V(f,D) = |f(x) - f(a)| + \underbrace{|f(b) - f(x)|}_{\geq 0} \leq V_a^b(f) < +\infty$$

$$\Rightarrow \ |f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq |f(a)| + V_a^b(f) < +\infty.)$$

5) $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow V_a^b(\alpha f) = |\alpha| \, V_a^b(f)$.

11. přednáška, MA 4, šk. r. 2016/17, LS, 30.3.2017

Další poznámky. (i) Jestliže fce f splňuje na $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$ Lipschitzovu podmínku, tj.

$$\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x,y \in \langle a,b\rangle : |f(x)-f(y)| \le C|x-y|,$$

pak $V_a^b(f) \le C(b-a)$.

(ii) Nechť $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ (Dirichletova fce).

Buď $-\infty < a < b < +\infty$. Pak $V_a^b(f) = +\infty$.

(iii) Nechť $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x \in (0,1\rangle \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Pak $f \in C(\langle 0,1\rangle)$, ale $V_0^1(f) = +\infty$.

($V_0^1(f) = +\infty$, neboť pro $x_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$, máme

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left|\frac{1}{(k+1)\pi}\cos(k+1)\pi - \frac{1}{k\pi}\cos k\pi\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{(k+1)\pi}(-1)^{k+1} - \frac{1}{k\pi}(-1)^k\right| = \frac{1}{\pi}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) \ge \frac{1}{\pi}\frac{1}{k}.$$ Protože $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty$, je $V_0^1(f) = +\infty$.)

Věta 41 (o množině $BV(\langle a,b\rangle)$ a totální variaci). Buď $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$.

(i) Jestliže $f,g \in BV(\langle a,b\rangle)$, pak $|f|,\ f\pm g,\ fg \in BV(\langle a,b\rangle)$.

(ii) Jestliže $f \in BV(\langle a,b\rangle)$ a $\frac{1}{f} \in B(\langle a,b\rangle)$, pak $\frac{1}{f} \in BV(\langle a,b\rangle)$.

(iii) Je-li $a<c<b$ a f konečná reálná fce definovaná na $\langle a,b\rangle$, pak $$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

(iv) Je-li f konečná reálná fce definovaná na $\langle a,b\rangle$, pak fce $x \mapsto V_a^x(f)$ je neklesající na $\langle a,b\rangle$.

(v) Jestliže $f \in BV(\langle a,b\rangle)$, pak fce $x \mapsto V_a^x(f) - f(x)$ a $x \mapsto V_a^x(f) + f(x)$ jsou neklesající na $\langle a,b\rangle$.

Důkaz. ad (i): Buď $D: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Pak:

1) $\big| |f(x_i)| - |f(x_{i-1})| \big| \leq |f(x_i) - f(x_{i-1})| \quad \forall i = 1, \dots, n,$

a tedy platí $V_a^b(|f|) \leq V_a^b(f)$;

2) $|(f(x_i) \pm g(x_i)) - (f(x_{i-1}) \pm g(x_{i-1}))| \leq |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |g(x_i) - g(x_{i-1})| \quad \forall i = 1, \dots, n,$

a tedy $V_a^b(f \pm g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$;

3) $|f(x_i) g(x_i) - f(x_{i-1}) g(x_{i-1})| =$

$= |f(x_i) g(x_i) - f(x_i) g(x_{i-1}) + f(x_i) g(x_{i-1}) - f(x_{i-1}) g(x_{i-1})| \leq$

$\leq \underbrace{|f(x_i)|}_{\leq K_1 := \sup_{x \in \langle a,b \rangle} |f(x)| < +\infty} |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \underbrace{|g(x_{i-1})|}_{\leq K_2 := \sup_{x \in \langle a,b \rangle} |g(x)| < +\infty} \cdot |f(x_i) - f(x_{i-1})| \quad \forall i = 1, \dots, n,$

a tedy $V_a^b(fg) \leq K_1 V_a^b(g) + K_2 V_a^b(f)$;

ad (ii): Je-li $C := \sup_{x \in \langle a,b \rangle} \left| \frac{1}{f(x)} \right|$ a $D: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n$, pak

$$\left| \frac{1}{f(x_i)} - \frac{1}{f(x_{i-1})} \right| = \frac{|f(x_{i-1}) - f(x_i)|}{|f(x_i)| \cdot |f(x_{i-1})|} \leq C^2 |f(x_i) - f(x_{i-1})| \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

a tedy $V_a^b\left(\frac{1}{f}\right) \leq C^2 V_a^b(f)$.

ad (iii): Buď D_1 dělení $\langle a, c \rangle$, D_2 dělení $\langle c, b \rangle$ a $D = D_1 \cup D_2$.

Pak $V(f, D) = V(f, D_1) + V(f, D_2) \Rightarrow V_a^b(f) \geq V(f, D_1) + V(f, D_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{V_a^b(f) \geq V_a^c(f) + V_c^b(f). \quad (*)}$

Nechť nyní D je dělení $\langle a, b \rangle$ a $\bar{D} = D \cup \{c\}$. Pak $\bar{D} \cap \langle c, b \rangle$, a platí

$\bar{D} = D_1 \cup D_2$, kde $D_1 = \bar{D} \cap \langle a, c \rangle$, $D_2 = \bar{D} \cap \langle c, b \rangle$

$V(f, D) \leq V(f, \bar{D}) = V(f, D_1) + V(f, D_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow V(f, D) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$

$\Rightarrow \underline{V_a^c(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f) \quad (2*)}$.

$(*)$ & $(2*)$ $\Rightarrow$ (iii).

ad (iv): Buď $a \leq x < y \leq b$. Pak z (iii) plyne

$$V_a^x(f) + \underbrace{V_x^y(f)}_{\geq 0} = V_a^y(f),$$

a tedy $V_a^x(f) \leq V_a^y(f)$.

ad (v). Buď $a \leq x < y \leq b$. Pak

(3*) $\pm(f(x)-f(y)) \leq |f(x)-f(y)| \leq V_x^y(f) \overset{\text{dle (iii)}}{=} \underbrace{V_a^y(f) - V_a^x(f)}$.

tento rozdíl má smysl, neboť $\infty > V_a^b(f) \geq V_a^r(f)$ (dle (iv)) $\forall r \in \langle a,b\rangle$

Vezmu-li v LHS (3*) sgn +, pak (3*) $\Rightarrow$

$$f(x) + V_a^x(f) \leq f(y) + V_a^y(f).$$

Vezmu-li v LHS(3*) sgn −, pak (3*) $\Rightarrow$

$$V_a^x(f) - f(x) \leq V_a^y(f) - f(y). \quad \square$$

Věta 42 (Jordanův rozklad). Buď $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$ a f konečná reálná fce definovaná na $\langle a,b\rangle$. Pak

$f \in BV(\langle a,b\rangle) \iff f = f_1 - f_2$, kde f_1, f_2 jsou konečné neklesající fce na $\langle a,b\rangle$.

Důkaz. Je-li $f = f_1 - f_2$, kde f_i $(i=1,2)$ jsou konečné neklesající na $\langle a,b\rangle$, pak

$$V_a^b(f) = V_a^b(f_1 - f_2) \leq V_a^b(f_1) + V_a^b(f_2) =$$
$$= |f_1(b) - f_1(a)| + |f_2(b) - f_2(a)| < +\infty.$$

neb $f_1, f_2 \in \uparrow$

Naopak, je-li $f \in BV(\langle a,b\rangle)$, pak $\forall x \in \langle a,b\rangle$ platí

$$f(x) = \underbrace{V_a^x(f)}_{=:f_1} - \underbrace{(V_a^x(f) - f(x))}_{=:f_2} = f_1(x) - f_2(x)$$

a dle Věty 41 fce f_i $(i=1,2)$ jsou neklesající na $\langle a,b\rangle$. $\square$

Poznámka. Rozklad fce $f \in BV(\langle a,b\rangle)$ ve Větě 42 není určen jednoznačně. Je-li totiž $f = f_1 - f_2$, kde f_1 a f_2 jsou konečné neklesající fce na $\langle a,b\rangle$, pak také

$$f = (f_1 + g) - (f_2 + g),$$

kde g je konečná neklesající fce na $\langle a,b\rangle$.

Poznámka. Je-li f neklesající fce na $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $a<b$, pak v každém bodě $x \in (a,b)$ existují limity *)

$$f(x+) = \lim_{y \to x+} f(y) = \inf_{x<y<b} f(y),$$

$$f(x-) = \lim_{y \to x-} f(y) = \sup_{a<y<x} f(y).$$

Z faktu, že f je neklesající na (a,b) pak plyne, že

$$f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) \quad \forall x \in (a,b).$$

Lemma 43 (o množině bodů nespojitosti neklesající fce).

Buď f konečná neklesající fce na $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $a<b$, a $M := \{x \in (a,b);\ f \text{ není spojitá v bodě } x\}$. Pak M je spočetná množina.

Důkaz. Buď
$$M_1 = \{x \in (a,b);\ f(x) < f(x+)\},$$
$$M_2 = \{x \in (a,b);\ f(x) > f(x-)\}.$$

Z výše uvedené Poznámky plyne, že stačí dokázat, že M_1 a M_2 jsou spočetné množiny. Dokážeme spočetnost množiny M_1 (spočetnost M_2 se ověří analogicky). Každému bodu $x \in M_1$ přiřadíme číslo $r(x) \in \mathbb{Q}$ takové, že $f(x) < r(x) < f(x+)$. Protože množina $\mathbb{Q}$ je spočetná, stačí dokázat, že zobrazení $x \longmapsto r(x)$ je prosté na M_1.

Buď $x_1, x_2 \in M_1$, $x_1 \neq x_2$. BÚNO $x_1 < x_2$. Pak

$$f(x_1) < r(x_1) < f(x_1+) \underset{\uparrow}{\leq} f(x_2) < r(x_2) < f(x_2+),$$

neb f je neklesající

$$r(x_1) < r(x_2).$$

$\square$

Věta 44 (o množině bodů nespojitosti fce $f \in BV(\langle a,b\rangle)$). Je-li $f \in BV(\langle a,b\rangle)$, pak množina bodů nespojitosti fce f je spočetná.

Důkaz. Věta 44 je důsledkem Věty 42 a Lemmatu 43. $\square$

---

*) cf. Věta 77 (limita monotónní fce) 16. přednáška MA 1.

./.

Věta 45 (o spojitosti fce $x \longmapsto V_a^x(f)$). Nechť $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$, $a<b$, $f\in BV(\langle a,b\rangle)$. Je-li f spojitá v nějakém bodě x_0, pak v tomto bodě je také spojitá fce $x\longmapsto V_a^x(f)$.

Důkaz. Buď $x_0<b$. Dokážeme, že fce $V_a^x(f)$ je spojitá zprava v bodě x_0, pokud f je spojitá v bodě x_0 zprava. (Analogické tvrzení o spojitosti zleva v bodě $x_0>a$ lze dokázat obdobně.)

Buď $\varepsilon>0$ a D dělení intervalu $\langle x_0,b\rangle$,

$$D:\quad x_0<x_1<\dots<x_n=b$$

takové, že

$$(1)\quad V(f,D)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|>V_{x_0}^b(f)-\varepsilon.$$

Ze spojitosti fce f v bodě x_0 zprava plyne

$$\exists\,\delta\in(0,b-x_0)\ \forall x\in(x,x_0+\delta):\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Protože platí $V(f,D)\le V(f,D_1)$, kde $D\subset D_1$, lze předpokládat, že $x_1\in(x_0,x_0+\delta)$, a tedy

$$(2)\qquad |f(x_1)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Pak z (1) a (2) máme

$$V_{x_0}^b(f)\underset{\text{dle (1)}}{\le} V(f,D)+\varepsilon=\overbrace{\underbrace{|f(x_1)-f(x_0)|}_{<\varepsilon \text{ dle (2)}}+\sum_{i=2}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|}^{=V(f,D)}+\varepsilon$$

$$<2\varepsilon+\sum_{i=2}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|<2\varepsilon+V_{x_1}^b(f)$$

$$\Rightarrow\quad \underbrace{V_{x_0}^b(f)-V_{x_1}^b(f)}_{=V_{x_0}^{x_1}(f)=V_a^{x_1}(f)-V_a^{x_0}(f)}<2\varepsilon.$$

Tedy $0\le V_a^{x_1}(f)-V_a^{x_0}(f)<\varepsilon$ if $x_1\in(x_0,x_0+\delta)$. $\square$

Věta 46 (o rozkladu fce $f\in BV(\langle a,b\rangle)\cap C(\langle a,b\rangle)$). Je-li $\langle a,b\rangle\subset\mathbb{R}$, $a<b$, $f\in BV(\langle a,b\rangle)\cap C(\langle a,b\rangle)$, pak $f=f_1-f_2$, kde f_1,f_2 jsou neklesající a spojité fce na $\langle a,b\rangle$.

Důkaz. Dle důkazu Věty 42 platí

(2) $$f(x) = \underbrace{V_a^x(f)}_{=f_1} - \underbrace{\left(V_a^x(f) - f(x)\right)}_{=f_2},$$

kde f_1 a f_2 jsou (dle Věty 41) neklesající fce na $\langle a,b\rangle$.

Z (2) a Věty 45 pak plyne, dané tvrzení. $\square$

Věta 47 (vzorec pro $V_a^b(f)$, je-li $f' \in C(\langle a,b\rangle)$). Je-li $f' \in C(\langle a,b\rangle)$, kde $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$, $a<b$, pak $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|\,dx$.

Důkaz. Označme $I = \int_a^b |f'(x)|\,dx$. Tento integrál existuje jako Riemannův. Buď $\varepsilon > 0$. Z Riemannovy definice $\int_a^b |f'(x)|\,dx$ plyne, že

$\exists \delta > 0\ \forall D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $\langle a,b\rangle$, $\forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$, $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i=1,\dots,n$:

(3) $$\left|\sum_{i=1}^n |f'(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) - I\right| < \varepsilon.$$

splňující $\|D\| < \delta$. Pak

Buď tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení $\langle a,b\rangle$ splňující $\|D\|<\delta$. Pak z Lagrangeovy věty plyne, že existují body $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i=1,\dots,n$, tak, že platí

(4) $$V(f,D) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |f'(\xi_i)|(x_i - x_{i-1})$$

Odtud a z (3) máme

(5) $$I - \varepsilon < V(f,D) < I + \varepsilon.$$

Je-li nyní $\tilde{D}$ libovolné dělení $\langle a,b\rangle$ a D jeho zjemnění splňující $\|D\| < \delta$, pak

$$V(f,\tilde{D}) \le V(f,D) \underset{\text{dle (5)}}{<} I + \varepsilon$$

$\Rightarrow \sup_{\tilde{D}} V(f,\tilde{D}) \le I + \varepsilon$, a protože $\varepsilon > 0$ je libovolné, platí

$$V_a^b(f) = \sup_{\tilde{D}} V(f,\tilde{D}) \le I,$$

tj. číslo $I = \int_a^b |f'(x)|\,dx$ je horní odhad množiny

(6) $$\{V(f,\tilde{D});\ \tilde{D} \text{ dělení } \langle a,b\rangle\}.$$

Na druhé straně, je-li $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ číslo z (3), pak pro dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ splňující $\|D\| < \delta$ platí (cf. (3), (4), (5))

$$I - \varepsilon < V(f,D).$$

Tedy číslo $I = \int_a^b |f'(x)|\,dx$ je nejmenší horní odhad množiny (6).

Celkem dostáváme

$$I = \int_a^b |f'(x)|\,dx = \sup_D V(f,D) = V_a^b(f). \quad \square$$

12. přednáška, MA 4, šk. r. 2016/17, LS, 31. 3. 2017

Věta 48 (o Fourierových koeficientech fce $f \in BV(\langle 0, 2\pi \rangle)$).

