

Zápočtový test
Matematika pro geoinformatiky
1. termín, 11. 1. 2022

- 1) Určete definiční obor a obor hodnot následujících funkcí.

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x^2 + 4x + 5)$$

$$g(x) = 6 \arcsin\left(\frac{x^3}{8}\right) + \pi$$

Dále rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou dané funkce prosté a pokud ano, určete předpis inverzní funkce. (4 body)

- 2) Zderivujte funkci (1 bod)

$$y = \ln^4(x \sin(5x))$$

- 3) Vypočtete integrál (1 bod)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x) dx$$

- 4) Najděte řešení diferenciální rovnice

$$y' = 8xy$$

splňující počáteční podmínku $y(3) = 1$. (2 body)

- 5) Určete inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Napište definici inverzní matice a ověřte, že Vámi nalezená matice je skutečně inverzní k matici A . (1 bod)

- 6) Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice (2 body)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

7) Určete argument komplexního čísla

$$z = \left(\frac{i^{17} - \frac{1}{i}}{i^{18} - \frac{1}{i}} \right)^{32}$$

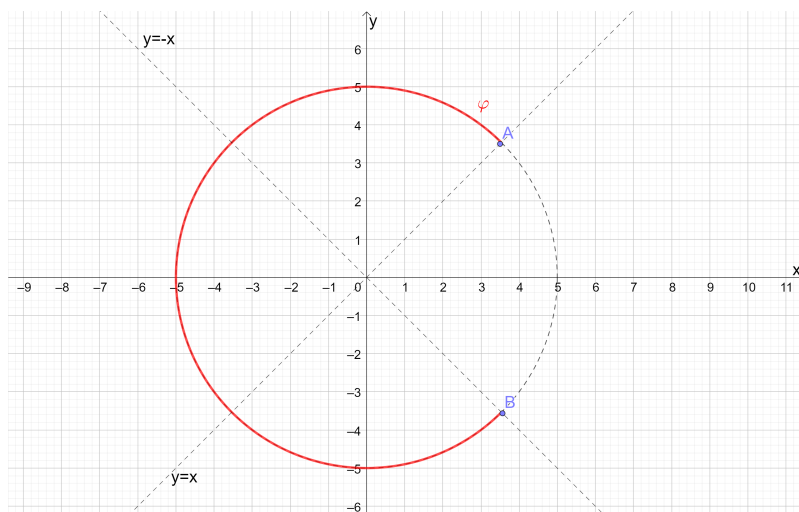
Argument uvádějte v základním tvaru, tedy z intervalu $[0, 2\pi)$. (2 body)

8) Napište předpis afinního zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které zobrazí

- graf funkce $y = \operatorname{arctg} x$ na graf funkce $y = \operatorname{arccotg} x$
- parabolu $y = x^2$ na parabolu $x = y^2 - 6y$
- kružnici $x^2 + y^2 - 10y = 0$ na elipsu $4x^2 + y^2 + 8y = 0$

Rozhodněte, zda je dané zobrazení shodnost či podobnost, potažmo přímá či nepřímá. (3 body)

9) Napište parametrickou rovnici křivky φ z bodu A do bodu B . (1 bod)



10) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Určete intervaly monotonie a konvexity, najděte lokální extrém, inflexní body, průsečíky s osami a graf funkce zakreslete. (4 body)

Bonusový příklad 1 (2 body) Zakreslete rovinnou křivku $\varphi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ danou předpisem

$$\varphi(t) = (\cos t, \cos 2t)$$

Bonusový příklad 2 (1 bod) Určete počet řešení rovnice

$$x^2 - 4 + \log_2 x = 0$$

a tato řešení odhadněte.