RMF - Úlohy z 11. týdne

Laplaceova transformace

6. 12. 2024

1) Najděte Laplaceův obraz funkce

$$f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$$

2) Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici.

a) $y' - y = 1, \quad y(0) = 3$

b) $y' - 5y = e^{5x}, \quad y(0) = 0$

c) $y' - y = xe^{x}, \quad y(0) = 0$

d) $y'' - y' = 1, \quad y'(0) = 1, y(0) = 2$

e) $y''' - y'' = 0, \quad y''(0) = y'(0) = y(0) = 1$

f) $y''' + y'' = 0, \quad y''(0) = y'(0) = y(0) = 1$

g) $y' - y = 1, \quad y(1) = 2$

3) Nalezněte řešení integro-diferenciální rovnice

$$y' + 6y + 9\int_0^x y(t)dt = 1$$

s počáteční podmínkou $y(0) = 0$.

Výsledky:

1) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}(p+1)^{-\frac{3}{2}}$

2)

a) $y = 4e^x - 1$

b) $y = x\,e^{5x}$

c) $y = \frac{1}{2}x^2e^x$

d) $y = 2e^x - x$

e) $y = e^x$

f) $y = e^{-x} + 2x$

g) $y = 3\,e^{x-1} - 1$, nápověda: zaveďte substituci $z(x) = y(x+1)$

3) $y = xe^{-3x}$, nápověda: Využijte vztahu pro Laplaceův obraz primitivní funkce

$$\mathcal{L}[\theta(x)\int_0^x f(t)dt](p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}[f(x)](p)$$

(Věta 3.5.2, bod 11)