9. minitest RMF

Varianta A

29. 11. 2024

Rozhodněte a podrobně zdůvodněte, zda jsou zobecněné funkce temperovanou distribucí.

$$a)\ f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - e^x + 2} \qquad b)\ g(x) = e^{\frac{x^4}{3x^2+1}}$$

a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^x}{(e^x)^2 - e^x + 2}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{t^2 - t + 2}\,dt =$

$\left| \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x\,dx = dt \end{array} \right|$

$\displaystyle = \int_0^\infty \frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}\,dt = \frac{4}{7}\int_0^\infty \frac{1}{\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)^2 + 1}\,dt$

$\displaystyle = \frac{4}{7}\cdot\left[\frac{\sqrt{7}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)\right]_0^\infty = \underbrace{\frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right)}_{< +\infty}$

tedy $f \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \tilde{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

b) Ukažme, že $\tilde{g} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Zvolme $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{3}x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$\displaystyle (g, \varphi) = \left(e^{\frac{x^4}{3x^2+1}}, e^{-\frac{1}{3}x^2}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{x^4}{3x^2+1} - \frac{1}{3}x^2}\,dx = \infty$

neboť $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x^4}{3x^2+1} - \frac{1}{3}x^2} \overset{\text{VOLSF}}{=} e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x^4 - \frac{1}{3}x^2(3x^2+1)}{3x^2+1}} =$

$\displaystyle = e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-\frac{1}{3}x^2}{3x^2+1}\right)} \overset{2\times \text{L.P.}}{=} e^{-\frac{1}{9}} \neq 0 \Rightarrow$ není splněna nutná podmínka konvergence

9. minitest RMF

Varianta B

29. 11. 2024

Rozhodněte a podrobně zdůvodněte, zda jsou zobecněné funkce temperovanou distribucí.

a) $f(x) = \ln(x^2+1)$ *b)* $g(x) = e^{\sqrt[3]{x^2}}$

a) Zvolme $m=2$ a ukažme, že $\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{|\ln(x^2+1)|}{(1+|x|)^2}\,dx}_{=: I} < +\infty$

$I = 2\cdot\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{(1+x)^2}\,dx$ srovnejme dle LSK s $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} < \infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln(x^2+1)}{(1+x)^2}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}\cdot\ln(x^2+1)}{x^2\cdot\left(\frac{1}{x}+1\right)^2} \overset{\text{VOAL}}{=}$

$= \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x}}}_{0} = \underline{0}$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} < +\infty \Rightarrow \int_1^\infty (\,) < \infty$

a $\int_0^1 (\,) < \infty$ neboť integrand je spojitý na $[0,1]$

$\Rightarrow \exists m\in\mathbb{N}: \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^m}\,dx < +\infty \wedge f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

b) $g(x) = e^{\sqrt[3]{x^2}}$

Zvolme $\varphi(x) = e^{-\sqrt[6]{1+x^4}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

a ukážeme, že $(g, \varphi) = +\infty$, tedy $g \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$(g, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot e^{-\sqrt[6]{1+x^4}}}_{\xrightarrow{x\to\infty} 1 \neq 0} dx = +\infty$$

Ukážeme, že integrand nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

$$\lim_{x\to\infty} e^{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[6]{1+x^4}} \overset{\text{VOLSF}}{=} e^{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[6]{1+x^4}\right)} = e^0 = \underline{1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[6]{1+x^4}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - (1+x^4)}{(x^{\frac{2}{3}})^5 + \dots + (1+x^4)^{\frac{5}{6}}} = 0$$

$$(A - B) \cdot \frac{A^5 + A^4B + A^3B^2 + A^2B^3 + AB^4 + B^5}{-\text{''}-} = \frac{A^6 - B^6}{-\text{''}-}$$

tedy $(g, \varphi) = \infty \Rightarrow g \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$