Nechť $f \in P_{2\pi} \cap BV(\langle 0, 2\pi\rangle)$ a

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak platí

$$(1) \qquad |k a_k| \le \frac{V_0^{2\pi}(f)}{2}, \quad |k b_k| \le \frac{V_0^{2\pi}(f)}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Dle Věty 28 (7. přednáška) platí

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Protože $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{substituce } x = y + \frac{\pi}{k}}}{=} \int_{-\pi/k}^{2\pi - \pi/k} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \cos k\left(y + \frac{\pi}{k}\right) dy$$

a $\cos k\left(y + \frac{\pi}{k}\right) = \cos(ky + \pi) = \cos ky \underbrace{\cos \pi}_{=-1} - \sin ky \underbrace{\sin \pi}_{=0} = -\cos ky$,

dostáváme

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = -\int_{-\pi/k}^{2\pi - \pi/k} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \cos ky \, dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{neboť } f \text{ má periodu } 2\pi}}{=} -\int_0^{2\pi} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \cos ky \, dy.$$

Tedy

$$a_k = \frac{1}{2}(a_k + a_k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \cos ky \, dy\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(y) - f\left(y + \frac{\pi}{k}\right)\right] \cos ky \, dy \quad \Longrightarrow$$

$$(2) \qquad |a_k| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y)\right| dy \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Analogicky dostaneme $\forall k \in \mathbb{N}$

$$(3) \qquad |b_k| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y)\right| dy$$

Dále $\forall j, k \in \mathbb{N}$ platí

$$(4) \qquad \int_0^{2\pi} \left| f\left(x + j\frac{\pi}{k}\right) - f\left(x + (j-1)\frac{\pi}{k}\right)\right| dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{substituce } x + (j-1)\frac{\pi}{k} = y \\ \Rightarrow x + j\frac{\pi}{k} = y + \frac{\pi}{k}}}{=} \int_{(j-1)\frac{\pi}{k}}^{2\pi + (j-1)\frac{\pi}{k}} \left| f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y)\right| dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y)\right| dy.$$

Protože $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} \left| f\left(y+\frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right| dy = \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^{2k} \int_0^{2\pi} \left| f\left(y+\frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right| dy =$$

$$\underset{\text{dle (4)}}{=} \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^{2k} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x+j\frac{\pi}{k}\right) - f\left(x+(j-1)\frac{\pi}{k}\right) \right| dx =$$

$$= \frac{1}{2k} \int_0^{2\pi} \Bigg(\underbrace{\sum_{j=1}^{2k} \left| f\left(x+j\frac{\pi}{k}\right) - f\left(x+(j-1)\frac{\pi}{k}\right) \right|}_{\le V_x^{x+2\pi}(f) \,=\, V_0^{2\pi}(f)} \Bigg) dx \le$$

neb f má periodu 2π

$$\le \frac{1}{2k} V_0^{2\pi}(f) \int_0^{2\pi} dx = \frac{2\pi}{2k} V_0^{2\pi}(f),$$

tak z (2) plyne

$$|a_k| \le \frac{1}{2k} V_0^{2\pi}(f) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

a obdobně z (3) dostaneme

$$|b_k| \le \frac{1}{2k} V_0^{2\pi}(f) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tedy platí (1). □

Věta 49 (Dirichletovo-Jordanovo kritérium).

Nechť $f \in P_{2\pi} \cap BV(\langle 0, 2\pi \rangle)$.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$ platí $s_n(x) \to \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right)$.

(ii) Je-li $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in C((a,b))$, pak

$$s_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } (a,b).$$

Důkaz. BÚNO f je reálná. Protože $f \in BV(\langle 0, 2\pi \rangle)$ a f je 2π-periodická, tak $f \in BV(\langle a,b \rangle)$ $\forall \langle a,b \rangle \subset \mathbb{R}$, $a<b$. Je-li $x \in \mathbb{R}$, zvolme $\langle a,b \rangle$ tak, aby $x \in (a,b)$. Dle Věty 42 (Jordanův rozklad) platí $f = f_1 - f_2$, kde f_1 a f_2 jsou neklesající na $\langle a,b \rangle$. Protože $x \in (a,b)$, plyne odtud, že existují konečné limity $f(x+)$ a $f(x-)$ (cf. Poznámka před Lemmatem 43, 11. přednáška). Podle části (i) Věty 38 (Fejér) platí $\sigma_n(x) \to \frac{1}{2}\left(f(x+)+f(x-)\right)$ pro $n \to \infty$. Dále z Věty 48 a z Věty 40 (Hardy) (kde volíme $M = \{x\}$) plyne, že $s_n(x) \to \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right)$ pro $n \to \infty$, což dokazuje část (i) Věty 49.

Je-li $f \in C((a,b))$, pak z Věty 38 (ii) máme, že

$$\sigma_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \text{ na } (a,b),$$

a tedy $\sigma_n \rightrightarrows f$ na $\forall \langle \alpha, \beta \rangle \subset (a,b)$. Obdobně jako v důkaze části (i) pak z Věty 48 a z Věty 40 (kde nyní volíme $M = \langle \alpha, \beta \rangle \subset (a,b)$) dostaneme

$$s_n \rightrightarrows f \text{ na } \forall \langle \alpha, \beta \rangle \subset (a,b),$$

tj. $s_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b).

Úmluva. Je-li $M \subset \mathbb{R}$, pak symbolem $|M|_e$ označíme (jednodimenzionální) vnější Lebesgueovu míru (Lebesgue exterior measure) množiny M. Podobně, je-li $M \subset \mathbb{R}$ lebesgueovsky měřitelná množina, pak symbol $|M|$ značí její (jednodimenzionální) Lebesgueovu míru.

Definice. Buď $\mathcal{S}$ systém nedegenerovaných intervalů v $\mathbb{R}$ a $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že $\mathcal{S}$ pokrývá množinu M ve Vitaliově smyslu, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in M \ \exists I \in \mathcal{S} : \ x \in I \wedge |I| < \varepsilon.$$

Poznámky. Buď $M \subset \mathbb{R}$ a $\mathcal{S}$ systém nedegenerovaných intervalů, který pokrývá M ve Vitaliově smyslu.

(i) Pak $\forall I \in \mathcal{S}$, je $\bar{I}$ uzavřený interval a $|\bar{I}| = |I|$. Tedy $\{\bar{I};\ I \in \mathcal{S}\}$ je systém uzavřených nedegenerovaných intervalů pokrývající M ve Vitaliově smyslu.

(ii) Je-li $|M|_e < +\infty$, pak ex. otevřená množina $G \subset \mathbb{R}$ taková, že $M \subset G$ a $|G| < +\infty$. Je-li $x \in M$, pak $x \in G$, G je ot., a tedy ex. $U(x) \subset G$. Položíme-li $\mathcal{S}_x := \{I \in \mathcal{S};\ x \in I \subset U(x)\}$, pak $\mathcal{S}_G := \bigcup_{x \in M} \mathcal{S}_x$ je systém nedegenerovaných intervalů, který opět pokrývá M ve Vitaliově smyslu, a pro který platí $I \subset G \ \forall I \in \mathcal{S}_G$.

Věta 50 (Vitali). Buď $M \subset \mathbb{R}$, $0 < |M|_e < +\infty$, a $\mathcal{S}$ systém nedegenerovaných intervalů, který pokrývá množinu M ve Vitaliově smyslu. Pak $\forall \varepsilon > 0$ existuje disjunktní konečný systém intervalů $\{I_1, \dots, I_m\} \subset \mathcal{S}$ takový, že

(5) $$\Big|M \setminus \bigcup_{j=1}^{m} I_j\Big|_e < \varepsilon .$$

Důkaz. Buď $G \subset \mathbb{R}$ ot. množina splňující $M \subset G$ a $|G| < +\infty$. Dle předešlé poznámky lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že:

(6) intervaly ze $\mathcal{S}$ jsou uzavřené,

(7) $\forall I \in \mathcal{S}$ platí $I \subset G$.

Buď $\varepsilon > 0$. Zkonstruujeme induktivně posloupnost disjunktních intervalů $\{I_j\}$ ze systému $\mathcal{S}$: Buď $I_1 \in \mathcal{S}$ libovolný interval. Je-li $M \subset I_1$, pak konstrukci ukončíme, neboť platí (5) s $m = 1$.

Jestliže neplatí $M \subset I_1$, pokračujeme v konstrukci takto: Je-li $j \in \mathbb{N}$ a jsou-li již disjunktní intervaly $I_1, \dots, I_j$ ze systému $\mathcal{S}$ vybrány, položíme

$$F_j := \bigcup_{i=1}^{j} I_i$$

Je-li $M \subset F_j$, konstrukci ukončíme, neboť (5) platí s $m = j$.

Jestliže neplatí $M \subset F_j$, existuje $x \in M \setminus \underbrace{F_j}_{\text{uzavřená množina}} \subset \underbrace{G \setminus F_j}_{\text{ot. množina}}$.

Z (7) plyne, že

(8) $$|I| \leq |G| < +\infty \quad \forall I \in \mathcal{S}.$$

$\Rightarrow$ I je omezený interval $\forall I \in \mathcal{S}$.

Odtud a z (6) pak plyne, že I je kompaktní $\forall I \in \mathcal{S}$.

$\Rightarrow$ F_j je kompaktní množina $\Rightarrow$

(9) $$\varrho_j := \operatorname{dist}(x, F_j) > 0$$

(neboť $y \mapsto \operatorname{dist}(x, y)$ je spojitá fce na $\mathbb{R}$, která na kompaktní množině F_j nabývá minima ϱ_j).

Protože $\mathcal{S}$ pokrývá M ve Vitaliově smyslu a platí (9) a (7), tak

(10) $\exists I \in \mathcal{S} : \ x \in I \subset G \setminus F_j$. (Tedy $I \cap I_i = \emptyset$ $\forall i = 1, \dots, j$.)

Buď

(11) $$s_j := \sup\{|I| ; \ I \in \mathcal{S}, \ I \subset G \setminus F_j\}.$$

Platí

$$0 < s_j < +\infty .$$

dle (10) a (11)   dle (8) a (11)

Z definice suprema plyne, že

(12) $\exists\, I_{j+1} \in \mathcal{S}: \quad |I_{j+1}| > \frac{1}{2} s_j \quad a \quad I_{j+1} \subset G \setminus F_j$.*)

Tím je popsána konstrukce intervalů $I_1, I_2, \dots$.

Buďto

(13) $M \subset \bigcup_{i=1}^{j+1} I_i$ pro nějaké $j \in \mathbb{N}$

(a pak jsme hotovi, neb (5) platí s $n = j+1$),

nebo popsanou konstrukcí dostaneme nekonečnou posloupnost disjunktních intervalů $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$, která leží v G, s vlastností

(14) $|I_{j+1}| > \frac{1}{2} s_j > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

Protože I_j, $j \in \mathbb{N}$, jsou disjunktní intervaly ležící v G, platí

($14\frac{1}{2}$) $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| = \left|\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right| \le |G| < +\infty$.

Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že

(15) $\sum_{j=n+1}^{\infty} |I_j| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Dokážeme, že pro toto $n \in \mathbb{N}$ platí (5) (a tím bude důkaz dokončen).

Buď $x \in \underbrace{M \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j}_{\text{víme, že tato množina je neprázdná, neboť neplatí (13)}} = M \setminus F_n \subset G \setminus F_n$ libovolný bod.

Protože $\mathcal{S}$ pokrývá M ve Vitaliově smyslu, ex. $I \in \mathcal{S}$ tak, že

(16) $x \in I \subset G \setminus F_n$.

Tvrdíme, že nemůže platit

(17) $I \subset G \setminus F_j \quad \forall j \in \mathbb{N},\ j > n$. ./.

Kdyby (17) platilo, pak bychom dostali, že

---

*) Idea je tato: Chceme pokrýt co největší část množiny M disjunktními intervaly $I_1, \dots, I_j, I_{j+1}$ ze systému $\mathcal{S}$, a proto volíme I_{j+1} dosti velký (a disjunktní s intervaly $I_1, \dots, I_j$).

$$|I| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dle (11)}}}{\le} s_j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dle (12)}}}{<} 2|I_{j+1}| \quad \forall j \in \mathbb{N},\ j > m,$$

tedy by platilo

$$|I| < 2\underbrace{|I_{j+1}|}_{\downarrow 0 \text{ dle } (14\frac{1}{2})} \quad \forall j \in \mathbb{N},\ j > m.$$

$\Rightarrow$ spor.

Proto (17) neplatí, což znamená, že

$$\exists\ k > m,\ k \in \mathbb{N}:\ I \not\subset G \setminus F_k,$$

a tedy $I \cap F_k \neq \emptyset$. Vezmeme nejmenší $k \in \mathbb{N}$, $k > m$, splňující $I \cap F_k \neq \emptyset$. Tedy

$$I \cap F_k \neq \emptyset, \quad \text{ale } I \cap F_{k-1} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \quad I \cap I_k \neq \emptyset.$$

Přitom platí

(18) $$|I| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{neb } I \subset G \setminus F_{k-1}}}{\le} s_{k-1} \overset{\substack{\text{dle volby } I_k \text{ (viz konstrukce)} \\ \downarrow}}{<} 2|I_k|.$$

Buď $y \in I \cap I_k$ a nechť z_k je střed intervalu I_k. Pak

$$\operatorname{dist}(x, z_k) \le \underbrace{\operatorname{dist}(x,y)}_{\substack{\le |I| < 2|I_k| \\ \uparrow \\ \text{neb dle (16) } x \in I, \\ \text{zároveň } y \in I}} + \underbrace{\operatorname{dist}(y, z_k)}_{\le \frac{|I_k|}{2}} < \frac{5}{2}|I_k|.$$

dle (18)

Tedy

(19) $$x \in \left\langle z_k - \tfrac{5}{2}|I_k|,\ z_k + \tfrac{5}{2}|I_k| \right\rangle =: J_k.$$

Protože $x \in M \setminus \bigcup_{j=1}^{m} I_j$ byl libovolný bod, platí

$$M \setminus \bigcup_{j=1}^{m} I_j \subset \bigcup_{\substack{k>m \\ k \in \mathbb{N}}} J_k$$

$$\Rightarrow \left| M \setminus \bigcup_{j=1}^{m} I_j \right|_e \le \left| \bigcup_{\substack{k>m \\ k\in\mathbb{N}}} J_k \right| \le \sum_{\substack{k>m \\ k \in \mathbb{N}}} \overbrace{|J_k|}^{= 5|I_k| \text{ dle (19)}} = 5 \sum_{\substack{k>m \\ k\in\mathbb{N}}} |I_k| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dle (15)}}}{<} \varepsilon,$$

tj. platí (5). $\square$

13. přednáška, MA 4, šk. r. 2016/17, LS, 6. 4. 2017.

Limes superior a inferior reálné fce

Definice 1. Buď $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$, $\Delta > 0$ a f reálná fce definovaná na množině $A \cap \{x \in \mathbb{R};\ 0 < |x-a| < \Delta\}$. Pak definujeme (✓.)

$$\limsup_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) := \lim_{\delta \to 0+} \sup_{\substack{0<|x-a|<\delta \\ x \in A}} f(x) \quad \text{(limes superior fce } f \text{ v bodě } a \text{ vzhledem k } A\text{)},$$

$$\liminf_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) := \lim_{\delta \to 0+} \inf_{\substack{0<|x-a|<\delta \\ x \in A}} f(x) \quad \text{(limes inferior fce } f \text{ v bodě } a \text{ vzhledem k } A\text{)}.$$

Poznámka 1. Pro $0 < \delta < \Delta$ označme

$$s(\delta) := \sup_{\substack{0<|x-a|<\delta \\ x \in A}} f(x), \quad i(\delta) := \inf_{\substack{0<|x-a|<\delta \\ x \in A}} f(x).$$

Pak platí

(i) $s(\delta) \geq i(\delta) \quad \forall \delta \in (0, \Delta)$

(ii) $0 < \delta_1 < \delta_2 < \Delta \Rightarrow s(\delta_1) \leq s(\delta_2)$ (tedy fce $\delta \mapsto s(\delta)$ je neklesající na $(0, \Delta)$)

(iii) $0 < \delta_1 < \delta_2 < \Delta \Rightarrow i(\delta_1) \geq i(\delta_2)$ (tedy fce $\delta \mapsto i(\delta)$ je nerostoucí na $(0, \Delta)$).

Proto existují limity

(1) $$\lim_{\delta \to 0+} s(\delta) = \limsup_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x), \quad \lim_{\delta \to 0+} i(\delta) = \liminf_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$$

a z (i) plyne, že

$$\limsup_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \geq \liminf_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x).$$

Poznámka 2. Je-li v Definici 1:

(i) $A = (a-\Delta, a+\Delta)$, pak píšeme $\underline{\limsup_{x \to a} f(x)}$ místo $\limsup_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$;

(ii) $A = (a, a+\Delta)$, pak píšeme $\underline{\limsup_{x \to a+} f(x)}$ místo $\limsup_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$;

(iii) $A = (a-\Delta, a)$, pak píšeme $\underline{\limsup_{x \to a-} f(x)}$ místo $\limsup_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$.

Obdobně pro limes inferior.

✓. **Věta 51** (o limes superior a limes inferior). Buď f, a, A jako v Definici 1. Pak $L := \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ existuje právě tehdy, když

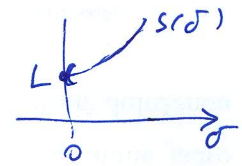
$$\limsup_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \liminf_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = L_1 \quad (\text{a pak } L = L_1).$$

Důkaz ... Dcv.

Poznámka 3. (i) Buď $L = \limsup\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$.

I. Nechť $c > L$. Protože dle (1) platí

(2) $$L = \lim_{\delta\to 0+} s(\delta),$$



tak

$$\exists\, \delta_0 > 0 \ \forall \delta \in (0,\delta_0\rangle : s(\delta) < c,$$

tj. $\sup\limits_{\substack{0<|x-a|<\delta\\ x\in A}} f(x) < c \quad \forall \delta \in (0,\delta_0)$

$\Rightarrow \ f(x) < c \quad \forall x \in A,\ 0<|x-a|<\delta \ \forall \delta\in(0,\delta_0)$.

