6. minitest MAT2

12. 3. 2025

Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$$

<u>1. možnost</u>: Srovnávejme s $\frac{1}{x^p}$ a pak určíme vhodné p:

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{1}{x^p}} \right| \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2}}{(-p)\cdot\frac{1}{x^{p+1}}} \right| =$$

typ limity „$\frac{0}{0}$"

volme $p=1$

$$= \lim_{x\to\infty} \left| \left(-\frac{1}{p}\right)\cdot\frac{x^{p+1}}{x(x+1)} \right| = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+1)} = 1 \in (0,\infty)$$

Z limitního srovnávacího kritéria plyne, že $\int_1^\infty \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$ diverguje neboť $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ diverguje.

<u>2. možnost</u>: Využijme znalosti referenční limity

$$\boxed{\lim_{z\to 1}\frac{\ln z}{z-1} = 1}$$

tedy: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{x}{x+1}-1} = 1 \in (0,\infty)$

VOLSF

$g(x) := \frac{x}{x+1} - 1 = \frac{-1}{x+1}$ a $\int_1^\infty |g(x)|\,dx$ diverguje

(lze srovnat s $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$)

z toho plyne divergence $\int_1^\infty \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$