Příklad 12.4. Určete partikulární řešení rovnice s danou počáteční podmínkou. V některých případech proveďte zkoušku.

a) $y' = \dfrac{y-2}{x+1},\ y(3) = 0$

b) $y' = y^2 + 1,\ y(\pi) = 1$

c) $y' = -\dfrac{x}{y},\ y(1) = -3$

d) $y' = \dfrac{y^2-1}{x},\ y(-4) = -1$

e) $y' = \dfrac{y^3}{x^2},\ y(1) = -1$

f) $y' = \dfrac{y^2+1}{2xy},\ y(-2) = 1$

g) $y' = 3^{x+y},\ y(1) = -1$

h) $y' = \operatorname{cotg} x (y-1)^2,\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}$

Řešení 12.4.

a) $\mathcal{O} = (-1,\infty)\times(-\infty,2),\ y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x,\ x \in (-1,\infty)$ *odstranění abs. hodnot, rovnice též lineár.*

b) $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2,\ y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right),\ x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ *pozor na def. obor*

c) $\mathcal{O} = \mathbb{R}\times(-\infty,0),\ y = -\sqrt{10-x^2},\ x \in (-\sqrt{10},\sqrt{10})$ *krajní body def. oboru!*

d) $y = 1, x \in (-\infty,0)$ *stacionární řešení*

e) $\mathcal{O} = (0,\infty)\times(-\infty,0),\ y = -\sqrt{\dfrac{x}{2-x}},\ x \in (0,2)$ *odstranění abs. hodnoty*

f) $\mathcal{O} = (-\infty,0)\times(0,\infty),\ y = \sqrt{-x-1},\ x \in (-\infty,-1)$

g) $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2,\ y = -\log_3(6-3^x),\ x \in (-\infty, 1+\log_3 2)$

h) $\mathcal{O} = (0,\pi)\times(1,\infty),\ y = 1 + \dfrac{1}{2-\ln(\sin x)},\ x \in (0,\pi)$

Příklad 12.5. Určete obecné řešení rovnice

a) $y' = y^2$

b) $y' = \dfrac{e^y}{\sqrt{x}}$

c) $y' = y\cos x$

d) $y' = \dfrac{2y\ln y}{x}$

Řešení 12.5.

a) $y = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{C-x}, & x \in (-\infty,C),\ C \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{C-x}, & x \in (C,\infty),\ C \in \mathbb{R} \end{cases}$

b) $y = -\ln\left(C - 2\sqrt{x}\right), C > 0, x \in \left(0, \frac{C^2}{4}\right)$

c) $y = Ce^{\sin x}, x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$

homogenní lineární

d) $y = \begin{cases} e^{Cx^2}, & x \in (-\infty,0),\ C \in \mathbb{R} \\ e^{Cx^2}, & x \in (0,\infty),\ C \in \mathbb{R} \end{cases}$