

Domácí cvičení 10  
Komplexní čísla, matice otočení  
7. 12. 2022

1) Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = \left( \frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} \right)^{24}$$

2) Rozhodněte, zda komplexní číslo

$$z = \frac{(-1+i)^{1000}}{(-1-i)^{996}}$$

leží v množině

$$M = \{z \in \mathbb{C}; |z+3-i| \leq \sqrt{2}\}.$$

3) Určete průnik množin

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\},$$

$$M_2 = \{z \in \mathbb{C}; |z-i| = |z-1|\},$$

tj. najděte komplexní čísla  $z$  taková, že  $z \in M_1 \cap M_2$ .

4) Zobrazení  $L_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dané předpisem

$$L_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \vec{x}$$

je osová souměrnost podle osy  $y = -2x$ .

Zobrazení  $L_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dané předpisem

$$L_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \vec{x}$$

je osová souměrnost podle osy  $y = \frac{1}{2}x$ .

Určete předpis složeného zobrazení  $L_2 \circ L_1$  a popište jej.

5) Jaké otočení získáme složením osové souměrnosti podle osy  $y = \frac{x}{3}$  s osovou souměrností podle osy  $y = 2x$ . O jaký úhel?

6) Necht  $L_1, L_2, L_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  jsou následující zobrazení:

- $L_1$  je otočení kolem osy  $x$  o  $90^\circ$
- $L_2$  je otočení kolem osy  $y$  o  $90^\circ$
- $L_3$  je otočení kolem osy  $z$  o  $90^\circ$

Otočení uvažujeme v kladném směru, tj. proti směru hodinových ručiček. Napište předpis složeného zobrazení  $L_3 \circ L_2 \circ L_1$  a zobrazení k němu inverznímu.

Jaký je obraz bodu  $[2; 2; 5]$  při zobrazení  $L_3 \circ L_2 \circ L_1$ ?

*Pro zájemce: 1\*)* V oboru komplexních čísel řešte rovnici s neznámou  $x$  a parametrem  $a \in \mathbb{C}$ .

$$\frac{(|a| - 1)x^2 - 6x + |a| + 3}{x^2 - 4x + 3} = 2$$

V Gaussově rovině zakreslete všechna komplexní čísla  $a \in \mathbb{C}$ , pro která má daná rovnice aspoň jeden reálný kořen.

2\*) Jaké otočení získáme složením osové souměrnosti podle osy  $y = kx$  s osovou souměrností podle osy  $y = qx$ ? Vyjádřete o jaký úhel.