RMF – 6. sada, 1.11.2024

1) Je-li Ω maximální otevřená množina v $\mathbb{R}$ taková,
(*) že $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega): (f, \varphi) = 0$, pak její komplement
$\mathbb{R} \setminus \Omega$ nazveme zobecněný nosič f.

1a) $(f, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k)$

Ukažme, že $\Omega = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, tedy $\widetilde{\operatorname{supp} f} = \mathbb{N}$.

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega): (f, \varphi) = 0$ neboť $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$,
tedy $\forall n \in \mathbb{N}: \varphi(n) = 0 \Rightarrow f$ je nulová na Ω

Ukažme maximalitu: Je-li $\Omega' \subset \mathbb{R}$ otevřená množina
taková, že $\Omega \subset \Omega'$, pak $\exists k \in \mathbb{N}$ t.ž. $k \in \Omega'$
a tedy $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ taková, že $\varphi(k) > 0$
a $\operatorname{supp} \varphi \subset (k-1, k+1)$

pak $(f, \varphi) = \varphi(k) \neq 0$,
tedy Ω je největší otevřená množina splňující (*).

1b) $(f, \varphi) = \varphi(0) + \int_1^2 \varphi(x)\, dx$

Ukažme, že $\Omega = \mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup [1,2])$, tedy $\widetilde{\operatorname{supp} f} = \{0\} \cup [1,2]$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega): (f, \varphi) = 0$ neboť $\varphi(0) = 0$ a $\varphi(x) = 0 \ \forall x \in [1,2]$

Ukažme, že Ω je největší otevřená množina s touto vlastností
Je-li $\Omega' \subset \mathbb{R}$ otevřená množina taková, že $\Omega \subset \Omega'$,
pak nutně $0 \in \Omega'$ nebo $(1,2) \cap \Omega' \neq \emptyset$ a tedy
$\exists (a,b) \subset (1,2) \wedge (a,b) \subset \Omega'$

pak $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ t.ž. $\varphi(0) > 0$ nebo $\int_a^b \varphi(x)\, dx \neq 0$

2) $f_n(x) = \dfrac{3n^4x^2 + 2n^3x^2}{2n+1} \cdot e^{-n|x|}$

$$(f_n, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{3n^2+2n}{2n+1} \cdot n^2x^2 \cdot e^{-n|x|} \cdot \varphi(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} nx = t \\ n\,dx = dt \end{array} \right| = \quad dx = \tfrac{1}{n}\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{3n^2+2n}{2n+1} \cdot t^2 e^{-|t|} \cdot \frac{1}{n} \cdot \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{3n+2}{2n+1} \cdot t^2 e^{-|t|} \cdot \varphi\left(\frac{t}{n}\right)}_{=: g_n(t)} dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{2}\varphi(0) \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-|t|}\,dt}_{2\cdot\int_0^\infty t^2 e^{-t}\,dt}$$

$$= 2\cdot\Gamma(3) = 2\cdot 2!$$

(nebo 2x per-partes)

LEBESGUEOVA VĚTA

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \forall t\in\mathbb{R}: \left|g_n(t)\right| \le \frac{5}{3}\cdot \max_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)| \cdot t^2 e^{-|t|} \in L^1(\mathbb{R})$$

tedy $(f_n, \varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{2}\cdot\varphi(0)\cdot 2\cdot 2! = 6\varphi(0) = (6\delta, \varphi)$

$\forall n\in\mathbb{N}: f_n(0) = 0$

$$\wedge\ \forall x\in\mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^2 \cdot \frac{\overbrace{\frac{3n^4+2n^3}{2n+1}}^{\sim\frac{3}{2}n^3}}{e^{n|x|}} = 0$$

tedy $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ v každém bodě $x\in\mathbb{R}$;

(tj. bodová limita v klasickém smyslu je funkce $f(x) = 0$),

zatímco v zobecněném smyslu: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 6\delta$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3) $f_n(x,y) = \dfrac{n^2}{(n^2x^2+n^2y^2+1)^3}$

$$(f_n,\varphi) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{n^2}{(n^2x^2+n^2y^2+1)^3}\,\varphi(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\cancel{n^2}}{(u^2+v^2+1)^3}\cdot\frac{1}{\cancel{n^2}}\cdot\varphi\left(\frac{u}{n},\frac{v}{n}\right)du\,dv =$$

$\left|\begin{matrix} x = \frac{u}{n} \\ y = \frac{v}{n}\end{matrix}\right|$ JAKOBIÁN: $|J_F| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n}\end{vmatrix} = \frac{1}{n^2}$

Věta o substituci: $\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{F^{-1}(M)} (f\circ F)(u,v)\cdot|J_F|\,du\,dv$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(r^2+1)^3}\,r\cdot\varphi\left(\frac{r\cos\varphi}{n},\frac{r\sin\varphi}{n}\right)}_{=:\,g_n(r,\varphi)} dr\,d\varphi$$

substituce do polárních souřadnic: $\left|\begin{matrix} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi\end{matrix}\right|$ $J = r$

+ Fubiniova věta

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{r}{(r^2+1)^3}\cdot\varphi(0,0)\,dr\,d\varphi \overset{F.V.}{=} \varphi(0,0)\cdot\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi\right)}_{2\pi}\cdot\left(\int_0^{\infty}\frac{r}{(r^2+1)^3}\,dr\right)$$

LEBESGUEOVA VĚTA: $\forall r\in[0,\infty)$ $\forall\varphi\in[0,2\pi)$ $\forall n\in\mathbb{N}$: $|g_n(r,\varphi)| \le \underbrace{\frac{r}{(r^2+1)^3}\cdot\max_{\mathbb{R}^2}|\varphi|}_{\in L^1(\mathbb{R}^2)}$

$$= 2\pi\cdot\varphi(0,0)\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\int_1^{\infty}\frac{1}{t^3}\,dt}_{\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^{\infty}} = \pi\cdot\varphi(0,0)\cdot\left(0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\varphi(0,0)$$

$\left|\begin{matrix} r^2+1 = t \\ 2r\,dr = dt\end{matrix}\right|$

tedy $(f_n,\varphi) \to \left(\frac{\pi}{2}\cdot\delta(x,y),\varphi\right)$