RMF - Úlohy z 9. týdne

Temperované distribuce

22. 11. 2024

1) Rozhodněte a zdůvodněte, zda je zobecněná funkce temperovanou distribucí.

a) $\delta_{x_0}(x)$

b) $\operatorname{arctg}(e^x)$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

d) $\frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}$

e) e^{x^2}

f) $e^{\sqrt[3]{x}}$

g) $e^{-\frac{1}{|x|}}$

h) $\frac{e^x}{e^{2x}-4e^x+5}$

i) $2x\, e^{x^2} \cos(e^{x^2})$

j) $\ln|x|$

k) $\ln(1+\sin^2 x)$

l) $e^x \operatorname{arccotg}^2(e^x)$

2) Najděte Fourierův obraz temperované distribuce

$$f(x) = |x|$$

Pro zájemce o teorii pravděpodobnosti:

K Fourierově transformaci: Již víme, že Fourierův obraz integrabilní funkce je spojitá omezená funkce, jejíž limitou v $\pm\infty$ je 0. Jinými slovy, spojitá Fourierova transformace je zobrazení

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$$

Pro diskrétní Fourierovu transformaci to ale platit nemusí. Jak uvidíme na následujících příkladech, Fourierův obraz může být i periodická funkce a tedy její limita v $\pm\infty$ nemusí existovat.

Má-li náhodná veličina X *diskrétní rozdělení* na množině M, její charakteristická funkce je

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k\in M} e^{itk}\, P[X=k],$$

jde tedy o diskrétní Fourierovu transformací pravděpodobnostní funkce.

3) Vypočtěte charakteristickou funkcí následujících veličin.

a) Náhodná veličina udávající, zda při hodu kostkou padne šestka, tedy

$$P[X=1] = \frac{1}{6} \quad \text{a} \quad P[X=0] = \frac{5}{6},$$

tj. n.v. s alternativním rozdělením s parametrem $\frac{1}{6}$.

b) Opilec se vrací domů z hospody a pokouší se odemknout dveře. Má svazek 10 klíčů a pouze jeden je správný. Náhodně vybere jeden klíč a pokusí se odemknout. Pokud je klíč nesprávný, svazek klíčů mu spadne na zem a zapomene, který klíč zkoušel. Zaveďte náhodnou veličinu X udávající počet jeho neúspěšných pokusů než se mu podaří otevřít.

c) V peněžence máme 4 bankovky: 50, 50, 100, 200 euro. Zloděj nám z peněženky náhodně vybere 3 z nich. Zaveďte náhodnou veličinu udávající o kolik nás okradl.

Výsledky: $a)\ \frac{5}{6}+\frac{1}{6}e^{it}$ $\quad b)\ \frac{1}{10-9e^{it}}$ $\quad c)\ \frac{1}{4}e^{200\,it}+\frac{1}{4}e^{300\,it}+\frac{1}{2}e^{350\,it}$

Všimněte si, že všechny tyto funkce splňují $\varphi_X(0)=1$ a také, že jsou periodické, tedy nemají limitu v $\pm\infty$.

4) Ještě příklad na konvoluci: Pořádáme oslavu narozenin v restauraci, na kterou zveme naše kamarády. Jako hostitelé budeme samozřejmě za naše hosty platit účet za jídlo i za nápoje. Celková cena za jídlo X a za nápoje Y jsou náhodné veličiny. Je rozumné předpokládat, že na sobě budou nezávislé (není vždy nutné, aby si host k jídlu objednával i pití a obráceně). Můžeme tuto situaci modelovat spojitě i diskrétně (tj. brát cenu v celých korunách), ale lépe se bude pracovat se spojitým modelem. Dále je rozumné předpokládat rovnoměrné rozdělení ceny (např. vycházíme-li z předpokladu, že za jednoho hosta zaplatíme průměrně 100 Kč za jídlo a 200 Kč za nápoje, pak lze předpokládat, že celková cena za jídlo bude mít rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,100p)$ a za nápoje $(0,200p)$, kde p je počet pozvaných hostů).

Přirozeně nás zajímá celková cena, kolik za hosty můžeme zaplatit, tedy rozdělení veličiny

$$Z = X + Y$$

Připomeňme, že pro dvě nezávislé náhodné veličiny X, Y je hustota náhodné veličiny $Z=X+Y$ dána konvolucí jejich hustot f_X a f_Y, tedy

$$f_Z(t) = (f_X * f_Y)(t) := \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(t-x)\,dx$$

Náhodná veličina má rovnoměrné rozdělení na intervalu (a,b), je-li její hustota

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0 & x \notin (a,b) \end{cases}$$

a) Jaké je rozdělení celkové ceny Z? Parametry si zvolte.

b) Přirozeně nás může zajímat otázka, jaký je modus veličiny Z (tj. hodnota, kde hustota nabývá maxima). V jaké situaci má veličina Z jednoznačně určený modus?