

Domácí cvičení 7
Matice - Vlastní čísla a vlastní vektory
16. 11. 2022

1) Najděte vlastní čísla a vlastní vektory následujících matic.

$$a) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

- a) $\lambda_1 = 4$, $\vec{x}_1 = (2, 1)$; $\lambda_2 = 1$, $\vec{x}_2 = (1, -1)$
- b) $\lambda_1 = 5$, $\vec{x}_1 = (2, 1)$; $\lambda_2 = -4$, $\vec{x}_2 = (1, -4)$
- c) $\lambda_1 = 6$, $\vec{x}_1 = (1, -1)$; $\lambda_2 = 8$, $\vec{x}_2 = (1, 1)$
- d) $\lambda_1 = 5$, $\vec{x}_1 = (2, 0, 1)$; $\lambda_2 = 2$, $\vec{x}_2 = (1, 0, 2)$ $\lambda_3 = 1$, $\vec{x}_3 = (10, -2, 15)$

2) Najděte alespoň dvě různé matice 3. řádu, jejichž vlastní čísla jsou 3, 4, 5.

3) Najděte alespoň dvě různé **symetrické** matice 2. řádu, jejichž vlastní čísla jsou 3 a 4.

4) Určete matici lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, víte-li, že obrazem vektoru $\vec{x}_1 = (1, 1)$ je vektor $L(\vec{x}_1) = (8, 8)$ a obrazem vektoru $\vec{x}_2 = (1, -1)$ je vektor $L(\vec{x}_2) = (-2, 2)$.

5) Napište nějakou matici 2. řádu, víte-li, že:

- její charakteristický polynom je $\lambda^2 - 8\lambda + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je nějaké neznámé číslo.
- její determinant je 12

6) Najděte alespoň tři různé matice 2. řádu, jejichž vlastní vektory jsou $(1, 0)$ a $(0, 1)$ a charakteristický polynom má tvar

$$\lambda^2 - c\lambda + 12,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je nějaké neznámé číslo.

7) Napište nějakou matici 3. řádu, víte-li, že:

- $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 2$ jsou její vlastní čísla
- její determinant je -24
- její vlastní vektory na sebe nejsou kolmé

8) Napište nějakou matici 3. řádu, víte-li, že:

- její charakteristický polynom je $(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2$
- vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda = 1$ je $(1, 0, -1)$