Tedy

(3) $$\exists\, \delta_0 > 0 \ \forall \delta \in (0,\delta_0\rangle \ \forall x \in A,\ 0<|x-a|<\delta : f(x) < c. \ ^{*)}$$

II. Nechť $c_0 < L$. Odtud a z (2) plyne

(4) $$\exists\, \delta_0 > 0 \ \forall \delta \in (0,\delta_0\rangle : c_0 < s(\delta)$$

tj. $c_0 < \sup\limits_{\substack{0<|x-a|<\delta\\ x\in A}} f(x)$,

a tedy

(5) $$\exists\, \delta_0 > 0 \ \forall \delta \in (0,\delta_0\rangle \ \exists\, x_\delta \in A,\ 0<|x_\delta - a|<\delta : c_0 < f(x_\delta) \le s(\delta).$$

Položme $x_0 := x_{\delta_0}$. Buď $c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < L$,

(6) $$\lim_{i\to+\infty} c_i = L.$$

Použijeme-li (5) s číslem c_1 místo c_0 a s $\delta = \delta_1 := \min\{|x_0 - a|, \frac{\delta_0}{2}\}$, dostaneme, že

$\exists\, x_1 := x_{\delta_1} \in A,\ 0 < |x_1 - a| < \delta_1$ (tedy $|x_1 - a| < \delta_1 \le |x_0 - a|$) tak, že

$$c_1 < f(x_1) \le s(\delta_1).$$

Použijeme-li nyní (5) s číslem c_2 místo c_0 a s $\delta = \delta_2 := \min\{|x_1 - a|, \frac{\delta_0}{2^2}\}$, dostaneme, že

$\exists\, x_2 := x_{\delta_2} \in A,\ 0 < |x_2 - a| < \delta_2$ (tedy $|x_2 - a| < \delta_2 \le |x_1 - a|$) tak, že

$$c_2 < f(x_2) \le s(\delta_2).$$

Postupujeme-li takto dále, dostaneme (indukcí) posl. $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ bodů z A splňující

(7) $$0 < |x_{i+1} - a| < |x_i - a| \quad \forall i \in \mathbb{N}_0, \quad x_i \to a \text{ pro } i\to+\infty,$$

(8) $$c_i < f(x_i) \le s(\delta_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

---

*) (3) $\Leftrightarrow \exists\, \delta_0 > 0 \ \forall x \in A,\ 0<|x-a|<\delta_0 : f(x) < c$.

Protože $\delta_i \leq \frac{\delta_0}{2^i}$ $\forall i \in \mathbb{N}_0$, platí $\delta_i \to 0_+$ pro $i \to +\infty$, a tedy $s(\delta_i) \to L$ pro $i \to +\infty$. Dále víme, že $c_i \to L$ pro $i \to +\infty$. Tudíž limitním přechodem v (8) pro $i \to +\infty$ dostaneme

(9) $$f(x_i) \to L \quad \text{pro } i \to +\infty.$$

Poznamenejme, že speciálně pro posl. $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ bodů z A platí (7) a (cf. (8))

(10) $$c_0 < f(x_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

III. Poznamenejme také, že pokud $c > L$, pak z (3) plyne *) existence posl. $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ bodů z A splňující (7) a (cf. (10))

(11) $$f(x_i) < c \quad \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) Buď $L = \liminf\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$. Analogicky jako v části (i) lze dokázat:

I. Je-li $c < L$, pak

(3') $\exists \delta_0 > 0 \ \forall \delta \in (0, \delta_0\rangle \ \forall x \in A, \ 0 < |x-a| < \delta : c < f(x)$. **)

II. Jestliže $c_0 > c_1 > c_2 > \ldots > L$, $c_i \to L$ pro $i \to +\infty$, pak existuje posl. $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ bodů z A splňující (7) a (9). Speciálně pro posl. $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ platí (7) a

(10') $$f(x_i) < c_0 \quad \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

III. Pokud $c < L$, pak z (3') plyne existence posl. $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ bodů z A splňující (7) a

(11') $$c < f(x_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

---

*) Porovnej (3) s (5).

**) (3') $\iff \exists \delta_0 > 0 \ \forall x \in A, \ 0 < |x-a| < \delta_0 : c < f(x)$.

Derivovaná čísla (nebo Diniho čísla nebo Diniho derivace)

Definice. Buď $\Delta > 0$, $x \in \mathbb{R}$ a f konečná reálná fce definovaná pro $y \in \langle x, x+\Delta)$. Pak čísla

$$D^+ f(x) := \limsup_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a

$$D_+ f(x) := \liminf_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

nazýváme horním a dolním derivovaným číslem fce f v bodě x zprava.

Je-li $\Delta > 0$, $x \in \mathbb{R}$ a f konečná reálná fce definovaná pro $y \in (x-\Delta, x\rangle$, pak čísla

$$D^- f(x) := \limsup_{h \to 0+} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

a

$$D_- f(x) := \liminf_{h \to 0+} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

nazýváme horním a dolním derivovaným číslem fce f v bodě x zleva.

Věta 52 (o derivaci neklesající fce). Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je neklesající a konečná fce na (a,b). Pak $f'(x)$ existuje pro s.v. $x \in (a,b)$.

Důkaz. BÚNO: (a,b) je omezený.
Ukážeme, že množina bodů $x \in (a,b)$, na které se některá dvě derivovaná čísla liší, má míru 0.
Ověříme to např. pro množinu

$$A := \{x \in (a,b)\,;\ D^+ f(x) > D_- f(x)\}$$

(pro zbývající množiny je důkaz obdobný). Protože $A = \bigcup_{\substack{[r,s] \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \\ r > s}} A_{rs}$,
kde $A_{rs} := \{x \in (a,b)\,;\ D^+ f(x) > r > s > D_- f(x)\}$,
a protože $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ je spočetná, stačí množina dokázat, že $t := |A_{rs}|_e = 0$.

Buď $\varepsilon > 0$. Zvolme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$ tak, že

(12) $$A_{rs} \subset G \quad \text{a} \quad |G| < t + \varepsilon.$$

Buď $x \in A_{rs}$ (tedy $x \in G$). Protože $D_- f(x) < s$, tak z Poznámky 3 (cf. (7) a (10')) plyne existence posl. $\{h_i\}_{i=1}^{+\infty}$ takové, že

$$0 < h_{i+1} < h_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad , \quad h_i \to 0 \text{ pro } i \to +\infty ,$$

$$\frac{f(x-h_i) - f(x)}{-h_i} < s \qquad \forall i \in \mathbb{N} ,$$

a navíc

$$\langle x-h_i, x\rangle \subset G \qquad \forall i \in \mathbb{N} . \quad *)$$

Tedy $\forall x \in A_{rs}$ existuje libovolně malý interval $\langle x-h, x\rangle \subset G$ (obsahující x) takový, že $\dfrac{f(x-h)-f(x)}{-h} < s$.

Z uvedeného a z Věty 50 (Vitali) pak plyne existence konečného počtu (řekněme n, $n \in \mathbb{N}$) disjunktních intervalů

$$I_j := \langle x_j - h_j, x_j\rangle \subset G, \; j = 1, \dots, n,$$

tak, že platí

(13) $$f(x_j) - f(x_j - h_j) < s\, h_j \quad , \quad j = 1, \dots, n ,$$

$$\left| A_{rs} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j \right| < \varepsilon .$$

Protože $A_{rs} = \left(A_{rs} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) \cup \left(A_{rs} \cap \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right)$, platí

$$t := |A_{rs}|_e < \varepsilon + \left|A_{rs} \cap \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right|_e ,$$

a tedy

$$\left|A_{rs} \cap \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right|_e > t - \varepsilon .$$

Odtud plyne, že pro množinu $B_{rs} := A_{rs} \cap \bigcup_{j=1}^{n} I_j^{\circ}$ také platí

(14) $$|B_{rs}|_e > t - \varepsilon .$$

Dále máme

(15) $$\sum_{j=1}^{n} \left(f(x_j) - f(x_j - h_j)\right) \overset{\text{dle (13)}}{\leq} s \underbrace{\sum_{j=1}^{n} h_j}_{< |G| \text{ neb } \bigcup_{j=1}^{n} I_j \subset G \text{ a } |I_j| = h_j} < s|G| \overset{\text{dle (12)}}{<} s(t+\varepsilon) .$$

disjunktní intervaly

Z faktů, že $D^+ f(y) > r \;\forall y \in A_{rs}$, $B_{rs} \subset A_{rs}$ a z Poznámky 3 (cf. (7) a (11')) plyne, že pro každý bod $y \in B_{rs}$ lze najít libovolně malý interval tvaru $\langle y, y+k\rangle$, který je obsažen v nějakém I_j° $**)$ $(j = 1, \dots, n)$ a přitom platí $\dfrac{f(y+k)-f(y)}{k} > r$. Z Věty 50 (Vitali) pak plyne existence disjunktních intervalů $J_i := \langle y_i - k_i, y_i\rangle$, $i = 1, \dots, m$, (každý z nich je obsažen v nějakém I_j°) takových, že $\left|B_{rs} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} J_i\right|_e < \varepsilon$ a

(16) $$f(y_i + k_i) - f(y_i) > r k_i \quad \forall i = 1, \dots, m .$$

$*)$ což plyne z faktu, že $x \in G$, G je otevřená a $h_i \to 0+$.

$**)$ Neboť $B_{rs} \subset \left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j^{\circ}\right)$ ← ot. množina.

Protože $B_{rs} = (B_{rs} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} J_i) \cup (B_{rs} \cap \bigcup_{i=1}^{m} J_i)$, platí

$$|B_{rs}|_e < \varepsilon + |B_{rs} \cap \bigcup_{i=1}^{m} J_i|_e$$

$\Rightarrow$ (17) $|B_{rs} \cap \bigcup_{i=1}^{m} J_i| > |B_{rs}|_e - \varepsilon \underset{\text{dle (14)}}{>} t - 2\varepsilon$.

Z (16) a (17) máme

(18) $$\sum_{i=1}^{m} (f(y_i + k_i) - f(y_i)) > r \sum_{i=1}^{m} k_i \underset{\text{neb } \sum_{i=1}^{m} k_i = |\bigcup_{i=1}^{m} J_i|}{\geq} |B_{rs} \cap \bigcup_{i=1}^{m} J_i|_e > r(t-2\varepsilon).$$

Buď nyní I_j pevný interval ($j \in \{1, \dots, n\}$) a

$$M := \{ i \in \{1, \dots, m\};\ J_i \subset I_j \}.$$

Protože f je neklesající a intervaly J_i jsou disjunktní, platí

$$\sum_{i \in M} (f(y_i + k_i) - f(y_i)) \leq f(x_j) - f(x_j - h_j).$$

Odtud plyne

(19) $$\sum_{i=1}^{m} (f(y_i + k_i) - f(y_i)) \leq \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_j - h_j)).$$

Z odhadů (18), (19) a (15) dostáváme

$$r(t - 2\varepsilon) < s(t + \varepsilon) \quad \text{pro libovolné } \varepsilon > 0.$$

Tudíž $rt \leq st$. Protože $r > s$, musí platit $t = 0$, tj. $|A_{rs}| = 0$. $\square$ KONEC PŘEDNÁŠKY (zbytek dodělám příště)

Důsledkem Věty 52 jsou následující tvrzení.

Věta 53 (Lebesgue, 1904). Každá konečná monotonní fce na $\langle a,b \rangle \subset \mathbb{R}$, $a < b$, má derivaci s. v. v $\langle a,b \rangle$.

Věta 54 (o derivaci fce $f \in$ **BV**$(\langle a,b \rangle)$). Buď $\langle a,b \rangle \subset \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in BV(\langle a,b \rangle)$. Pak f' existuje s. v. v $\langle a,b \rangle$.

Důkaz. Věta 53 plyne z Věty 42 (Jordanův rozklad) a Věty 51.

14. přednáška, MA 4, šk. r. 2016/17, LS, 7. 4. 2017

Věta 55 (odhad $\int_a^b f'$ pro f neklesající). Buď $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$, $a<b$, a f konečná neklesající fce na $\langle a,b\rangle$. Pak $f' \in L^1(a,b)$ a platí

(1) $$0 \le \int_a^b f'(x)\,dx \le f(b)-f(a).$$

Speciálně, f' je konečná s.v. v (a,b).

Důkaz. Buď $c \in \mathbb{R}$. Z monotonie fce f plyne, že množina $\{x \in \langle a,b\rangle;\ f(x) > c\}$ je interval, a tedy měřitelná množina. Proto fce f je měřitelná.

Rozšiřme fci f na $\langle a, b+1\rangle$ tak, že položíme

$$f(x) := f(b) \quad \forall x \in (b, b+1\rangle.$$

Dále $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme fci f_n předpisem

(2) $$f_n(x) := n\left(f\left(x+\tfrac{1}{n}\right) - f(x)\right) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \quad \forall x \in \langle a,b\rangle.$$

Protože f je měřitelná fce, plyne odtud, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je i fce f_n měřitelná.
Dále z Věty 52 víme, že f' existuje s.v. v $\langle a,b\rangle$. Tedy pro s.v. $x \in \langle a,b\rangle$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x)$.

Odtud a z (1) máme, že

(3) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x) \text{ pro s.v. } x \in \langle a,b\rangle.$$

Protože fce f_n jsou měřitelné, plyne z (3), že i f' je měřitelná.
Z faktu, že f je neklesající plyne, že $f_n \ge 0$ na $\langle a,b\rangle$.
Odtud a z (3) máme $f' \ge 0$ s.v. na $\langle a,b\rangle$.
Dále platí

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = n\int_a^b \Big[f\big(\underbrace{x+\tfrac{1}{n}}_{=:y \Rightarrow dx=dy}\big) - f(x)\Big]dx = n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(y)\,dy - \int_a^b f(x)\,dx\right] =$$

$$= n\left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} \underbrace{f(y)}_{=f(b)}\,dy - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx\right] = n\left[f(b)\cdot\frac{1}{n} - \int_a^{a+\frac{1}{n}} \underbrace{f(x)}_{\ge f(a)}\,dx\right] \le$$

$$\le f(b) - f(a) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tedy, podle Fatouova lemmatu, dostáváme

$$\underbrace{\int_a^b f'(x)\,dx}_{\geq 0 \text{ neb } f'\geq 0 \text{ s.v.}} = \int_a^b \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \underbrace{\int_a^b f_n(x)\,dx}_{\leq f(b)-f(a)} \leq$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \big(f(b)-f(a)\big) = f(b)-f(a),$$

tj. $0 \leq \int_a^b f'(x)\,dx \leq f(b)-f(a)$, což je odhad (1).

Tudíž $\int_a^b f'(x)\,dx$ je konečný, a proto f' je konečná s.v. (což dokazuje speciální část dané věty). $\square$

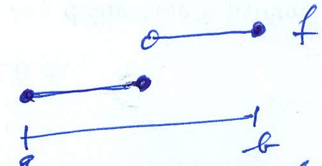
Důsledek. Je-li $f \in BV(\langle a,b\rangle)$, pak $f' \in L^1(a,b)$. Speciálně, f' je konečná s.v. v $\langle a,b\rangle$.

Důkaz plyne z předešlé věty a Jordanovy dekompozice fcí z $BV(\langle a,b\rangle)$.

Poznámka. Existují neklesající fce na $\langle a,b\rangle$ (mají omezenou variaci na $\langle a,b\rangle$), pro které platí

(4) $\quad \int_a^b f'(x)\,dx < f(b)-f(a)$.

Např.



Pak $f'=0$ s.v. v $\langle a,b\rangle$, tedy $\int_a^b f' = 0$, ale $f(b)-f(a)>0$.

Existují dokonce spojité neklesající fce na $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$, pro které platí (4).

Absolutně spojité fce

Chceme charakterizovat třídu fcí definovaných na $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$, $a<b$, pro kterou platí rovnost

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x)-f(a) \quad \forall\, x \in \langle a,b\rangle \quad \Big(\text{kde } \int_a^x f' \text{ je Lebesgueův integrál}\Big)$$

Definice. Fce $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ se nazývá absolutně spojitá na $\langle a,b\rangle$ (značíme $f \in AC(\langle a,b\rangle)$), jestliže

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že $\forall$ systém disjunktních intervalů $(a_k,b_k) \subset \langle a,b\rangle$, $k=1,\dots,n$, s vlastností $\sum_{k=1}^n (b_k-a_k) < \delta$ platí $\sum_{k=1}^n |f(b_k)-f(a_k)| < \varepsilon$.

Věta 56 (relace mezi $Lip(\langle a,b\rangle)$, $AC(\langle a,b\rangle)$, $C(\langle a,b\rangle)$ a $BV(\langle a,b\rangle)$).

(5) $Lip(\langle a,b\rangle) \subset AC(\langle a,b\rangle) \subseteq BV(\langle a,b\rangle) \cap C(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz. (i) $f \in Lip(\langle a,b\rangle) \Leftrightarrow \left(\exists C>0\ \forall x,y \in \langle a,b\rangle : |f(x)-f(y)| \leq C|x-y|\right)$.

