

Část I

Aplikace metody nejmenších čtverců, transformace souřadnic

1 Úvod

Metoda nejmenších čtverců má v geodézii a v technických vědách vůbec rozsáhlé využití. Přitom princip této metody je velice jednoduchý. Budeme-li v dalším textu hovořit o metodě nejmenších čtverců, budeme mít na mysli nejčastější aplikaci MŇ na vyrovnání zprostředkujících veličin, tedy takových veličin, které je možné vyjádřit funkcí neznámých hledaných parametrů. Zaved' me následující značení a zopakujme základní vztahy příslušející k vyrovnání zprostředkujících parametrů:

$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k)$... vektor skutečných (nepoznatelných) hodnot hledaných neznámých parametrů,
$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$... vektor nejlepších nestranných odhadů hledaných neznámých parametrů (vyrovnané hodnoty),
$\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$... vektor přibližných hodnoty hledaných neznámých parametrů,
$\hat{\mathbf{l}} = (\hat{l}_1, \hat{l}_2, \dots, \hat{l}_n)$... vektor skutečných hodnot zprostředkujících parametrů,
$\bar{\mathbf{l}} = (\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n)$... vektor nejlepších nestranných odhadů hodnot zprostředkujících parametrů,
$\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$... vektor "měřených" hodnot zprostředkujících parametrů,
$d\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0$... přírůstky přibližných hodnot hledaných parametrů,
$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{l}} - \mathbf{l}$... opravy zprostředkujících parametrů,
m_0^{apr}	... počáteční odhad střední chyby zprostředkující veličiny s vahou $p = 1$,
m_0	... odhad střední chyby měření o váze $p = 1$ z oprav zprostředkujících parametrů,
$p_i = \left(\frac{m_{l_i}}{m_0^{apr}}\right)^2$... váha zprostředkujícího parametru se střední chybou m_{l_i} ,
\mathbf{A}	... matice konfigurace
\mathbf{P}	... matice vah.

Pro skutečné hodnoty neznámých a zprostředkujících parametrů platí vztahy

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}^T), \quad (1)$$

kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ je vektor funkčních vztahů. Je přirozené, že stejný požadavek je kladen i na vyrovnané hodnoty a tedy

$$\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}^T) \quad (2)$$

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0^T + d\mathbf{x}^T). \quad (3)$$

Vztah (2) označujeme termínem *rovnice pozorování*. Jednoduchou úpravou dále dostáváme *rovnici oprav*

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}^T) - \mathbf{l} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0^T + d\mathbf{x}^T) - \mathbf{l}. \quad (4)$$

Pro řešení celé úlohy je třeba vztahy \mathbf{f} , které mohou být často velice komplikované, linearizovat. Vytvoříme jejich diferenciály v bodě $(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^k)$ a můžeme psát *rovnici oprav v linearizovaném tvaru*

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0^T) + \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} - \mathbf{l} = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} + \underbrace{(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0^T) - \mathbf{l})}_{\mathbf{l}'} = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{l}'. \quad (5)$$

V případě, kdy $n > k$, není řešení této úlohy jednoznačné. Hledá se potom takové řešení $d\mathbf{x}$, pro které je splněna podmínka $[p v v] = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$, kde \mathbf{P} je matice vah $\mathbf{P} = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Bez

odvození s odkazem na literaturu uvedenou na konci tohoto pojednání můžeme psát pro řešení, které splňuje uvedenou podmínku

$$d\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} l' . \quad (6)$$

Výsledné hodnoty hledaných parametrů jsou potom $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + d\mathbf{x}$. Charakteristiky přesností se získají z kovarianční matice $\mathbf{Q} = m_0^{apr} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$

$$m_i = \sqrt{Q_{ii}} \quad (7)$$

Pro aposteriorní jednotkovou střední chybu dále platí

$$m_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}} = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-k}} \quad (8)$$

a jsou-li správně stanoveny střední chyby zprostředkujících parametrů m_{l_i} , neměla by se její hodnota příliš lišit od počáteční hodnoty m_0^{apr} .

Při aplikaci metody nejmenších čtverců je nezbytné kontrolovat, zda-li provedená linearizace byla dostatečně přesná. Kontrola se provádí dvojným výpočtem oprav, jednou z rovnic oprav (4), tedy přímo dosazením spočtených neznámých do původních vztahů, a podruhé z linearizovaných rovnic (5). V případě, že rozdíly mezi opravami z obou výpočtů přesahují akceptovatelnou mez, je nutno výpočet opakovat s dosazením přesnějších přibližných hodnot hledaných parametrů.

