

Zápočtový test

Matematika pro geoinformatiky
Předtermín

- 1) Určete definiční obor a obor hodnot následujících funkcí.

$$f(x) = \sqrt{6x - x^2}$$

$$g(x) = \sqrt{8 - x^3}$$

Dále rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou dané funkce prosté a pokud ano, určete předpis inverzní funkce. (4 body)

- 2) Zderivujte funkci (1 bod)

$$y = \ln^3 \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$

- 3) Vypočtete integrál (1 bod)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(5x) dx$$

- 4) Najděte řešení diferenciální rovnice

$$y' = y^2$$

splňující počáteční podmínku $y(4) = -1$. (1 bod)

- 5) Zakreslete definiční obor funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem (1 bod)

$$f(x, y) = \sqrt{4x^2 - y^2}$$

- 6) Vypočítejte obě parciální derivace funkce (1 bod)

$$f(x, y) = y \sin(x^2 - y)$$

- 7) Určete rovnici tečny ke grafu funkce

$$f(x) = \ln(2x - 5)$$

v jejím průsečíku s osou x . Situaci zakreslete. (1 bod)

8) Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x, y) = x^3 + \ln(y + 1) + 5$$

v jejím průsečíku s osou z . (1 bod)

9) Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice (2 body)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10) Určete argument komplexního čísla

$$z = \left(\frac{i^{17} + i^{18} + i^{19}}{i^{20} + i^{21} + i^{22}} \right)^{36}$$

Argument uvádějte v základním tvaru, tedy z intervalu $[0, 2\pi)$. (2 body)

11) Napište předpis afinního zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které zobrazí

- graf funkce $y = 2^x$ na graf funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- parabolu $y = x^2$ na parabolu $x = y^2 + 6y$
- kružnici $x^2 + y^2 - 6y = 0$ na elipsu $4x^2 + y^2 = 4$

Rozhodněte, zda je dané zobrazení shodnost či podobnost, potažmo přímá či nepřímá. (3 body)

12) Napište matici otočení kolem osy z o úhel $\frac{\pi}{2}$ proti směru hodinových ručiček. Jaký je obraz bodu $[1, 1, 1]$? (1 bod)

13) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

Určete intervaly monotonie a konvexity, najděte lokální extrémy, inflexní body, průsečíky s osami a graf funkce zakreslete. (3 body)

14) Napište parametrické vyjádření křivky

$$x^2 + 2x + 4y^2 - 3 = 0$$

ležící v polorovině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq -1\}$. Určete tečný vektor k této křivce v jejím průsečíku s osou x . (2 body)

Bonusový příklad (1 bod) Určete graficky počet řešení rovnice

$$x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{x} = 0$$