Zápočtová písemka 13.11.2014

1.(10 bodů) S použitím věty pro záměnu integrálu a řady spočtete

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \ .$$

Výsledek stačí vyjádřit jako součet řady reálných čísel.

2.(15 bodů) Mějme funkci

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{\arctan x \cdot e^x}\, dx \ .$$

A. Určete pro která $a \in \mathbf{R}$ daný integrál konverguje. (5 bodů)

B. Ukažte, že funkce $F(a)$ je spojitá na svém definičním oboru. (7 bodů)

C. Spočtete $\lim\limits_{a\to\infty} F(a)$. (3 body)

3.(15 bodů) Za pomoci věty o prohození derivace a integrálu spočtěte

$$H(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\arctan^2 xb - \arctan^2 xa\right)\, dx \text{ pro } a,b > 0.$$

Podmínkou k udělení zápočtu je získání 20 bodů. Přeji Vám mnoho štěstí.

Zápočtová písemka 13.11.2014

1.(10 bodů) S použitím věty pro záměnu integrálu a řady spočtete

$$\int_0^1 \log x \cdot \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\, dx\ .$$

Výsledek stačí vyjádřit jako součet řady reálných čísel.

2.(15 bodů) Mějme funkci

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\log x \cdot e^x}{e^{ax}+1}\, dx\ .$$

A. Určete pro která $a \in \mathbf{R}$ daný integrál konverguje. (5 bodů)
B. Ukažte, že funkce $F(a)$ je spojitá na svém definičním oboru. (7 bodů)
C. Spočtete $\lim\limits_{a\to\infty} F(a)$. (3 body)

3.(15 bodů) Za pomoci věty o prohození derivace a integrálu spočtěte

$$H(a) = \int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2)}{x^2}\, dx.$$

Za ověření předpokladů pro $a \in (0,\infty)$ a výpočet je 10 bodů. Za ověření předpokladů u 0 a dopočtení integrační konstanty je 5 bodů.

Podmínkou k udělení zápočtu je získání 20 bodů. Přeji Vám mnoho štěstí.

1. Písemka

Používané věty jednoznačně pojmenujte(např. "Lebesgueova věta pro řady" nebo "Věta o derivaci integrálu dle parametru"), nemusíte je formulovat. Musí být patrno, že ověřujete předpoklady a jak to děláte. Jakýkoli netriviální krok nebo dílčí závěr komentujte. K napsání je nutné získat ostře přes polovinu bodů.

1. Vyšetřete limitu posloupnosti integrálů
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(nx)\right)\ln^{-2}(x)dx.$$

2. Vyšetřete spojitost $F(\alpha)=\int_0^\infty f(\alpha,x)dx$,
$$f(\alpha,x)=\frac{x^5}{\cos(x^2)+x^\alpha}.$$

3. Vyšetřete diferencovatelnost $F(\alpha)=\int_1^\infty f(\alpha,x)dx$,
$$f(\alpha,x)=\frac{\sin(\frac{\alpha}{x})}{x}.$$

Určete derivaci na maximální možné množině a za body navíc se pokuste vyjádřit hodnotu $F(\alpha)$ jinak než integrálem.

Zápočtová písemka 19.11.2014

1.(10 bodů) S použitím věty pro záměnu integrálu a řady spočtete

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^{\frac{3}{2}}}\,dx\,.$$

Výsledek stačí vyjádřit jako součet řady reálných čísel.

2.(10 bodů) Mějme funkci

$$F(a)=\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^a}\,dx\,.$$

A. Určete pro která $a \in \mathbf{R}$ daný integrál konverguje. (5 bodů)
B. Ukažte, že funkce $F(a)$ je spojitá na svém definičním oboru. (5 bodů)

3.(10 bodů) Za pomoci věty o prohození derivace a integrálu spočtěte

$$H(a)=\int_0^\infty \frac{e^{ax^4}-1}{xe^{3x^4}}\,dx \text{ pro } a<3.$$

Podmínkou k udělení zápočtu je získání 15 bodů. Přeji Vám mnoho štěstí.