Buď $f \in Lip(\langle a,b\rangle)$ a $\varepsilon > 0$. Zvolme $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. Je-li $\{(a_k,b_k);\ k=1,\dots,n\}$ systém disjunktních intervalů, $(a_k,b_k) \subset \langle a,b\rangle$, $k=1,\dots,n$, s vlastností $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k) < \delta$, pak

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k)-f(a_k)| \leq C \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |b_k-a_k|}_{<\delta} < C\delta = \varepsilon.$$ Tedy $f \in AC(\langle a,b\rangle)$.

(ii) Buď $f \in AC(\langle a,b\rangle)$. Nechť $\varepsilon = 1$. Pak $\exists \delta > 0$ tak, že $\forall$ systém disjunktních intervalů $(a_k,b_k) \subset \langle a,b\rangle$, $k=1,\dots,m$, platí

(6) $$\sum_{k=1}^{m}(b_k-a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} |f(b_k)-f(a_k)| < 1 = \varepsilon.$$

Buď D dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, $D: a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, takové, že $\|D\| < \delta$. Pak $\forall$ dělení D_k intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ (kde $k \in \{1,\dots,m\}$) platí $V(f,D_k) < 1$ (cf. (6)).

Odtud ovšem plyne

$$V_{x_{k-1}}^{x_k}(f) \leq 1 \quad \forall k = 1,\dots,m,$$

a tedy $$V_a^b(f) = \sum_{k=1}^{m} V_{x_{k-1}}^{x_k}(f) \leq \sum_{k=1}^{m} 1 = m < +\infty.$$

Tudíž $f \in BV(\langle a,b\rangle)$.

Buď $f \in AC(\langle a,b\rangle)$ a $\varepsilon > 0$. Buď $\delta > 0$ číslo z definice pojmu $f \in AC(\langle a,b\rangle)$ příslušné k danému číslu ε. Pak platí

$\forall x,y \in \langle a,b\rangle$, $|x-y| < \delta$: $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$, a tedy fce f je dokonce stejnoměrně spojitá na $\langle a,b\rangle$. Odtud plyne, že $f \in C(\langle a,b\rangle)$. $\square$

Poznámka. Obě inkluze v (5) jsou ostré.

↑ DOKÁZAT NA CVIČENÍ!

Věta 57 (postačující podmínka pro absolutní spojitost).

Buď f integrovatelná reálná fce na $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$.

Pak fce

(7) $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in \langle a,b\rangle$

je absolutně spojitá na $\langle a,b\rangle$.

Důkaz. Nejdříve dokážeme, že

(8) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall E \subset \langle a,b\rangle, |E|<\delta: \int_E |f(t)|\,dt < \varepsilon.$

Předpokládejme, že (8) neplatí. Pak existuje $\varepsilon>0$ a měřitelné množiny $E_n \subset \langle a,b\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, splňující $|E_n| < \frac{1}{2^n}$ a $\int_{E_n} |f(t)|\,dt \geq \varepsilon$.

Buď $M_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \ \forall n \in \mathbb{N}$ a $M := \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$.

Pak $M_1 \supset M_2 \supset \dots$ a $|M_1| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < +\infty$.

Tedy $0 \leq |M| = |\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n| = \lim_{n\to\infty} |M_n| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{|\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k|}_{\leq \sum_{k=n}^{\infty} |E_k| = \frac{1}{2^{n-1}}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$,

tj. $|M| = 0$.

Dále, použitím Lebesgueovy věty, dostáváme

$$0 = \int_M |f(t)|\,dt = \int_a^b \chi_M(t)\,|f(t)|\,dt = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} \chi_{M_n}(t)\,|f(t)|\right)dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \chi_{M_n}(t)\,|f(t)|\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{M_n} |f(t)|\,dt \underset{\text{neb } M_n \supset E_n}{\geq} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{E_n} |f(t)|\,dt}_{\geq \varepsilon} \geq \varepsilon,$$

což je spor. Proto (8) platí.

Nyní dokážeme, že $F \in AC(\langle a,b\rangle)$. Buď $\varepsilon>0$. Nechť $\delta>0$ je příslušné číslo z (8). Nechť $(a_k,b_k) \subset \langle a,b\rangle$, $k=1,\dots,n$, jsou disjunktní intervaly splňující $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$. Pak $|\bigcup_{k=1}^{n} (a_k,b_k)| < \delta$, a proto

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| \underset{\text{dle (7)}}{=} \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{a_k}^{b_k} f(t)\,dt\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |f(t)|\,dt = \int_{\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)} |f(t)|\,dt \underset{\text{dle (8)}}{<} \varepsilon.$$

Tedy $F \in AC(\langle a,b\rangle)$. $\square$

Definice. Buď $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ fce definovaná na $\langle a,b\rangle$, $-\infty < a < b < +\infty$. Řekneme, že f je singulární na $\langle a,b\rangle$, jestliže $f' = 0$ s.v. v $\langle a,b\rangle$.

Poznámka. Existují nekonstantní singulární fce (viz cvičení).

Věta 58 (o $f \in AC(\langle a,b\rangle)$, která je singulární na $\langle a,b\rangle$).

Je-li f singulární na $\langle a,b\rangle$ a $f \in AC(\langle a,b\rangle)$, pak f je konstantní na $\langle a,b\rangle$.

Důkaz. Stačí dokázat, že $f(a)=f(b)$, neboť tento výsledek aplikovaný na interval $\langle x,y\rangle \subset \langle a,b\rangle$ dává $f(x)=f(y)$ $\forall\, x,y \in \langle a,b\rangle$, $x<y$, a tedy f je konstantní na $\langle a,b\rangle$.

Buď $E := \{x \in (a,b);\ f'(x)=0\}$. Dle předpokladu $|E| = b-a$.

Buď $\varepsilon>0$ a $x \in E$. Pak platí

(9) $\langle x, x+h\rangle \subset (a,b)$ a $|f(x+h)-f(x)| < \varepsilon h$ $\forall$ dostatečně malé $h>0$.

Buď $\delta>0$ číslo z definice absolutní spojitosti odpovídající danému ε. Potom dle Věty 50 (Vitali) (použité na $M := E$ a na číslo δ (místo ε)) existují disjunktní intervaly $I_j = \langle x_j, x_j+h_j\rangle \subset (a,b)$, $j=1,\dots,m$, tak, že

(10) $$\left| E \setminus \bigcup_{j=1}^m I_j \right|_e < \delta$$

a (cf. (9))

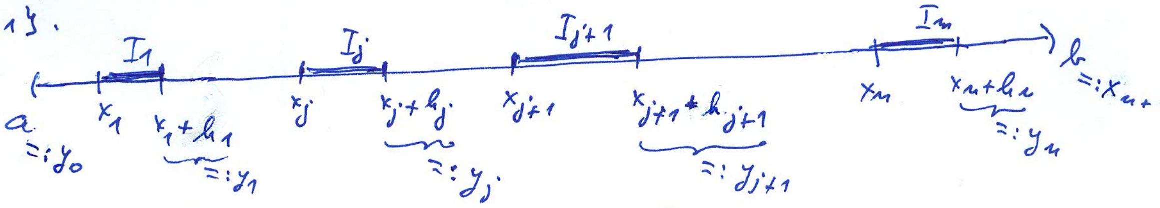
(11) $$|f(x_j+h_j)-f(x_j)| < \varepsilon h_j, \quad j=1,\dots,m.$$

Tedy

(12) $$\sum_{j=1}^m |f(x_j+h_j)-f(x_j)| < \varepsilon \sum_{j=1}^m \underbrace{h_j}_{=|I_j|} = \varepsilon \sum_{j=1}^m |I_j| < \varepsilon(b-a).$$

neboť $I_j \subset (b-a)$ $\forall j=1,\dots,m$ a I_j, $j=1,\dots,m$ jsou disjunktní

BÚNO: intervaly I_j, $j=1,\dots,m$, jsou označeny tak, že I_j leží nalevo od I_{j+1} $\forall j \in \{1,\dots,m-1\}$.



Označme

$y_0 := a$, $y_j := x_j+h_j$, $j=1,\dots,m$, $x_{m+1} := b$.

Pak z faktů $f \in AC(\langle a,b\rangle)$, $|E| = b-a$ a z (10) plyne

(13) $$\sum_{j=0}^m |f(x_{j+1}) - f(y_j)| < \varepsilon \quad \left(\text{neboť } \left|\langle a,b\rangle \setminus \bigcup_{j=1}^m I_j\right| < \delta\right).$$

Protože

$$\sum_{j=0}^m [f(x_{j+1}) - f(\underbrace{x_j+h_j}_{=y_j})] + \sum_{j=1}^m [f(y_j)-f(x_j)] = f(x_1)-f(y_0) + \underbrace{\sum_{j=1}^m [f(x_{j+1})-f(x_j)]}_{=f(x_{m+1})-f(x_1)} =$$

$$= f(x_{m+1}) - f(y_0) = f(b)-f(a),$$

tak z (13) a (12) dostaneme

$$|f(b)-f(a)| \le \underbrace{\sum_{j=0}^m |f(x_{j+1}) - f(y_j)|}_{<\varepsilon \text{ dle (13)}} + \underbrace{\sum_{j=1}^m |f(y_j)-f(x_j)|}_{<\varepsilon(b-a) \text{ dle (12)}} < \varepsilon(1+(b-a)).$$

Protože $\varepsilon>0$ bylo libovolné, platí $f(b)=f(a)$. $\square$

15. přednáška, MA 4, šk. r. 2016/17, LS, 13.4.2017

Věta 59 (o derivaci neurčitého integrálu). Buď $-\infty < a < b < +\infty$, $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $f \in L^1(a,b)$ a $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \ \forall x \in \langle a,b\rangle$.
Pak $F' = f$ s.v. v (a,b).

Důkaz. BÚNO: $f \geq 0$ (jinak větu použiji na f^+ a f^-). Stačí dokázat, že

(1) $\quad F' \leq f$ s.v. v (a,b),

neboť pak použitím (1) pro $(-f)$ místo f a pro $(-F)$ místo F dostaneme $(-F)' \leq -f$ s.v. v (a,b), tj. $F' \geq f$ s.v. v (a,b), celkem tedy $F' = f$ s.v. v (a,b). *)

Dokazujme tedy (1). Je třeba dokázat, že množina

$$A := \{x \in (a,b);\ F'(x) > f(x)\}$$

má míru 0. Protože $A = \bigcup_{\substack{[r,s] \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \\ r > s}} A_{rs}$, kde

(2) $\quad A_{rs} := \{x \in (a,b);\ F'(x) > r > s > f(x)\}$,

stačí ukázat, že každá z množin A_{rs} má míru 0. **)

Buď $\varepsilon > 0$ a $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{r})$ číslo příslušné k ε z podmínky

(3) $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E \subset \langle a,b\rangle,\ |E| < \delta : \int_E |f(t)|\,dt < \varepsilon$

(která je splněna, neboť $|f| \in L^1(a,b)$).

Existuje ot. množina $G \subset (a,b)$ taková, že

($3\frac{1}{2}$) $\quad A_{rs} \subset G \quad$ a $\quad |G| \leq |A_{rs}|_e + \delta$.

Buď $x \in A_{rs}$ (tak $x \in G$). Z faktu, že $F'(x) = D^+F(x) > r$ (cf. (2)) dostáváme, že existuje $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$, $h_i > 0\ \forall i \in \mathbb{N}$, $h_i \to 0$ pro $n \to \infty$ a platí

(4) $\quad \dfrac{F(x+h_i) - F(x)}{h_i} > r \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Z uvedeného a z Věty 50 (Vitali) plyne existence disjunktních intervalů

**) Poznamenejme, že A_{rs} je měřitelná množina, neboť 1) f je měřitelná; 2) F je absolutně spojitá (dle Věty 57) $\Rightarrow$ F je spojitá (dle Věty 56) $\Rightarrow$ F je měřitelná $\Rightarrow$ $F'(x) = \lim_{n\to+\infty} n\,[F(x+\frac{1}{n}) - F(x)]$ je měřitelná.

*) Platí totiž $-F(x) = \int_a^x (-f(t))\,dt \quad \forall x \in \langle a,b\rangle$.

$I_j := (\alpha_j, \beta_j)$, $j = 1, \dots, n$, tak, že platí

$$(5) \qquad \left| A_{rs} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j \right| < \delta$$

a

$$(6) \qquad F(\beta_j) - F(\alpha_j) > r\,(\beta_j - \alpha_j) = r\,|I_j| \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \ \ (\text{cf. } (4)).$$

Dále platí

$$(7) \quad r\,|A_{rs}| = r\left|A_{rs} \cap \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right| + r\left|A_{rs} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right| =: V_1 + V_2$$

Z (5) a volby δ máme

$$(8) \quad V_2 = r\left|A_{rs} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right| < r\delta < \varepsilon .$$

Navíc

$$(9)\ V_1 = r\left|A_{rs} \cap \bigcup_{j=1}^{n} I_j\right| \le r \sum_{j=1}^{n} |I_j| \overset{\text{dle (6)}}{<} \sum_{j=1}^{n} \left(F(\beta_j) - F(\alpha_j)\right) \overset{\text{dle definice } F}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} f(t)\,dt = \int_{\bigcup_{j=1}^{n} I_j} f\,dt = \int_{\bigcup_{j=1}^{n} (I_j \cap A_{rs})} \overbrace{f(t)}^{\le s}\,dt + \int_{\underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} I_j}_{\subset G} \setminus A_{rs}} f(t)\,dt <$$

$$< s\,|A_{rs}| + \underbrace{\int_{G \setminus A_{rs}} f(t)\,dt}_{<\varepsilon} < s\,|A_{rs}| + \varepsilon .$$

neb $|G \setminus A_{rs}| < \delta$ dle $(3\tfrac{1}{2})$

Tudíž z (7) – (9) plyne

$$r\,|A_{rs}| < s\,|A_{rs}| + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \qquad r\,|A_{rs}| \le s\,|A_{rs}| \qquad \Rightarrow \quad |A_{rs}| = 0 \ \ (\text{neb } r > s) . \ \square$$

Věta 60 (o množině $AC(\langle a,b\rangle)$). Buď $-\infty < a < b < +\infty$.

(i) $f, g \in AC(\langle a,b\rangle) \Rightarrow |f|,\ f \pm g,\ fg \in AC(\langle a,b\rangle)$.

(ii) $f \in AC(\langle a,b\rangle)$ a $\frac{1}{f} \in B(\langle a,b\rangle) \Rightarrow \frac{1}{f} \in AC(\langle a,b\rangle)$.

(iii) $f \in AC(\langle a,b\rangle)$, $\langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle \Rightarrow f \in AC(\langle c,d\rangle)$

(iv) je-li $a < c < b$ a f konečná reálná fce na $\langle a,b\rangle$, pak platí
$f \in AC(\langle a,c\rangle) \wedge f \in AC(\langle c,b\rangle) \Rightarrow f \in AC(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz: Dcv. (Důkaz je podobný důkazu Věty 41 (o množině $BV(\langle a,b\rangle)$ a totální variaci), 11. přednáška.)

Věta 61 (charakterizace $AC(\langle a,b\rangle)$). Buď $-\infty < a < b < +\infty$ a f konečná reálná fce definovaná na $\langle a,b\rangle$. Pak $f \in AC(\langle a,b\rangle)$ právě tehdy, jestliže f' existuje s.v. v (a,b), $f' \in L^1(a,b)$ a platí

(10) $$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \quad \forall x \in \langle a,b\rangle.$$

Důkaz. ad "$\Leftarrow$": Jestliže f' ex. s.v. v (a,b) a $f' \in L^1(a,b)$, pak dle Věty 57 pro fci $G(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in \langle a,b\rangle$, platí $G \in AC(\langle a,b\rangle)$. Tedy i fce f daná předpisem (10) splňuje $f \in AC(\langle a,b\rangle)$.

ad "$\Rightarrow$": Buď $f \in AC(\langle a,b\rangle)$. Pak, dle Věty 56, $f \in BV(\langle a,b\rangle)$ a dle Důsledku Věty 55 je $f' \in L^1(a,b)$. Tudíž fce $F(x) := \int_a^x f'(t)\,dt$, $x \in \langle a,b\rangle$, je korektně definována a podle Věty 59 platí $F' = f'$ s.v. v $\langle a,b\rangle$, tj. $(F-f)' = 0$ s.v. v $\langle a,b\rangle$. Protože $F, f \in AC(\langle a,b\rangle)$ (že $F \in AC(\langle a,b\rangle)$ plyne z Věty 57), tak z Věty 60 máme $F - f \in AC(\langle a,b\rangle)$.
Dále dle Věty 58 dostaneme

(11) $$(F-f)(x) = c \quad \forall x \in \langle a,b\rangle, \text{ kde } c \in \mathbb{R}.$$

Odtud pro $x = a$ plyne $\underbrace{F(a)}_{=0} - f(a) = c$, tj. $c = -f(a)$.
Tedy dle (11) máme

$$\int_a^x f'(t)\,dt - f(x) = -f(a) \quad \forall x \in \langle a,b\rangle,$$

tj. platí (10). □

Věta 62 (Lebesgueův rozklad fce $f \in BV(\langle a,b\rangle)$). Buď $-\infty < a < b < +\infty$. Je-li $f \in BV(\langle a,b\rangle)$, pak $f = g + h$, kde $g \in AC(\langle a,b\rangle)$ a $h \in BV(\langle a,b\rangle)$ je singulární fce na $\langle a,b\rangle$. Navíc fce g a h jsou určeny jednoznačně až na aditivní konstantu.