2 Helmertova rovinná transformace

2.1 Transformační rovnice, výpočet parametrů transformace

Termínem *Helmertova rovinná transformace* budeme označovat podobnostní rovinnou transformaci souřadnic bodů v případě, kdy transformační parametry T_X, T_Y, q, ω (viz dále) jsou spočteny pomocí nadbytečného počtu identických bodů.

Podobnostní transformace souřadnic je definována předpisem

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \end{pmatrix} , \quad (9)$$

kde (X, Y) resp. (X', Y') jsou souřadnice v soustavě, ze které resp. do které se transformuje, T_X, T_Y jsou parametry popisující posunutí počátků obou soustav, q je měřítko transformace a ω je úhel, o který jsou obě soustavy vzájemně pootočený. Vzhledem k tomu, že se v rovnicích vyskytují čtyři neznámé parametry, k jejich jednoznačnému určení je potřeba právě čtveřice lineárně nezávislých rovnic a tedy dva identické body. V případě vyššího počtu identických bodů neexistuje jednoznačné řešení a je nutno připojit další dodatečné podmínky (a tedy postupovat například metodou nejmenších čtverců).

V literatuře je často uváděn následující postup hledání neznámých transformačních parametrů. V rovnici (9) je provedena substituce neznámých $q \cos \omega = \lambda_1$, $q \sin \omega = \lambda_2$ a transformační rovnice jsou tak převedeny na jednoduchý lineární tvar

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \end{pmatrix} . \quad (10)$$

Po výpočtu lze snadnou úpravou $\omega = \arctan \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ a $q = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$ získat hodnoty původních parametrů.

Použití tohoto postupu je avšak komplikované v případech, kdy je hodnota některého z parametrů předem známa nebo charakter úlohy vyžaduje fixovat některý parametr na předem dané hodnotě. Například podmínka, že úhel rotace mezi oběma systémy má být roven dané hodnotě ω_0 , znamená připojení

dodatečné podmínky pro λ_1 a λ_2 , $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \tan \omega_0$. Tato podmínka je lineární a lze ji snadno připojit k systému rovnic (10). Jinak je tomu, je-li stanoven požadavek, aby transformace zachovávala měřítko transformace $q = 1$ a kdy podmínka má tvar $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = 1$. Takovou podmínku je nutno linearizovat za přijetí předpokladů o apriorní hodnotě transformačních parametrů.

Jinou možností, které se budeme věnovat podrobněji, je postup, kdy původní transformační parametry nejsou nahrazovány koeficienty λ_1, λ_2 , které nemají nakonec ani jasný geometrický význam. Potom mají rovnice pozorování přímo tvar (9), zprostředkujícími veličinami jsou souřadnice (X'_i, Y'_i) bodů v soustavě, do které se transformuje, neznámé jsou (T_X, T_Y, ω, q) . Vzhledem k tvaru rovnic pozorování je nezbytné provést linearizaci rovnic oprav a k tomu je potřeba zvolit přibližné hodnoty hledaných parametrů $\mathbf{X}_0 = (T_0^X, T_0^Y, \omega_0, q_0)$. Uveďme ještě jednou obecný tvar linearizované rovnice oprav z kapitoly 1

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0^T) + \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} - \mathbf{l} = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} + \underbrace{(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0^T) - \mathbf{l})}_{\mathbf{l}'} = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{l}' . \quad (11)$$