Zápočtová písemka 18.12.2014

1.(10 bodů) Za použití Fubiniho věty (bez použití věty o substituci) spočtěte objem

$$C = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 : 0 < x < 2,\ 0 < y < 2,\ 1 < z < \sqrt{xy}\} \ .$$

Výsledek stačí vyjadřit jako jednorozměný integrál a není potřeba ho dopočítávat.

2.(15 bodů) Spočtěte

$$\int_M \sqrt{2\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}}\, dxdy, \text{ pro } M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 :\ 2\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \le 1\}.$$

3.(15 bodů) Spočtěte objem množiny

$$A = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3 :\ y^2 + z^2 \le 1,\ |x| + z < 4\} \ .$$

Podmínkou k udělení zápočtu je získání 20 bodů. Přeji Vám mnoho štěstí.

Zápočtová písemka 18.12.2014

1.(10 bodů) Za použití Fubiniho věty (bez použití věty o substituci) spočtěte objem

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 : 0 < x < 3,\ 0 < y < 3,\ \sqrt{x+y} < z < 2\}\ .$$

Výsledek stačí vyjadřit jako jednorozměný integrál a není potřeba ho dopočítávat.

2.(15 bodů) Spočtěte

$$\int_M xy\, dxdy,\ \text{pro } M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 :\ (2x^2 + y^2)^2 \le xy\}.$$

3.(15 bodů) Spočtěte objem množiny $A \subset \mathbf{R}^3$ omezené plochami

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0\ .$$

Podmínkou k udělení zápočtu je získání 20 bodů. Přeji Vám mnoho štěstí.

Pátý termín z Teorie Míry a Integrálu - 8.6.2015

Na každý papír napište: 1. Číslo příkladu 2. Jméno 3. Termín zkoušky (řádný, 1.opravný, 2.opravný)

1. (15 bodů) Vyjádřete následující integrál jako součet řady reálných čísel

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} e^{-x}\, dx \ .$$

Tuto řadu nesčítejte.

2. (15 bodů) Vyšetřete pro jaká $a \in \mathbf{R}$ konverguje následující integrál a pro tyto hodnoty ho spočítejte

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^4} - e^{a^3 x^4}}{x}\, dx \ .$$

3. (20 bodů) Spočtěte objem množiny

$$M := \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + 4y^2 + 2z^4 \leq 1, \ xyz < 0\}.$$

Přeji Vám mnoho štěstí.

Zápočtová písemka 7.1.2015

1.(10 bodů) Za použití Fubiniho věty (bez použití věty o substituci) spočtěte objem

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 : 0 < x < 3,\ 0 < y < 3,\ x + y < z < 1\} .$$

Výsledek stačí vyjádřit jako jednorozměný integrál a není potřeba ho dopočítávat.

2.(15 bodů) Spočtěte

$$\int_M \sqrt{x^2 + 3y^2}\, dxdy,\ \text{pro } M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 :\ x^2 + 3y^2 \leq 1\}.$$

3.(15 bodů) Spočtěte objem množiny $A \subset \mathbf{R}^3$ zadané jako

$$A := \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 :\ x^2 + z^2 \leq 1,\ x \leq y \leq z\} .$$

Podmínkou k udělení zápočtu je získání 20 bodů. Přeji Vám mnoho štěstí.

Zápočtová písemka 7.1.2015

1.(10 bodů) Za použití Fubiniho věty (bez použití věty o substituci) spočtěte objem

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 : 0 < x < 3,\ 0 < y < 3,\ x + y < z < 1\} .$$

Výsledek stačí vyjádřit jako jednorozměný integrál a není potřeba ho dopočítávat.

2.(15 bodů) Spočtěte

$$\int_M \sqrt{x^2 + 3y^2}\, dxdy, \text{ pro } M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 :\ x^2 + 3y^2 \leq 1\}.$$

3.(15 bodů) Spočtěte objem množiny $A \subset \mathbf{R}^3$ zadané jako

$$A := \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 :\ x^2 + z^2 \leq 1,\ x \leq y \leq z\} .$$

Podmínkou k udělení zápočtu je získání 20 bodů. Přeji Vám mnoho štěstí.