Důkaz. Buď $f \in BV(\langle a,b\rangle)$, $g(x) := \int_a^x f'(t)\,dt$, $x \in \langle a,b\rangle$, a $h := f - g$. Pak $h = f - g \in BV(\langle a,b\rangle)$ a platí

$$h' = f' - g' = f' - f' = 0 \text{ s.v. v } \langle a,b\rangle,$$

tj. h je singulární fce na $\langle a,b\rangle$.
Jsou-li $f = g + h$ a $f = g_1 + h_1$ dvě dekompozice daného typu, pak
$g + h = g_1 + h_1 \Rightarrow \underbrace{g - g_1}_{\in AC} = \underbrace{h_1 - h}_{\text{singulární fce}}$. Tedy dle Věty 58 platí

$g - g_1 = c = h_1 - h$ na $\langle a,b\rangle$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Odtud plyne $g_1 = g - c$, $h_1 = h + c$, a tedy

$$f = g_1 + h_1 = (g-c) + (h+c). \quad \square$$

Věta 63 (integrace per partes pro absolutně spojité fce). Buď $-\infty < a < b < +\infty$ a $f, g \in AC(\langle a,b\rangle)$. Pak

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \left[f(x)\,g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.$$

Důkaz. Součin $fg \in AC(\langle a,b\rangle)$ má s.v. v $\langle a,b\rangle$ derivaci $\varphi = f'g + fg' \in L^1(a,b)$ a platí (cf. Věta 61)

$$(fg)(x) = (fg)(a) + \int_a^x \varphi(t)\,dt = (fg)(a) + \int_a^x (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))\,dt \quad \forall x \in \langle a,b\rangle.$$

Speciálně pro $x = b$ dostaneme

(12) $$\underbrace{(fg)(b) - (fg)(a)}_{\left[(fg)(x)\right]_a^b} = \int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))\,dt.$$

Protože $f \in AC(\langle a,b\rangle)$, tak $f \in B(\langle a,b\rangle)$ a f je měřitelná na $\langle a,b\rangle$. Dále $g' \in L^1(a,b)$, tudíž $fg' \in L^1(a,b)$. Obdobně dostaneme, že $f'g \in L^1(a,b)$. Proto

$$\text{RHS}(12) = \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt + \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt.$$

Odtud a z (12) pak plyne požadovaný výsledek. $\square$

Věta 64 (o integraci Four. řady). Buď $f \in P_{2\pi}$ a nechť

(13) $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak fce $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}x$, $x \in \mathbb{R}$, má periodu 2π a platí

(14) $$F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-b_k \cos kx + a_k \sin kx}{k}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ kde } \frac{A_0}{2} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

Dále Four. řada fce F je stejnoměrně konvergentní v $\mathbb{R}$ a má součet $F(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Důkaz. $f \in P_{2\pi} \Rightarrow f \in L^1(a,b) \Rightarrow F \in AC(\langle a,b\rangle) \Rightarrow F \in BV(\langle a,b\rangle)$ $\forall \langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$.

Speciálně tedy $F \in BV(\langle 0,2\pi\rangle)$. Protože

$$F(x+2\pi) - F(x) = \int_0^{x+2\pi} f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}(x+2\pi) - \left(\int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}x\right)$$

$$= \int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt - a_0\pi = \pi\underbrace{\left(\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt - a_0\right)}_{=0} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

tak fce F má periodu 2π. Celkem tedy $F \in P_{2\pi}$ a $F \in BV(\langle 0,2\pi\rangle)$.

Protože také $F \in C((-2\pi, 2\pi))$, tak (dle Dirichletova-Jordanova kritéria) Four. řada fce F konverguje lokálně stejnoměrně k fci F na $(-2\pi, 2\pi)$, tedy stejnoměrně v $\langle -\pi, \pi \rangle$. Odtud a z periodicity fce F dostáváme stejnoměrnou konvergenci Four. řady fce F k fci F v celém $\mathbb{R}$.

Four. koeficienty fce F počítáme metodou per partes (cf. Věta 63):

(15) $$B_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \Big\{ \underbrace{\Big[F(x) \frac{(-\cos kx)}{k} \Big]_0^{2\pi}}_{=0, \text{ neb } 0 = F(0) = F(2\pi)} + \int_0^{2\pi} \underbrace{\Big(f(x) - \frac{a_0}{2} \Big)}_{= F'(x) \text{ s.v.}} \frac{\cos kx}{k} \, dx.$$

Vzhledem k tomu, že $\int_0^{2\pi} \cos kx \, dx = 0$, tak z (15) plyne

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\cos kx}{k} \, dx = \frac{a_k}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Obdobně dostaneme, že $A_k = -\frac{b_k}{k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Four. řada fce F má proto tvar (14) a také víme, že v (14) platí rovnost $\forall x \in \mathbb{R}$. Dosazením $x = 0$ pak z (14) dostaneme

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dle definice } F}}{=} F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-b_k)}{k} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}. \quad \square$$

Důsledek Věty 64. Buď $f \in P_{2\pi}$ a nechť všechny Four. koeficienty fce f jsou rovny nule. Pak $f = 0$ s.v. v $\mathbb{R}$.

Důkaz. Nechť F je fce z Věty 64, tj: $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{neb } a_0 = 0}}{=} \int_0^x f(t)\,dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Pak z našich předpokladů a z Věty 64 plyne, že

$$F(x) = \frac{A_0}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{neb } a_k = 0 = b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}),$$

a proto $f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pro s.v. } x \in \mathbb{R}}}{=} F'(x) = 0$ s.v. v $\mathbb{R}$. $\square$

Poznámka. Jestliže $f, g \in P_{2\pi}$ a fce f a g mají stejné všechny Fourierovy koeficienty, pak $f = g$ s.v. v $\mathbb{R}$. (To plyne aplikací předešlého tvrzení na fci $f - g$.)

16. přednáška, MA 4, šk. r. 2016/17, LS, 20.4. 2017

Vzhledem k tomu, že do konce semestru budete mít už jen 3 cvičení, přeorganizuji přednášky tak, aby bylo možné co nejvíce látky procvičit. To mj. znamená, že některá tvrzení zde (zatím) zmíním bez důkazu.

Křivky a křivkový integrál

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(i) Řekneme, že zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ je (*parametrická*) *křivka*, jestliže $\varphi \in C(\langle a, b\rangle)$.

(ii) Řekneme, že (parametrická) křivka $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je *skoro regulární*, pokud existuje dělení $\{t_i\}_{i=0}^{p}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$, takové, že:

$\varphi \in C^1(\langle t_{i-1}, t_i\rangle)$, $i = 1, \ldots, p$,

$\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \langle a, b\rangle - \{t_0, \ldots, t_p\}$.

(iii) Řekneme, že křivka $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ je *jednoduchá*, jestliže platí: *)

$t', t'' \in \langle a, b\rangle$, $0 < |t'' - t'| < b - a \Rightarrow \varphi(t') \neq \varphi(t'')$.

(iv) Řekneme, že křivka $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ je *uzavřená*, jestliže $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Poznámka. Buď $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ křivka.

(i) Bod $\varphi(a)$ se nazývá *počáteční bod křivky* φ, bod $\varphi(b)$ se nazývá *koncový bod křivky* φ, body $\varphi(a), \varphi(b)$ se nazývají *krajní body křivky* φ.

(ii) Množina $\langle\varphi\rangle := \varphi(\langle a, b\rangle)$ se nazývá *geometrickým obrazem křivky* φ.

(iii) Jednoduché uzavřené křivky $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ se nazývají *Jordanovy křivky*.

---

*) tj. $\varphi|_{\langle a, b)}$ je prosté zobrazení.

Věta 65 (Jordan). Nechť $\varphi : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^2$ je jednoduchá uzavřená křivka. Pak existují disjunktní otevřené souvislé množiny $\operatorname{Int}\varphi$ a $\operatorname{Ext}\varphi$ takové, že $\operatorname{Int}\varphi$ je omezená, $\operatorname{Ext}\varphi$ je neomezená a platí

$$\mathbb{R}^2 = \operatorname{Int}\varphi \cup \operatorname{Ext}\varphi \cup \langle\varphi\rangle,$$
$$\partial(\operatorname{Int}\varphi) = \partial(\operatorname{Ext}\varphi) = \langle\varphi\rangle.$$

Důkaz vynecháme.

Definice. Nechť $\varphi : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^n$ je skoro regulární křivka.

(i) Je-li g reálná funkce definovaná na $\langle\varphi\rangle$, pak **křivkový integrál 1. druhu** $\int_\varphi g\,ds$ je definován předpisem

$$\int_\varphi g\,ds := \int_a^b g(\varphi(t))\,\|\varphi'(t)\|\,dt,$$

pokud poslední integrál existuje (jako Lebesgueův).

(ii) Buď $f = (f_1, \dots, f_n)$ zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ definované na $\langle\varphi\rangle$. **Křivkový integrál 2. druhu** $\int_\varphi f\cdot ds$ definujeme předpisem

$$\int_\varphi f\cdot ds := \int_a^b \langle f(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle\,dt,$$

pokud poslední integrál existuje (jako Lebesgueův).

Poznámka (vztah mezi křivkovým integrálem 1. a 2. druhu). Nechť jsou splněny předpoklady předešlé Definice, část (ii). Pak $\varphi'(t) \neq 0$ v $\langle a,b\rangle \setminus \{t_0, \dots, t_p\}$ a je-li $x = \varphi(t)$, pak $\tau(x) := \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$ je jednotkový tečný vektor k $\langle\varphi\rangle$ v bodě x. Protože

$$\langle f(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle = \left\langle f(\varphi(t)), \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}\right\rangle \|\varphi'(t)\| =$$
$$= \langle f(\varphi(t)), \tau(\varphi(t))\rangle\,\|\varphi'(t)\| \quad \forall\, t \in \langle a,b\rangle \setminus \{t_0, \dots, t_p\},$$

tak platí

$$\underbrace{\int_\varphi f\cdot ds}_{\text{křivkový integrál 2. druhu}} = \underbrace{\int_\varphi \langle f, \tau\rangle\,ds}_{\text{křivkový integrál 1. druhu}}.$$

Tradiční označení: $\int_\varphi f\cdot ds = \int_\varphi f_1\,dx_1 + \dots + f_n\,dx_n$. To naznačuje, jak $\int_\varphi f\cdot ds$ počítat: za dx_i, $i = 1, \dots, n$, dosadíme diferenciál fce $x_i = \varphi_i(t)$, tj. $dx_i = \varphi_i'(t)\,dt$, a integrujeme pak od a do b.

Věta 66 (o potenciálu). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $\varphi: \langle a, b\rangle \to \Omega$ je skoro regulární křivka a $u: \Omega \to \mathbb{R}$ je funkce třídy C^1 na Ω. Pak

$$(1) \qquad \int_\varphi \nabla u \cdot ds = u(\varphi(b)) - u(\varphi(a)).$$

Důkaz. $\displaystyle\int_\varphi \nabla u \cdot ds = \int_a^b \langle \nabla u(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle \, dt =$

$$= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi(t)) \cdot \varphi_i'(t) \right) dt = \int_a^b (u \circ \varphi)'(t)\, dt = \sum_{i=1}^p \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u\circ\varphi)'(t)\, dt =$$

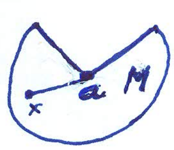
$$= \sum_{i=1}^p \left(u(\varphi(t_i)) - u(\varphi(t_{i-1})) \right) = u(\varphi(t_p)) - u(\varphi(t_0)) = u(\varphi(b)) - u(\varphi(a)). \ \square$$

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ je vektorové pole.*) Řekneme, že f je potenciální v Ω, existuje-li fce $u: \Omega \to \mathbb{R}$ taková, že $f = \nabla u$ na Ω. Funkci u pak nazýváme potenciálem pole f v Ω.

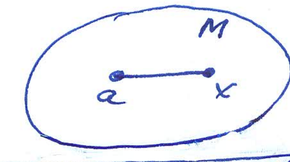
Definice. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je hvězdovitá, jestliže existuje $a \in M$ takový, že platí

$$\{a + t(x-a);\ t \in \langle 0, 1\rangle\} \subset M \quad \forall x \in M.$$

(Bod a se nazývá střed hvězdovitosti množiny M.)



Poznámka. Konvexní množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je hvězdovitá. (V tomto případě je každý bod $a \in M$ středem hvězdovitosti množiny M.)



Poznámka. Pokud vektorové pole f je potenciální v Ω, tj. $f = \nabla u$ v Ω, pak k nalezení potenciálu u lze použít např. rovnost (1): Vezmu pevný bod $x_0 \in \Omega$ a pro libovolný bod $x \in \Omega$ vezmu nějakou skoro regulární křivku $\varphi: \langle a, b\rangle \to \Omega$ takovou, že $x = \varphi(b)$, $x_0 = \varphi(a)$. Protože $f = \nabla u$ v Ω, tak dle (1) platí

$$u(x) = \underbrace{u(x_0)}_{\text{konstanta}} + \int_\varphi f \cdot ds.$$

(Tato a ještě další metoda budou probírány na cvičení.)

---

*) Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $f: \Omega \to V(\mathbb{R}^n)$, nazýváme vektorovou funkci f vektorovým polem (termín je převzat z fyziky).

Věta 67 (hlavní věta teorie pole). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité vektorové pole. Uvažujme následující podmínky:

(i) Vektorové pole je potenciální.

(ii) Pro každé dvě skoro regulární křivky $\varphi_i : \langle a_i, b_i \rangle \to \Omega$, $i = 1, 2$, splňující $\varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_2)$, $\varphi_1(b_1) = \varphi_2(b_2)$, platí

$$\int_{\varphi_1} f \cdot ds = \int_{\varphi_2} f \cdot ds .$$

(tzv. nezávislost integrálu na cestě *))

(iii) Pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a každé $x \in \Omega$ platí

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) .$$

(nevírové pole)

Pak platí:

(a) (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

(b) Je-li $f \in C^1(\Omega)$, pak (i) $\Rightarrow$ (iii). Je-li Ω hvězdovitá, pak (iii) $\Rightarrow$ (i).

(c) Je-li $f \in C^1(\Omega)$ a Ω hvězdovitou platí (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).)

(Tedy pro $f \in C^1(\Omega)$ a Ω hvězdovitou platí (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).)

Příklad, že implikace (iii) $\Rightarrow$ (i) obecně neplatí:

$\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$, $\quad f(x,y) := \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \quad \forall [x,y] \in \Omega$.

Pak
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-(x^2+y^2) + y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall [x,y] \in \Omega,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall [x,y] \in \Omega,$$

(a tedy f je nevírové pole, tj. platí (iii)). Avšem f není potenciální, neboť pro křivku $\varphi(t) := (r\cos t, r\sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, kde $r > 0$, platí $\varphi(0) = [r, 0] = \varphi(2\pi)$, ale $\int_\varphi f \cdot ds \neq 0$, neboť $\varphi'(t) = [-r\sin t, r\cos t]$ $\forall t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, a tedy

$$\int_\varphi f \cdot ds = \int_0^{2\pi} \langle f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r\sin t}{r^2}(-r\sin t) + \frac{r\cos t}{r^2} r\cos t \right) dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0 .$$

---

*) V takovém případě se pole f nazývá **konzervativní** v Ω.

17. přednáška MA 4 šk. r. 2016/17, LS, 21.4.2017

Definice. Nechť $\varphi : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^n$ je křivka.

(i) Opačnou křivku $\dot{-}\varphi$ ke křivce φ definujeme předpisem

$$(\dot{-}\varphi)(t) := \varphi(-t) \quad \forall t \in \langle -b,-a\rangle . \ ^{*)}$$

(ii) Je-li ještě dána křivka $\psi : \langle c,d\rangle \to \mathbb{R}^n$, přičemž $\varphi(b) = \psi(c)$, pak křivku $\varphi \dot{+} \psi$ definovanou předpisem

$$(\varphi \dot{+} \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in \langle a,b\rangle \\ \psi(t-b+c), & t \in \langle b, b+d-c\rangle \end{cases}$$

nazveme součtem křivek φ a ψ.