Pro Helmertovu transformaci linearizované rovnice oprav nabývají tvar

$$\begin{pmatrix} v_1^X \\ v_1^Y \\ \hline v_2^X \\ v_2^Y \\ \hline \vdots \\ \hline v_n^X \\ v_n^Y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & q_0(-\sin \omega_0 X_1 + \cos \omega_0 Y_1) & (\cos \omega_0 X_1 + \sin \omega_0 Y_1) \\ 0 & 1 & q_0(-\cos \omega_0 X_1 - \sin \omega_0 Y_1) & (-\sin \omega_0 X_1 + \cos \omega_0 Y_1) \\ \hline 1 & 0 & q_0(-\sin \omega_0 X_2 + \cos \omega_0 Y_2) & (\cos \omega_0 X_2 + \sin \omega_0 Y_2) \\ 0 & 1 & q_0(-\cos \omega_0 X_2 - \sin \omega_0 Y_2) & (-\sin \omega_0 X_2 + \cos \omega_0 Y_2) \\ \hline \vdots \\ \hline 1 & 0 & q_0(-\sin \omega_0 X_n + \cos \omega_0 Y_n) & (\cos \omega_0 X_n + \sin \omega_0 Y_n) \\ 0 & 1 & q_0(-\cos \omega_0 X_n - \sin \omega_0 Y_n) & (-\sin \omega_0 X_n + \cos \omega_0 Y_n) \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} dT^X \\ dT^Y \\ d\omega \\ dq \end{pmatrix} +$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} T_0^X + q_0(\cos \omega_0 X_1 + \sin \omega_0 Y_1) \\ T_0^Y + q_0(-\sin \omega_0 X_1 + \cos \omega_0 Y_1) \end{array} \right) \\ \hline \left(\begin{array}{c} T_0^X + q_0(\cos \omega_0 X_2 + \sin \omega_0 Y_2) \\ T_0^Y + q_0(-\sin \omega_0 X_2 + \cos \omega_0 Y_2) \end{array} \right) \\ \hline \vdots \\ \hline \left(\begin{array}{c} T_0^X + q_0(\cos \omega_0 X_n + \sin \omega_0 Y_n) \\ T_0^Y + q_0(-\sin \omega_0 X_n + \cos \omega_0 Y_n) \end{array} \right) \end{pmatrix}}_{\mathbf{l}'} - \begin{pmatrix} X'_1 \\ Y'_1 \\ \hline X'_2 \\ Y'_2 \\ \hline \vdots \\ \hline X'_n \\ Y'_n \end{pmatrix} . \quad (12)$$

Vztah (12) lze zjednodušit, zavedou-li se přibližné hodnoty posunů $T_0^X = T_0^Y = 0$. To je možné, neboť kvalita linearizace rovnic oprav nezávisí na zvolených přibližných hodnotách posunů. Dostáváme

tak rovnice, lišící se ve vektoru neznámých a redukovaném vektoru pozorování l'

$$dx = \begin{pmatrix} T^X \\ T^Y \\ d\omega \\ dq \end{pmatrix}, \quad l' = \begin{pmatrix} q_0(\cos \omega_0 X_1 + \sin \omega_0 Y_1) - X'_1 \\ q_0(-\sin \omega_0 X_1 + \sin \omega_0 Y_1) - Y'_1 \\ q_0(\cos \omega_0 X_2 + \sin \omega_0 Y_2) - X'_2 \\ q_0(-\sin \omega_0 X_2 + \sin \omega_0 Y_2) - Y'_2 \\ \vdots \\ q_0(\cos \omega_0 X_n + \sin \omega_0 Y_n) - X'_n \\ q_0(-\sin \omega_0 X_n + \sin \omega_0 Y_n) - Y'_n \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Další postup je již standardní podle metody nejmenších čtverců. Naprosto **nezbytnou** kontrolou je dvojnásobný výpočet oprav. V tomto případě jde o kontrolu, zda-li provedená linearizace je dostatečně přesná.

Výhodou tohoto postupu je, že je zcela obecný a získáváme přímo hodnoty transformačních parametrů ω, q a to včetně jejich charakteristik přesnosti (není nutno provádět transformaci výsledné kovarianční matice). Navíc vypuštění některého ze sloupců matice \mathbf{A} odpovídá případu, kdy hodnotu příslušného parametru fixujeme na jeho apriorní hodnotě. Tedy například vypuštěním čtvrtého sloupce, fixujeme hodnotu q na hodnotě q_0 použité při výpočtu prvků vektoru l' . Samozřejmě se mění i rozměr vektoru neznámých dx .

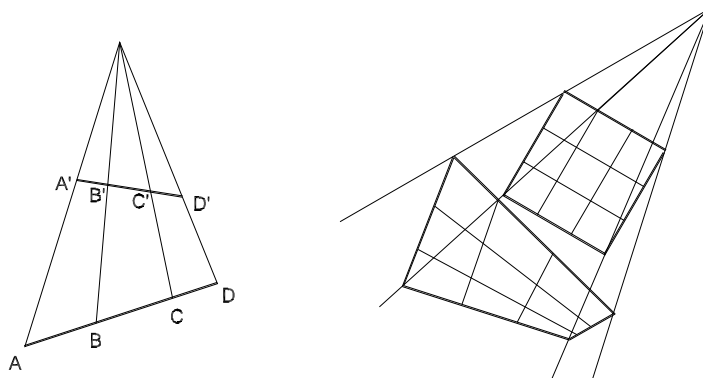
2.2 Vlastnosti a aplikace Helmertovy transformace

Helmertova transformace je transformací konformní, nedochází ke zkreslení křivosti křivek (tedy přímka je opět zobrazena jako přímka), dochází pouze k pootočení, posunu a změně měřítka.

