

Metoda nejmenších čtverců, maticové rozklady

Matematika pro geoinformatiky

5. 1. 2025

1) Pomocí metody nejmenších čtverců najděte lineární aproximaci $y = ax + b$ z naměřených hodnot

a)

x	0	1	2
y	3	-5	-1

d)

x	0	2	4	6
y	1	0	1	4

b)

x	-1	0	1
y	2	-10	8

e)

x	0	1	2	3	4
y	1	0	1	4	4

c)

x	0	1	2
y	3	0	3

f)

x	0	1	2	3	4
y	1	0	1	0	1

2) Pomocí metody nejmenších čtverců najděte kvadratickou aproximaci $y = ax^2 + bx + c$ z naměřených hodnot

x	0	1	2	3
y	1	0	1	-1

3) Určete Jordanův rozklad matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4) Určete singulární rozklad matic

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledky

1)

a) $y = -2x + 1$

b) $y = 3x$

c) $y = 2$

d) $y = \frac{1}{2}x$

e) $y = x$

f) $y = \frac{3}{5}$

2) $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$