(iii) Indukcí se pak definuje součet křivek $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ splňujících koncový bod φ_k = počáteční bod φ_{k+1} $\forall k = 1, \dots, m-1$.

Vlastnosti křivkových integrálů.

Věta 68 (linearita křivkových integrálů). Nechť $\int_\varphi f\,ds$ a $\int_\varphi g\,ds$ existují. Jestliže $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak

$$(1) \quad \int_\varphi (\alpha f + \beta g)\,ds = \alpha \int_\varphi f\,ds + \beta \int_\varphi g\,ds ,$$

pokud pravá strana v (1) má smysl.

(Analogie platí i pro křivkový integrál 2. druhu.)

Důkaz. Tvrzení ihned plyne z definice křivkových integrálů.

Věta 69 (křivkový integrál přes součet křivek). Nechť φ a ψ jsou takové křivky, že je definován jejich součet $\varphi \dot{+} \psi$. Nechť $\int_\varphi f\,ds$ a $\int_\psi f\,ds$ existují. Pak

$$(2) \quad \int_{\varphi \dot{+} \psi} f\,ds = \int_\varphi f\,ds + \int_\psi f\,ds ,$$

má-li pravá strana v (2) smysl.

(Analogie platí i pro kř. integrály 2. druhu.)

---

*) Přechod od φ k $\dot{-}\varphi$ se nazývá změnou orientace křivky.

Věta 70 (křivkový integrál přes opačnou křivku).

(i) $\int_{\dot{-}\varphi} f\,ds = \int_{\varphi} f\,ds$, pokud má jedna strana této rovnosti smysl.

(ii) $\int_{\dot{-}\varphi} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\varphi} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$, pokud má jedna strana této rovnosti smysl.

<u>Definice (homeomorfní zobrazení)</u>. Zobrazení f množiny A metr. prostoru (X,ρ) na množinu B metr. prostoru (Y,σ) se nazývá <u>homeomorfní zobrazení</u> (nebo homeomorfismus) je-li prosté a obě zobrazení f a f^{-1} jsou spojitá. (Zobrazení f^{-1} je pak homeomorfismus množiny B na množinu A.)

<u>Opakování:</u>
<u>Definice</u> (11. přednáška MA3). Zobrazení f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ se nazývá regulární na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jestliže:
(i) Ω je otevřená,
(ii) $f \in C^1(\Omega)$,
(iii) $J_f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$. *)

<u>Zobecnění:</u>
<u>Definice</u>. Buď $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. <u>Zobrazení</u> $\varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ <u>z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^n$</u> se nazývá <u>regulární na $\Omega \subset \mathbb{R}^k$</u>, jestliže:
(i) Ω je otevřená,
(ii) $\varphi \in C^1(\Omega)$,
(iii) $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \nabla \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \nabla \varphi_n(x) \end{pmatrix} = k \quad \forall x \in \Omega$.

<u>Poznámka</u>. V předešlé definici je

$$(*) \quad \begin{pmatrix} \nabla \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \nabla \varphi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x), & \dots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x), & \dots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) \right)$$

a hodnost této matice je k $\forall x \in \Omega$. Tedy sloupce této matice, tj. vektory $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)$ jsou lineárně nezávislé $\forall x \in \Omega$.
Protože $\forall x \in \Omega$ pevné je derivace $\varphi'(x): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lineární zobrazení

---

*) Připomeňme si také, že

$$J_f(x) = \begin{vmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_n(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x), & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix}, \quad x \in \Omega.$$

reprezentované maticí (*), tj. platí

$$\varphi'(x)(h) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)\right)\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots \\ h_k\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)\, h_1 + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)\, h_k \qquad \forall h=(h_1,\dots,h_k)\in\mathbb{R}^k,$$

tak vektory $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když zobrazení $\varphi'(x): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je prosté $\forall x\in\Omega$.

Definice. Buď $k,n\in\mathbb{N}$, $k\le n$. Zobrazení φ otevřené množiny $\Omega\subset\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^n$ se nazývá **difeomorfismus** (nebo difeomorfní zobrazení), je-li regulární a homeomorfní.

Následující věta je zobecněním Věty 33 (o lokálním difeomorfismu) 10. přednáška, MA3 (kde bylo $k=n$).

Věta 71 (o lokálním difeomorfismu). Buď $k,n\in\mathbb{N}$, $k\le n$, a $\varphi=[\varphi_1,\dots,\varphi_n]$ regulární zobrazení množiny $\Omega\subset\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^n$. Nechť $x\in\Omega$. Pak existuje otevřená množina U obsahující bod x tak, že $\varphi|_U$ je difeomorfismus.

Definice (k-dimenzionální plocha). **) Nechť $k,n\in\mathbb{N}$, $k\le n$. Neprázdná množina $M\subset\mathbb{R}^n$ se nazývá **k-dimenzionální plocha** (stručně **k-plocha**), jestliže $\forall z\in M$ existuje otevřená množina $\Omega\subset\mathbb{R}^k$ a regulární homeomorfismus $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ *) tak, že $z\in\varphi(\Omega)\subset M$ a množina $\varphi(\Omega)$ je otevřená v M.

Poznámka. Obrazně řečeno, charakteristickým rysem k-plochy z předešlé Definice je, že „okolí" $\varphi(\Omega)\subset M$ bodu $z\in M$ lze „narovnat", tj. deformovat pomocí difeomorfismu φ na kousek (= otevřenou množinu Ω) prostoru $\mathbb{R}^k$.

---

*) Tedy φ je difeomorfismus.

**) Zajímají nás hladké plochy.

Poznámka. (i) Z definice k-plochy $M \subset \mathbb{R}^n$ ihned plyne, že každá neprázdná množina $M_0 \subset M$ otevřená v M je také k-plocha.
(ii) Z definice také plyne, že jedinými n-plochami v prostoru $\mathbb{R}^n$ jsou neprázdné otevřené podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^n$ (za φ lze lze pak vzít identické zobrazení otevřené množiny na sebe).

Příklad. Buď $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$. Nechť $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^{n-k}$ zobrazení třídy C^1 na Ω.
Pak graf zobrazení ψ, tj. množina

$$M := \{[x, \psi(x)];\ x \in \Omega\} =$$
$$= \{[x_1, \dots, x_k, \psi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \psi_{n-k}(x_1, \dots, x_k)];\ x = [x_1, \dots, x_k] \in \Omega\},$$

je k-plocha v $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. Definujme zobrazení $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varphi(x) := [x, \psi(x)] \quad \forall x \in \Omega.$$

Pak $\varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$, kde pro $x \in \Omega$ platí

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 \\ \varphi_2(x) &= x_2 \\ &\vdots \\ \varphi_k(x) &= x_k \\ \varphi_{k+1}(x) &= \psi_1(x) \\ &\vdots \\ \varphi_n(x) &= \psi_{n-k}(x), \end{aligned} \qquad \text{a tedy} \qquad \begin{aligned} \nabla\varphi_1(x) &= (1, 0, \dots, 0) \\ \nabla\varphi_2(x) &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \nabla\varphi_k(x) &= (0, \dots, 0, 1) \\ \nabla\varphi_{k+1}(x) &= \left(\frac{\partial\psi_1(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\psi_1(x)}{\partial x_k}\right) \\ &\vdots \\ \nabla\varphi_n(x) &= \left(\frac{\partial\psi_{n-k}(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\psi_{n-k}(x)}{\partial x_k}\right), \end{aligned}$$

odkud plyne, že

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \nabla\varphi_1(x) \\ \vdots \\ \nabla\varphi_n(x) \end{pmatrix} = k \quad \forall x \in \Omega.$$

Tedy $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je regulární zobrazení.
Zbývá dokázat, že:
(i) φ je prosté,
(ii) φ^{-1} je spojité.

ad (i): Buď $\varphi(x)=\varphi(y)$ pro $x,y\in\Omega$. Tedy $[x,\psi(x)]=[y,\psi(y)]$.
Odtud plyne $x=y$, tzn. že φ je prosté.

ad (ii): Chceme dokázat, že

(*) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall z,\hat z\in M,\ \|z-\hat z\|_{\mathbb{R}^n}<\delta:\ \|\varphi^{-1}(z)-\varphi^{-1}(\hat z)\|_{\mathbb{R}^k}<\varepsilon.$

Buď $\varepsilon>0$. Položme $\delta=\varepsilon$. Jestliže $z,\hat z\in M$, pak $z=\varphi(x)$, $\hat z=\varphi(\hat x)$, kde $x,\hat x\in\Omega$. Nechť $\|z-\hat z\|_{\mathbb{R}^n}<\delta=\varepsilon$.

Pak

$$\delta=\varepsilon>\|z-\hat z\|_{\mathbb{R}^n}=\|\varphi(x)-\varphi(\hat x)\|_{\mathbb{R}^n}=\|[x,\psi(x)]-[\hat x,\psi(\hat x)]\|_{\mathbb{R}^n}\geq$$

$$\geq\|\underbrace{x}_{\varphi^{-1}(z)}-\underbrace{\hat x}_{\varphi^{-1}(\hat z)}\|_{\mathbb{R}^k}=\|\varphi^{-1}(z)-\varphi^{-1}(\hat z)\|_{\mathbb{R}^k}.$$

Tedy platí (*). $\square$

Věta 72 (implicitně zadaná plocha). Nechť $k,n\in\mathbb{N}$, $k<n$, $G\subset\mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $F:G\to\mathbb{R}^{n-k}$ je zobrazení třídy C^1 na G. Buď $M=\{x\in G;\ F(x)=0\}$. Je-li $M\neq\emptyset$ a platí-li $\operatorname{rank}F'(x)=n-k\ \forall x\in M$, pak M je k-plocha.

Příklad. Dokažte, že sféra $S_{n-1}:=\{x\in\mathbb{R}^n;\ \|x\|=1\}$ je $(n-1)$-plocha.

Řešení. Definujme zobrazení $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ předpisem

$$F(x):=\|x\|^2-1=x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2-1\quad\forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Pak $S_{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n;\ F(x)=0\}$. Dále platí

$$F'(x)=2(x_1,\dots,x_n)\quad\forall x\in\mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow\quad F'(x)\neq 0\quad\forall x\in S_{n-1}$$

$$\Rightarrow\quad\operatorname{rank}F'(x)=1=n-(n-1)\quad\forall x\in S_{n-1}.$$

Tedy z Věty 73 plyne, že S_{n-1} je $(n-1)$-dimenzionální plocha v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Poznámka. Sféru S_{n-1} nelze vyjádřit ve tvaru $S_{n-1} = \varphi(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je otevřená množina a φ je difeomorfismus (nebo jen homeomorfismus) množiny Ω na množinu S_{n-1}.

Důkaz. S_{n-1} je kompaktní množina v prostoru $\mathbb{R}^n$ a φ^{-1} je spojité zobrazení. Kdyby $S_{n-1} = \varphi(\Omega)$, pak by $\Omega = \varphi^{-1}(S_{n-1})$. Ovšem $\varphi^{-1}(S_{n-1})$ je kompaktní množina – spor (neb Ω je otevřená). $\square$

18. přednáška MA4, šk. r. 2016/17, LS, 27. 4. 2017

Poznámka. Někdy je výhodné zavést pojem 0-dimenzionální plochy (stručně 0-plochy) $M \subset \mathbb{R}^n$. 0-plochou $M \subset \mathbb{R}^n$ budeme rozumět libovolnou izolovanou podmnožinu $M \subset \mathbb{R}^n$. Speciálně je pak každá konečná množina $M \subset \mathbb{R}^n$ 0-plochou.

Poznamenejme, že definici k-ploch ze 17. přednášky lze rozšířit tak, aby zahrnovala i 0-plochy; stačí předpokládat, že v případě $k=0$ platí $\mathbb{R}^0 := \{0\}$ (tj. $\mathbb{R}^0$ je jednobodová množina složená pouze z reálného čísla 0). (Pak je $\{0\}$ také jedinou otevřenou neprázdnou podmnožinou prostoru $\mathbb{R}^0$.)

Definice (k-nulové množiny). Nechť $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k \le n$. Řekneme, že množina $N \subset \mathbb{R}^n$ je k-nulová, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ existují koule $B(x_j, r_j)$, $j \in \mathbb{N}$, takové, že

$$N \subset \bigcup_j B(x_j, r_j) \quad \text{a} \quad \sum_j r_j^k < \varepsilon.$$

Poznámka. Příkladem k-nulových množin $N \subset \mathbb{R}^n$ jsou např. l-dimenzionální plochy $M \subset \mathbb{R}^n$, kde $l < k$, nebo jejich spočetná sjednocení. Také obrazy $\varphi(A)$ množin A, kde $A \subset \mathbb{R}^k$, $\lambda_k(A) = 0$ *) a φ je difeomorfismus z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^n$, jsou k-nulové množiny.

Poznámka. Buď φ zobrazení z Definice k-plochy $M \subset \mathbb{R}^n$. Zobrazení φ nazýváme lokální parametrizace plochy M.

Řekneme-li, že φ je globální parametrizace plochy M, znamená to, že navíc platí $M = \varphi(\Omega)$.

Zobrazení φ nazveme zobecněnou parametrizací plochy M, je-li množina $M \setminus \varphi(\Omega)$ k-nulová.

---

*) Symbolem λ_k značíme k-dimenzionální Lebesgueovu míru v $\mathbb{R}^k$.

1/. Důkaz Věty 72 (implicitně zadaná plocha), 14. přednáška.

Víme, že $G \subset \mathbb{R}^n$ je ot. množina, $F: G \to \mathbb{R}^{n-k}$, tedy $F = [F_1, \dots, F_{n-k}]$, $M = \{x \in G;\ F(x) = 0\}$. Předpokládejme, že $M \neq \emptyset$ a že rank $F'(x) = n-k \ \forall x \in M$. Buď $\hat{x} \in M$.

BÚNO: $\dfrac{D(F_1, \dots, F_{n-k})}{D(x_{k+1}, \dots, \underset{\substack{\shortparallel \\ x_{k+n-k}}}{x_n})}(\hat{x}) \neq 0$. *)

Pak (dle Věty 26 (o implicitním zobrazení), 8. přednáška, MA3)

$\exists\, \mathcal{U}([\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k]) \subset \mathbb{R}^k$, $\exists\, \mathcal{U}([\hat{x}_{k+1}, \dots, \hat{x}_n]) \subset \mathbb{R}^{n-k}$ tak, že

$\forall\, [x_1, \dots, x_k] \in \mathcal{U}([\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k])\ \exists!\, [x_{k+1}, \dots, x_n] \in \mathcal{W}([\hat{x}_{k+1}, \dots, \hat{x}_n])$

takový, že $F([x_1, \dots, x_n]) = 0$, tj. $[x_1, \dots, x_n] \in M$.

Tedy $[x_{k+1}, \dots, x_n] = \psi(x_1, \dots, x_k) = [\psi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \psi_{n-k}(x_1, \dots, x_k)]$

a platí $[x_1, \dots, x_k, \psi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \psi_{n-k}(x_1, \dots, x_k)] \in M$

$\forall\, [x_1, \dots, x_k] \in \mathcal{U}([\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k]) =: \Omega$, tj. zobrazení

$\varphi: \Omega \to \mathbb{R}^n$ dané na Ω předpisem

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) := [x_1, \dots, x_k, \psi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \psi_{n-k}(x_1, \dots, x_k)]$$

splňuje $\varphi(\Omega) \subset M$.

Z věty o implicitním zobrazení také plyne, že

$$\psi \in C^1(\mathcal{U}([\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k])).$$

Odtud pak dostáváme (cf. první příklad (str. 5) 14. přednášky), že:

φ je regulární a prosté na Ω, φ^{-1} je spojité.

Tudíž φ splňuje všechny podmínky z definice k-plochy. Protože $\hat{x} \in M$ byl libovolný bod, je množina M k-plocha v prostoru $\mathbb{R}^n$ (a zobrazení φ je její lokální parametrizace). □

---

*) Potom ovšem $\dfrac{D(F_1, \dots, F_{n-k})}{D(x_{k+1}, \dots, x_n)}(x) \neq 0$ v jistém okolí bodu $\hat{x}$, neboť F je třídy C^1 na G.

Definice. Buď $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Nechť M je k-plocha v $\mathbb{R}^n$ a $r \in M$. Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ nazveme *tečným vektorem k ploše M v bodě r*, existuje-li otevřený interval $I \subset \mathbb{R}$ a zobrazení $\psi : I \to M$, $\psi \in C^1(I)$, a $t_0 \in I$ tak, že

(1) $$\psi(t_0) = r, \quad \psi'(t_0) = v.$$

Množinu všech tečných vektorů k ploše M v bodě r nazveme *tečným prostorem k ploše M v bodě r* a označíme symbolem $T_r(M)$.

Poznámka. Nahradíme-li zobrazení ψ zobrazením $\tilde{\psi}(t) := \psi(t + t_0)$ $\forall t \in \tilde{I}$, kde $\tilde{I} := \{\tau - t_0;\ \tau \in I\}$, můžeme vždy předpokládat, že $t_0 = 0$.