Aplikací v geodézii je mnoho, ať již jde o ztotožnění měřických sítí měřených v několika etapách a nebo transformace mapových listů. Je třeba si uvědomit, že tato transformace je schopna ztotožnit pouze dvojici bodů a je-li identických bodů více, zůstanou na nich po transformaci residua v^X, v^Y . Je dobré testovat, zda-li systémy, mezi kterými je transformace prováděna, nejsou vůči sobě v jiném než podobnostním vztahu a zda-li není vhodnější použít jiný typ transformace.

3 Kolineární transformace

3.1 Transformační rovnice, vlastnosti



Obrázek 1: Kolineární transformace, vznik obrazu

Transformace kolineární (nebo také projektivní) je známá především z fotogrammetrie. Jde o transformaci, kdy obraz bodu je pomocí středového promítání zobrazen z jedné roviny na druhou. Trans-

formační rovnice jsou

$$X = \frac{ax + by + c}{gx + hy + 1}, \quad Y = \frac{dx + ey + f}{gx + hy + 1}, \quad (14)$$

kde (x, y) jsou souřadnice ve výchozí, respektive (X, Y) ve výsledné soustavě (v rovině).

Tato transformace není konformní, měřítko není konstantní, zachovává tzv. dvojpoměr v rámci čtveřice bodů ležících na přímce, tedy (viz obrázek 1)

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \dots = konst. .$$

Dochází ke zkreslení křivosti. Přímky se zobrazují opět jako přímky. Přímky rovnoběžné v originále po transformaci směřují do společného bodu (úběžníku).

Pro určení osmi neznámých koeficientů (a, b, c, d, e, f, g, h) je potřeba nejméně čtyř identických bodů v obou soustavách. Projektivní transformace tak ztotožňuje rohy čtyřúhelníka v obou rovinách. Navíc můžeme upustit od představy dvojice rovin a projekci uvažovat jako transformaci mezi dvěma soustavami v rovině jedné.

Vzhledem k tomu, že vztahy jsou lineární, je výpočet parametrů triviální. Transformační rovnice (14) lze přepsat do tvaru (pro čtyři identické body)

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1 X_1 & -y_1 X_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1 Y_1 & -y_1 Y_1 \\ x_2 & y_2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -x_2 X_2 & -y_2 X_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 & -x_2 Y_2 & -y_2 Y_2 \\ x_3 & y_3 & 3 & 0 & 0 & 0 & -x_3 X_3 & -y_3 X_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 & -x_3 Y_3 & -y_3 Y_3 \\ x_4 & y_4 & 4 & 0 & 0 & 0 & -x_4 X_4 & -y_4 X_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & y_4 & 1 & -x_4 Y_4 & -y_4 Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} \quad (15)$$

a parametry transformace získáme potom prostou inverzí.

V případě, kdy je identických bodů nadbytečný počet, je možné parametry určovat metodou nejmenších čtverců, přičemž opravy v^X, v^Y jsou přiřazovány souřadnicím (X, Y) ve výsledné soustavě. Linearizace rovnic oprav vyžaduje stanovení přibližných hodnot parametrů $(a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0)$ spočtených postupem popsáním v předchozím odstavci. Při zavedení substitucí

$$\begin{aligned} D_0^i &= g_0 x^i + h_0 y^i + 1 \\ X_0^i &= \frac{a_0 x^i + b_0 y^i + c_0}{D_0^i} \\ Y_0^i &= \frac{d_0 x^i + e_0 y^i + f_0}{D_0^i} \\ dh &= \left(da \quad db \quad dc \quad dd \quad de \quad df \quad dg \quad dh \right)^T \end{aligned}$$

nabývají linearizované rovnice oprav tvar

$$\begin{pmatrix} v_X^i \\ v_Y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_i}{D_0^i} & \frac{y_i}{D_0^i} & \frac{1}{D_0^i} & 0 & 0 & 0 & -\frac{X_0^i}{D_0^i} x^i & -\frac{Y_0^i}{D_0^i} x^i \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_i}{D_0^i} & \frac{y_i}{D_0^i} & \frac{1}{D_0^i} & -\frac{X_0^i}{D_0^i} x^i & -\frac{Y_0^i}{D_0^i} x^i \end{pmatrix} dh + \begin{pmatrix} X_0^i - X^i \\ Y_0^i - Y^i \end{pmatrix}. \quad (16)$$

3.2 Použití kolineární transformace

Použití v geodézii je opět všestranné, všude tam, kde jsou očekávány rozdíly mezi oběma systémy způsobené složitějšími vztahy než je rotace, posunutí a změna měřítka.