Věta 73 (o tečném prostoru k ploše M). Buď $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Nechť M je k-plocha v $\mathbb{R}^n$ a $r \in M$.

(i) Pak $T_r(M)$ je k-dimenzionální vektorový prostor.

(ii) Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ ot. množina, $x \in \Omega$ a $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ regulární homeomorfismus takový, že $r = \varphi(x) \in \varphi(\Omega) \subset M$ a $\varphi(\Omega)$ otevřená v M, pak
$$T_r(M) = \varphi'(x)(\mathbb{R}^k)$$
(tzn. že $v \in T_r(M) \iff v = \varphi'(x)h$ pro jistý vektor $h \in \mathbb{R}^k$).

Důkaz. Protože $\operatorname{rank} \varphi'(x) = k$, je lineární zobrazení $\varphi'(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ prosté (viz Poznámka, str. 3-4, 17. přednáška). Tedy $\varphi'(x)(\mathbb{R}^k)$ je k-dimenzionální vektorový prostor. Proto stačí dokázat část (ii).

Předpokládejme nejprve, že vektor $v \in \mathbb{R}^n$ má tvar

(2) $$v = \varphi'(x)h \quad \left(= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)h_1 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)h_k\right), \text{ kde } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k.$$

Položíme-li
$$\psi(t) := \varphi(x + th) \quad \forall t \in I := (-\delta, \delta), \text{ kde } \delta > 0 \text{ je dosti malé},$$
pak $\psi(t) \in M$ $\forall t \in I$ a platí $\psi(0) = \varphi(x) = r$,
$$\psi'(t) = \varphi'(x + th) \cdot h \quad \forall t \in I \implies \psi'(0) = \varphi'(x) \cdot h \underset{\text{dle (2)}}{=} v.$$
Tedy $v \in T_r(M)$.

Předpokládejme naopak, že $v \in T_r(M)$. Pak ex. ot. interval $I \subset \mathbb{R}$, zobrazení $\psi : I \to M$ třídy C^1 na I a bod $t_0 \in I$ tak, že platí (1)

Buď $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ je ot. množina, lokální parametrizace k-plochy M splňující $\underline{z = \varphi(x) \in \varphi(\Omega) \subset M}$ a $\varphi(\Omega)$ je otevřená v M.

Položme

(3) $\quad \Lambda := \varphi^{-1} \circ \psi$.

Pak $\Lambda : I \to \mathbb{R}^k$ je zobrazení třídy C^1 na I a platí

(4) $\quad \Lambda(t_0) = \varphi^{-1}(\underbrace{\psi(t_0)}_{=z}) = \varphi^{-1}(z) = x$.

BÚNO lze předpokládat, že interval I je tak malý, že

(5) $\quad \Lambda(I) \subset \Omega$

(jinak místo I vezmu $I_\delta := (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ pro $\delta > 0$ tak malé, aby $\Lambda(I_\delta) \subset \Omega$).

Tedy $\Lambda : I \to \Omega$ je zobrazení třídy C^1 a z (3) máme

(6) $\quad \psi = \varphi \circ \Lambda$.

Z věty o derivaci složeného zobrazení pak dostaneme

$$\psi'(t) = \varphi'(\Lambda(t))\,\Lambda'(t) \quad \forall\, t \in I,$$

a tedy

(7) $\quad \psi'(t_0) = \varphi'(\underbrace{\Lambda(t_0)}_{x \text{ dle } (4)})\,\Lambda'(t_0) = \varphi'(x)\,\Lambda'(t_0)$

(poznamenejme, že pro lineární zobrazení $\Lambda'(t_0)$ platí $\Lambda'(t_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$).

Položíme-li $h := \Lambda'(t_0) \in \mathbb{R}^k$, pak z (1) a (7) plyne

$$\underline{\underline{v}} = \psi'(t_0) = \underline{\varphi'(x)\,h}.$$

Protože $v \in T_z(M)$ byl libovolný vektor, platí $T_z(M) \subset \varphi'(x)(\mathbb{R}^k)$. $\square$

Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}^n$ $(n-1)$-plocha a $z \in M$. Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ nazveme <u>normálovým vektorem k ploše M v bodě z</u>, jestliže $v \in T_z(M)^\perp$.

Definice. Buď $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. <u>Vektorový součin vektorů</u> $u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)} \in \mathbb{R}^n$ je vektor

$$u^{(1)} \times \ldots \times u^{(n-1)} := \sum_{i=1}^{n} \det(e_i, u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)})\, e_i.$$

Poznámka (i) Tedy i-tá souřadnice vektoru $u^{(1)}\times\dots\times u^{(n-1)}$ je rovna determinantu

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1^{(1)} & \dots & u_1^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & u_{i-1}^{(1)} & & \vdots \\ 1 & u_i^{(1)} & & \vdots \\ 0 & u_{i+1}^{(1)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & u_n^{(1)} & & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \quad i=1,\dots,n.$$

Odtud plyne, že vektor $u^{(1)}\times\dots\times u^{(n-1)}$ je roven formálnímu determinantu $\begin{vmatrix} e_1 & u_1^{(1)} & \dots & u_1^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_n & u_n^{(1)} & & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$, který rozvedeme podle prvků 1. sloupce.

(ii) V $\mathbb{R}^3$ je vektorovým součinem vektorů

$$u^{(1)}=(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}) \quad \text{a} \quad u^{(2)}=(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)})$$

vektor

$$u^{(1)}\times u^{(2)} = \left(\begin{vmatrix} u_2^{(1)}, & u_2^{(2)} \\ u_3^{(1)}, & u_3^{(2)} \end{vmatrix}, (-1)\cdot\begin{vmatrix} u_1^{(1)}, & u_1^{(2)} \\ u_3^{(1)}, & u_3^{(2)} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1^{(1)}, & u_1^{(2)} \\ u_2^{(1)}, & u_2^{(2)} \end{vmatrix} \right).$$

(iii) V $\mathbb{R}^2$ má vektorový součin jen jednoho činitele. Vektorový součin vektoru $u=(u_1,u_2)$ je vektor

$$\left(\begin{vmatrix} 1, & u_1 \\ 0, & u_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0, & u_1 \\ 1, & u_2 \end{vmatrix} \right) = (u_2, -u_1).$$

Věta 74 (vlastnosti vektorového součinu). Buď $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $u^{(1)},\dots,u^{(n-1)}\in\mathbb{R}^n$. Pak platí:

(i) $\forall v\in\mathbb{R}^n$: $\langle v, u^{(1)}\times\dots\times u^{(n-1)}\rangle = \det(v, u^{(1)},\dots,u^{(n-1)})$.

(ii) Vektory $u^{(1)},\dots,u^{(n-1)}$ jsou lineárně závislé $\Leftrightarrow$ $u^{(1)}\times\dots\times u^{(n-1)}=o$.

(iii) $\forall i\in\{1,\dots,n-1\}$: $\langle u^{(i)}, u^{(1)}\times\dots\times u^{(n-1)}\rangle = 0$.

(iv) $\|u^{(1)}\times\dots\times u^{(n-1)}\|^2 = \det(A^TA)$, kde $A:=(u^{(1)},\dots,u^{(n-1)})$.

(v) $\|u^{(1)}\times\dots\times u^{(n-1)}\|$ je rovna objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $u^{(1)},\dots,u^{(n-1)}$.

Důkaz. ad (i): Je-li $v\in\mathbb{R}^n$, pak

$$\langle v, u^{(1)}\times\dots\times u^{(n-1)}\rangle = \sum_{i=1}^n v_i \det(e_i, u^{(1)},\dots,u^{(n-1)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det(v_i e_i, u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)}) = \det(v, u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)}).$$

ad (ii): Vektory $u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)}$ jsou lineárně závislé $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ rank $(u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)}) < n-1$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ všechny subdeterminanty řádu $n-1$ matice $(u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)})$ jsou nulové $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $u^{(1)} \times \ldots \times u^{(n-1)} = 0$.

cf. definici vektorového součinu

ad (iii): Tvrzení (iii) plyne z (i) (a z vlastností determinantů).

ad (iv): Buď $w := u^{(1)} \times \ldots \times u^{(n-1)}$. Pak

$$\|w\|^4 = (\langle w, w\rangle)^2 = (\langle w, u^{(1)} \times \ldots \times u^{(n-1)}\rangle)^2 \overset{\text{dle (i)}}{=} \left(\det(w, u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)})\right)^2 =$$

$$= \det(w, u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)})^T \cdot \det(w, u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)}) =$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} w \\ u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot (w, u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)}) \right) =$$

využíváme zde také (iii)

$$= \det \begin{pmatrix} \langle w, w\rangle, & 0 & , \ldots, & 0 \\ 0 & , \langle u^{(1)}, u^{(1)}\rangle, & \ldots, & \langle u^{(1)}, u^{(n-1)}\rangle \\ \vdots & & & \\ 0 & , \langle u^{(n-1)}, u^{(1)}\rangle, & \ldots, & \langle u^{(n-1)}, u^{(n-1)}\rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \langle w, w\rangle \cdot \det(\langle u^{(i)}, u^{(j)}\rangle)_{i,j=1}^{n-1} = \|w\|^2 \det(\langle u^{(i)}, u^{(j)}\rangle)_{i,j=1}^{n-1} =$$

$= \|w\|^2 \det(A^T A)$, odkud plyne (iv). *)

ad (v): Z lineární algebry je známo, že **)

$\sqrt{\det(A^T A)}$ = objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)}$.

Odtud a z (iv) plyne (v). □

---

*) Poznamenejme, že $\|w\| = 0 \Leftrightarrow u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)}$ jsou lin. závislé $\Leftrightarrow$ determinant Gramovy matice $G = (\langle u^{(i)}, u^{(j)}\rangle)_{i,j=1}^{n-1}$ je 0 $\Leftrightarrow \det(A^T A) = 0$.
neb $G = A^T A$.

**) Viz např. Birkhoff and Mac Lane: A survey of modern algebra, The Macmillan Company, New York 1953, str. 289, Theorem 7.

Označení. Symbolem λ_k budeme značit k-rozměrnou Lebesgueovu míru v $\mathbb{R}^k$.

Lemma 75 (o míře grafu fce). Buď $k \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^k$ λ_k-měřitelná množina a f reálná λ_k-měřitelná fce na množině A. Nechť

$$G(f) := \{[x, f(x)] \in \mathbb{R}^{k+1};\ x \in A\}.$$

Pak $\lambda_{k+1}(G(f)) = 0$.

Důkaz. (i) Předpokládejme nejprve, že $\lambda_k(A) < +\infty$. $\forall \varepsilon > 0$ platí

$$G(f) \subset \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} B_j \times I_j,$$

kde

$$B_j := \{x \in A;\ j\varepsilon \le f(x) < (j+1)\varepsilon\},$$

$$I_j := \{y \in \mathbb{R};\ j\varepsilon \le y < (j+1)\varepsilon\}.$$

Z Fubiniovy věty máme

$$\lambda_{k+1}(B_j \times I_j) = \lambda_k(B_j) \cdot \varepsilon.$$

Odtud plyne

$$\lambda_{k+1}(G(f)) \le \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \lambda_k(B_j) \cdot \varepsilon = \lambda_k(A) \cdot \varepsilon.$$

neb $A = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} B_j$ a B_j jsou disjunktní

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, platí

$$\lambda_{k+1}(G(f)) = 0.$$

(ii) Je-li $\lambda_k(A) = +\infty$, pak $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, kde A_j jsou λ_k-měřitelné množiny konečné míry.*) Protože

$$G(f) = \bigcup_{j=1}^{\infty} G(f|_{A_j})$$

a dle (i) platí $\lambda_{k+1}(G(f|_{A_j})) = 0\ \forall j \in \mathbb{N}$, je $\lambda_{k+1}(G(f)) \le \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\lambda_{k+1}(G(f|_{A_j}))}_{=0} = 0$. □

---

*) Stačí např. volit $A_j := A \cap Q_j$, kde

$$Q_j := \{x = [x_1, \dots, x_k] \in \mathbb{R}^k;\ |x_i| \le j\ \forall i = 1, \dots, k\}.$$

Pak $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j = \mathbb{R}^k$, a tedy $A = A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap Q_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ a přitom

$$\lambda_k(A_j) \le \lambda_k(Q_j) = (2j)^k < +\infty \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

-1. **Věta 76 (vztah plochy a grafu zobrazení).** Buď $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$, a $M \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha. Pak M je lokálně grafem zobrazení třídy C^1, tj. každý bod $z \in M$ má takové okolí U v M, že plocha U je grafem zobrazení třídy C^1.

Z Věty 76 a z Lemmatu 75 plyne následující věta.

Věta 77 (o λ_n-míře k-plochy). Buď $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$, a $M \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha. Pak $\lambda_n(M) = 0$. *)

Důkaz. Z Věty 76 víme, že každý bod $z \in M$ má okolí U otevřené v M, které je grafem zobrazení třídy C^1. Protože $M \subset \mathbb{R}^n$ a prostor $\mathbb{R}^n$ je separabilní, je i M separabilní metr. prostor. Tedy podle Lindelöfovy věty lze vybrat ze systému těchto okolí U takovou spočetnou posloupnost, že M je jejich sjednocením. Protože sjednocení spočetné posloupnosti množin míry 0 je množina míry 0, stačí dokázat, že každé z okolí U má n-rozměrnou Lebesgueovu míru 0.

BÚNO: $U = \{[x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \varphi_{n-k}(x_1, \dots, x_k)];\ [x_1, \dots, x_k] \in \Omega\}$,
kde $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-k} \in C^1(\Omega)$.
Je jasné, že $U \subset W$, kde

$$W := \{[x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi_{n-k}(x_1, \dots, x_k)] \in \mathbb{R}^n;\ [x_1, \dots, x_k] \in \Omega\}.$$

Množina W je grafem spojité fce (dokonce fce třídy C^1) φ dané předpisem

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) := \varphi_{n-k}(x_1, \dots, x_k)$$

definované na otevřené množině

$$G := \{[x_1, \dots, x_{n-1}] \in \mathbb{R}^{n-1};\ [x_1, \dots, x_k] \in \Omega\}.$$

Tedy podle Lemmatu 75 platí $\lambda_n(W) = 0$. Protože $U \subset W$, platí i $\lambda_n(U) = 0$. □

---

*) Z Věty 77 plyne, že k "měření" k-ploch $M \subset \mathbb{R}^n$ (a jejich podmnožin) je třeba použít jinou míru než míru λ_n.

·/. **Věta 78 (o ϰ-ploše).** Buď $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, a $M \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha. Nechť $\varkappa \leq k$ a M' je $\varkappa$-plocha, $M' \subset M$. Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ ot. množina a $\varphi : \Omega \to M$ difeomorfismus, pak množina $\varphi^{-1}(M')$ je buďto prázdná, nebo je $\varkappa$-plochou v $\mathbb{R}^k$.

Poznámka. Tvrzení Věty 77 souhlasí s intuicí, která nás vede k tomu, že dvojrozměrná míra (obsah) rovinné 1-plochy a trojrozměrná míra (objem) 1-plochy nebo 2-plochy v $\mathbb{R}^3$ má být 0.

Intuice nás také vede k tomu, že pro podmnožiny 1-ploch v $\mathbb{R}^2$ nebo v $\mathbb{R}^3$ je třeba zavést jinou, jednorozměrnou míru, která je přesným vyjádřením pojmu délky a pro podmnožiny dvojrozměrných ploch v $\mathbb{R}^3$ přesným vyjádřením pojmu obsahu ploch.

V následující větě je podána definice takových měr v plné obecnosti, tj. pro každou k-rozměrnou plochu v prostoru $\mathbb{R}^n$, kde $k \leq n$.

·/. **Věta 79 (o míře μ_M).** Buď M k-dimenzionální plocha v $\mathbb{R}^n$, kde $k \leq n$. Pak existuje právě jedna míra μ_M definovaná na jisté σ-algebře $\mathcal{M}_M$ podmnožin plochy M, pro kterou platí:

(i) Množina $A \subset M$ patří do $\mathcal{M}_M$ právě tehdy, když $\forall$ difeomorfismus $\varphi : \Omega \to M$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, je vzor $\varphi^{-1}(A)$ λ_k-měřitelný.

(ii) $\forall$ difeomorfismus $\varphi : \Omega \to M$ (kde $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ je ot.) platí: Je-li $A \subset \varphi(\Omega)$ a $A \in \mathcal{M}_M$, pak

(1) $$\mu_M(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det\left(\varphi'(x)^T \varphi'(x)\right)}\, d\lambda_k(x).$$

Míra μ_M je úplná a všechny borelovské podmnožiny prostoru M patří do $\mathcal{M}_M$.

Definice. Míru μ_M z Věty 79 budeme nazývat **k-dimenzionální mírou na ploše M**. Množiny z $\mathcal{M}_M$ budeme nazývat μ_M-měřitelnými množinami nebo stručně měřitelnými množinami, bude-li z kontextu zřejmé, že se jedná o míru μ_M.

Věta 80 (o μ_M-míře $\varkappa$-plochy, $\varkappa < k$). Buď $\varkappa < k \le n$ a $M \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha. Je-li $M' \subset M$ $\varkappa$-plocha, pak $\mu_M(M') = 0$.

Důkaz. Je-li $\varphi : \Omega \to M$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^k$ otevřená) difeomorfismus a $M' \subset \varphi(\Omega)$, pak podle Věty 78 (o $\varkappa$-ploše) je $\varphi^{-1}(M')$ $\varkappa$-plocha v prostoru $\mathbb{R}^k$. Odtud a z Věty 77 (kde bereme k místo n a $\varkappa$ místo k) pak plyne, že $\lambda_k(\varphi^{-1}(M')) = 0$. Tudíž, dle (1), platí $\mu_M(M') = 0$.

Věta 81 (charakterizace μ_M-měřitelnosti fce f). Reálná funkce f definovaná na podmnožině $A \in \mathcal{M}_M$ k-plochy $M \subset \mathbb{R}^n$ ($k \le n$) je μ_M-měřitelná právě tehdy, jestliže $f \circ \varphi$ je λ_k-měřitelná $\forall$ difeomorfismus $\varphi : \Omega \to M$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina.

Speciálně každá spojitá fce f na $A \in \mathcal{M}_M$ je μ_M-měřitelná.

Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}^n$ k-plocha, $k \le n$. Je-li $A \in \mathcal{M}_M$ a $A \subset \varphi(\Omega)$, kde $\varphi : \Omega \to M$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^k$ otevřená) je difeomorfismus a f reálná fce na A, pak

$$(2) \quad \int_A f \, d\mu_M := \int_{\varphi^{-1}(A)} (f \circ \varphi)(x) \sqrt{\det(\varphi'(x)^T \varphi'(x))} \, d\lambda_k(x).$$

Věta 82 (o míře $\mu_{M'}$, je-li $M' \subset M$). Je-li M' k-plocha obsažená v k-ploše $M \subset \mathbb{R}^n$, $k \leq n$, pak

(3) $\mathfrak{M}_{M'} = \{A \in \mathfrak{M}_M;\ A \subset M'\}$ a $\mu_{M'} = \mu_M|\mathfrak{M}_{M'}$,

tj. $\mu_{M'}(A) = \mu_M(A)$ $\forall$ měřitelnou množinu $A \subset M'$.

Poznámka (i) Tradiční značení plošného integrálu (pro $k=2$, $n=3$):

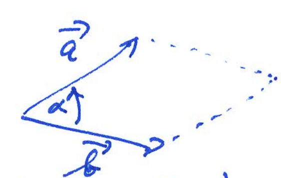
$$\int_A f \, d\mu_M = \int_A f \, dS.$$

(ii) Je-li $k = n-1$, pak dle Věty 74 lze ve vzorci (1) pro $\mu_M(A)$ psát $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \times \ldots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) \right\|$ místo $\sqrt{\det(\varphi'(x)^T \varphi'(x))}$.

(iii) Buď $k=2$, $n=3$. Nechť $\vec{a}$, $\vec{b}$ jsou lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^3$. Pak

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\alpha \quad {}^{*)}$$

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\alpha.$$



Tedy $\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 (1 - \cos^2\alpha) =$
$= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sin^2\alpha = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2$,

tj.

(4) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$.

Buď nyní $M \subset \mathbb{R}^3$ 2-plocha, $\varphi: \Omega \to M$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ot.) difeomorfismus, $A \in \mathfrak{M}_M$, $A \subset \varphi(\Omega)$. Tedy

$$\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3], \quad \varphi = \varphi(u,v), \quad [u,v] \in \Omega.$$

Z Věty 79 a z části (ii) této poznámky máme

(5) $\mu_M(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv$.

---

*) Což je plocha rovnoběžníka určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Dle (4) (s $\vec{a} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\vec{b} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$) platí:

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle^2 = EG - F^2,$$

kde

$$E := \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\|^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right)^2,$$

$$G := \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \right)^2,$$

$$F := \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}.$$

Odtud a z (5) dostáváme

$$\mu_M(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Výrazy E, G, F se nazývají Gaussovy koeficienty plochy a jsou důležité v diferenciální geometrii ploch.

Předpokládejme nyní, že plocha M je grafem fce $g: \Omega \to \mathbb{R}^3$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ otevřená) třídy C^1, tedy

$$\varphi(u,v) = [u, v, g(u,v)] \quad \forall [u,v] \in \Omega.$$

Pak $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial u}\right)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial v}\right)$,

a tedy

$$E = 1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2, \quad G = 1 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2, \quad F = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v},$$

odkud plyne

$$EG - F^2 = \left(1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2.$$

(iv) Buď $k = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je 1-plocha, $\varphi: \Omega \to M$ ($\Omega \subset \mathbb{R}$ otevřená) difeomorfismus, $A \in \mathfrak{M}_M$, $A \subset \varphi(\Omega)$. Tedy

$$\varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_n], \quad \varphi = \varphi(x),\ x \in \Omega.$$

Pak $\varphi'(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi'(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \vdots \\ \varphi_n'(x) \end{pmatrix}$, $\varphi'(x)^T = (\varphi_1'(x), \dots, \varphi_n'(x))$, odkud dostáváme

$$\varphi'(x)^T \varphi'(x) = (\varphi_1'(x), \dots, \varphi_n'(x)) \begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \vdots \\ \varphi_n'(x) \end{pmatrix} =$$

$$= (\varphi_1'(x))^2 + \dots + (\varphi_n'(x))^2 = \|\varphi'(x)\|^2 \quad \forall x \in \Omega .$$

Tedy $\quad \det(\varphi'(x)^T \varphi'(x)) = \|\varphi'(x)\|^2 \quad \forall x \in \Omega .$

V tomto případě proto platí

$$\mu_M(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \|\varphi'(x)\| \, dx .$$

Je-li např. $\varphi^{-1}(A) = (x_0, x_1)$, pak

$$\mu_M(A) = \int_{x_0}^{x_1} \|\varphi'(x)\| \, dx$$

(což koresponduje se vzorečkem pro délku regulární křivky).

20. přednáška MA4, ak. r. 2016/17, LS, 4.5.2017

Poznámka. Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ 0-plocha, pak mírou μ_M budeme rozumět nularozměrnou míru danou pro každou množinu $A \subset M$ předpisem

$$\mu_M(A) = \text{počet prvků množiny } A.$$

Bude nás hlavně zajímat případ, kdy $A = \{z_1, \dots, z_m\}$ je konečná množina ($z_i \neq z_j$ pro $i \neq j$). Pak každá reálná fce f definovaná na A je μ_M-měřitelná a platí

$$\int_A f \, d\mu_M = \sum_{i=1}^m f(z_i).$$

(Neboť pro jednobodovou množinu $\{z\}$ je $\int_{\{z\}} f \, d\mu_M = f(z) \cdot 1 = f(z)$; protože A je sjednocením disjunktních jednobodových množin $\{z_i\}$, je

$$\int_A f \, d\mu_M = \sum_{i=1}^m \int_{\{z_i\}} f \, d\mu_M = \sum_{i=1}^m f(z_i).$$
)

Příklad. Vypočtěte plošný obsah množiny $M \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3;\ \|x\| = r\}, \quad r > 0.$$

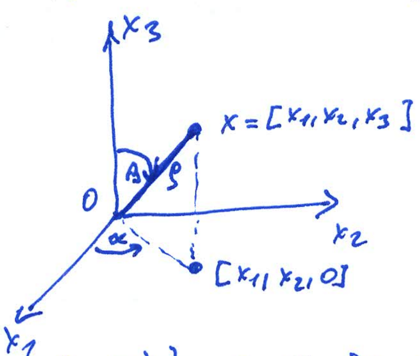
Řešení. Protože $M = \{x \in \mathbb{R}^3;\ F(x) = 0\} \neq \emptyset$, kde

$$F(x) := \|x\|^2 - r^2, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

je funkce třídy C^1 a $\operatorname{rank} F'(x) = \operatorname{rank} 2(x_1, x_2, x_3) = 1$ $\forall x \in M$, pak z Věty 72 plyne, že M je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$.

K výpočtu použijeme sférické souřadnice v $\mathbb{R}^3$,

$$x_1 = \rho \cos\alpha \sin\beta$$
$$x_2 = \rho \sin\alpha \sin\beta$$
$$x_3 = \rho \cos\beta$$



Buď $\Omega = \{[\alpha, \beta];\ \alpha \in (0, 2\pi),\ \beta \in (0, \pi)\}$ a $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] : \Omega \to M$ zobrazení dané předpisem

$$\varphi(\alpha, \beta) = [r \cos\alpha \sin\beta,\ r \sin\alpha \sin\beta,\ r \cos\beta] \quad \forall [\alpha, \beta] \in \Omega.$$

Pak
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} -r \sin\alpha \sin\beta \\ r \cos\alpha \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} r \cos\alpha \cos\beta \\ r \sin\alpha \cos\beta \\ -r \sin\beta \end{pmatrix} \quad \forall [\alpha, \beta] \in \Omega.$$

Odtud plyne, že vektory $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$ jsou v Ω lineárně nezávislé (neb $r\sin\beta \neq 0 \ \forall \beta\in(0,\pi)$). Tudíž $\varphi\in C^1(\Omega)$, rank $\varphi'(\alpha,\beta)=2$ $\forall [\alpha,\beta]\in\Omega$, tzn. že φ je regulární v Ω. Protože φ je také prosté v Ω, je φ difeomorfismus. Tedy

$M_2 := \varphi(\Omega)$ je 2-plocha, $M_2 \subset M$.
 ↑ neb $\|\varphi(\alpha,\beta)\|=1 \ \forall [\alpha,\beta]\in\Omega$

Z Vět 82 a 72 pak máme

$$\mu_M(M_2) = \mu_{M_2}(M_2) = \int_\Omega \sqrt{\det(\varphi'(\alpha,\beta)^T\varphi'(\alpha,\beta))}\,d\alpha\, d\beta.$$

Použijeme-li navíc části (ii) a (iii) Poznámky uvedené za Větou 82, dostaneme

$$\mu_M(M_2) = \int_\Omega \sqrt{EG-F^2}\,d\alpha\, d\beta,$$

kde $\forall [\alpha,\beta]\in\Omega$ platí

$$\underline{E} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 = r^2\sin^2\alpha\sin^2\beta + r^2\cos^2\alpha\sin^2\beta = \underline{r^2\sin^2\beta},$$

$$\underline{G} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2 = r^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + r^2\sin^2\alpha\cos^2\beta + r^2\sin^2\beta =$$
$$= r^2\cos^2\beta\underbrace{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}_{=1} + r^2\sin^2\beta = \underline{r^2},$$

$$F = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right\rangle = (-r\sin\alpha\sin\beta)(r\cos\alpha\cos\beta) +$$
$$+ (r\cos\alpha\sin\beta)(r\sin\alpha\cos\beta) + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{EG-F^2} = \sqrt{r^4\sin^2\beta} = r|\sin\beta| = r\sin\beta \quad \forall [\alpha,\beta]\in\Omega.$$

Tedy

(1) $$\underline{\mu_M(M_2)} = \int_{\Omega = (0,2\pi)\times(0,\pi)} r^2\sin\beta\, d\alpha\, d\beta = 2\pi\int_0^\pi r^2\sin\beta\, d\beta = 2\pi r^2[-\cos\beta]_0^\pi =$$
$$= 2\pi r^2[\cos\beta]_\pi^0 = 2\pi r^2(1-(-1)) = \underline{4\pi r^2}.$$

Označme $\tilde{M} = M\setminus M_2 = M\setminus\varphi(\Omega)$. Pak

$$\tilde{M} = \{[r\cos 0\sin\beta, r\sin 0\sin\beta, r\cos\beta];\ \beta\in[0,\pi]\} =$$
$$= \{[r\sin\beta, 0, r\cos\beta];\ \beta\in[0,\pi]\} = M_1\cup M_0, \text{ kde}$$
$$M_1 = \{[r\sin\beta, 0, r\cos\beta];\ \beta\in(0,\pi)\},\ M_0 = \{[0,0,r],[0,0,-r]\}.$$

Tedy $M_0\subset M$ je 0-plocha a z Věty 80 dostáváme, že

(2) $\mu_M(M_0) = 0$.

Dále platí $M_1 = \psi(\Omega_1)$, kde $\Omega_1 = \{\beta;\ \beta\in(0,\pi)\}$ a

$$\psi(\beta) = [r\sin\beta, 0, r\cos\beta] \ \forall \beta\in(0,\pi) = \Omega_1.$$

Protože $\varphi'(\beta) = [r\cos\beta, 0, -r\sin\beta]$ $\forall \beta \in \Omega_1$ a

$$\|\varphi'(\beta)\| = \sqrt{r^2\cos^2\beta + r^2\sin^2\beta} = r > 0 \quad \forall \beta \in \Omega_1,$$

je $\varphi \in C^1(\Omega_1)$ a rank $\varphi' = 1$ na Ω_1. Navíc φ je prosté na Ω_1. Tedy φ je difeomorfismus množiny Ω_1 na M_1. Z uvedeného plyne, že $M_1 \subset M$ je 1-plocha. Proto z Věty 80 dostáváme

(3) $$\mu_M(M_1) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že $M = M_2 \cup M_1 \cup M_0$ a $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, tak platí

$$\mu_M(M) = \mu_M(M_2) + \mu_M(M_1) + \mu_M(M_0) = 4\pi r^2 + 0 + 0 = 4\pi r^2$$

(což je známý vzoreček pro povrch koule o poloměru r v prostoru $\mathbb{R}^3$).

Cv. Řešte předešlý příklad tak, že použijete rovnost $M = M^+ \cup M^- \cup \tilde{M}$, kde $M^+ = \{x \in M;\ x_3 > 0\}$, $M^- = \{x \in M;\ x_3 < 0\}$, $\tilde{M} = \{x \in M;\ x_3 = 0\}$, a vyjádřete množiny M^+, M^- jako grafy funkcí.

Úmluva 1. Buď $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Plošný integrál $\int_A f \, d\mu_M$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha, $A \in \mathfrak{M}_M$ a f μ_M-měřitelná fce, budeme také značit symbolem $\int_A f \, dS$.

Úmluva 2. Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ a $P \subset \mathbb{R}^n$ je množina s vlastností:

Existuje k-plocha $M \subset P$ taková, že množina $P \setminus M$ je k-nulová.

%. Pak budeme říkat, že množina P je k-přípustná.

Je-li $P \subset \mathbb{R}^n$ k-přípustná množina a f funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, pak definujeme

$$\int_P f \, dS := \int_M f \, dS,$$

kde $M \subset P$ je k-plocha taková, že $P \setminus M$ je k-nulová množina. *)

---

*) Předpokládáme, že f je taková fce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, že $\int_M f \, dS$ existuje.

<u>Definice</u>: Buď $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a $M \subset \mathbb{R}^n$ $(n-1)$-plocha. <u>Orientací plochy</u> M rozumíme <u>spojité</u> zobrazení $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\nu(z) \in T_z(M)^\perp$ a $\|\nu(z)\| = 1$ $\forall z \in M$.

Je-li ν orientace $(n-1)$-plochy M, pak dvojici (M, ν) nazveme <u>orientovanou $(n-1)$-plochou</u>.

<u>Poznámka</u>. Zobrazení ν je spojité pole jednotkových normálových vektorů.

<u>Poznámka</u>. Buď $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a $M \subset \mathbb{R}^n$ $(n-1)$-plocha. Nechť $z \in M$ a $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je ot. množina) difeomorfismus splňující $z = \varphi(x) \in \varphi(\Omega) \subset M$. Pak

(4) $$\nu_\varphi(z) := \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}\right)(\varphi^{-1}(z))}{\left\| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}\right)(\varphi^{-1}(z)) \right\|},$$

kde $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\right)$, $i = 1, \dots, n-1$, je jednotkový normálový vektor k ploše M v bodě z. (Ovšem také vektor $-\nu_\varphi(z)$ je jednotkový normálový vektor k ploše M v bodě z.) Zobrazení ν_φ je spojité na $\varphi(\Omega)$ (a tedy určuje orientaci plochy $\varphi(\Omega)$).

<u>Definice</u>. Buď (M, ν) orientovaná $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, a $\varphi : \Omega \to M$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ot.) lokální parametrizace plochy M. Řekneme, že φ je <u>kladná</u> (vzhledem k ν), jestliže platí

$$\nu(z) = \nu_\varphi(z) \quad \forall z \in \varphi(\Omega).$$

<u>Poznámka</u>. Je-li (M, ν) orientovaná $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, pak lze dokázat, že existuje kladná zobecněná parametrizace plochy M.

Poznámka. Existují plochy, které nelze orientovat (tj. neexistuje na nich spojité pole jednotkových normál). Takové plochy se nazývají jednostranné. Příkladem takové plochy je Möbiův list (viz následující obrázek).