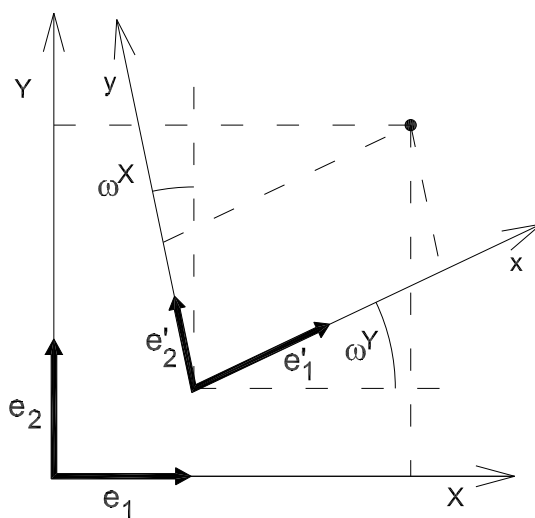
Klasickou aplikací je transformace dat pořízených fotogrammetricky. Příkladem může být transformace snímkových souřadnic bodů fotografie rovinné fasády (a podobné další). Obraz bodů, které leží v rovině snímaného objektu, vznikl právě projektivní transformací a tedy souřadnice (vzhledem k tomu, že rovina snímku a rovina objektu nejsou obecně rovnoběžné) jsou deformovány. Pomocí identických bodů lze transformovat souřadnice všech bodů tak, aby odpovídaly záběru kolmému k rovině objektu, nebo-li obnovit původní rovinné souřadnice.

Podobnou aplikací může být transformace mapového listu pomocí křížků pravidelné čtvercové sítě. Deformací papíru (fólie) mapy, špatným zákresem, případně i špatným scannováním mapy dojde k porušení pravidelné sítě křížků i zákresu obsahu mapy. Je nasnadě, v rámci každého čtverce vymezeného rohovými křížky vypočítat transformační klíč (bez vyrovnání) projektivní transformace a kresbu uvnitř tohoto čtverce tímto klíčem transformovat. Tímto postupem se obnoví v rámci celého listu pravidelná čtvercová síť. Problémem takto pojaté transformace je nespojitost zobrazení na hranici jednotlivých transformačních oblastí. Projektivní transformace bodu ležícímu přesně na hranici obou oblastí přiřadí dvojí souřadnice z každého použitého klíče (obě nové polohy bodu jsou sice na téže přímce spojující obrazy rohových bodů, ale “staničení” je různé). Je tedy třeba vždy posoudit, zda-li tento rozpor přesahuje akceptovatelnou mez.

4 Afinní transformace

4.1 Vlastnosti, rovnice zobrazení

Afinní transformace je speciálním případem transformace kolineární. V tomto případě je bod promítání umístěn do nekonečna a tedy body jsou promítány rovnoběžnými paprsky. Konstantní dělicí dvojpoměr přechází v konstantní dělicí poměr, úběžníky jsou v nekonečnu a tedy rovnoběžky v originále zachovávají rovnoběžnost, přímky se zobrazují opět jako přímky. Protože dělicí poměr je konstantní, transformace dává jednoznačné výsledky i na hraniční čáře mezi dvěma transformačními oblastmi.



Obrázek 2:

Transformační rovnice mají následující tvar

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T^X \\ T^Y \end{pmatrix} . \quad (17)$$

Z rovnic je patrné, že vzájemná poloha souřadných os odpovídá obrázku 2, výsledný souřadný systém předpokládáme pravouhlý.

Lze poměrně snadno dokázat, že transformační koeficienty $(r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22})$ je možné zapsat pomocí úhlů sevřených mezi osami a pomocí měřítka ve směru jednotlivých os. Rovnice transformace mají potom tvar

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^X \cos \omega^X & -q^Y \sin \omega^Y \\ q^X \sin \omega^X & q^Y \cos \omega^Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T^X \\ T^Y \end{pmatrix} . \quad (18)$$

Protože důkaz je velice stručný a zřejmý, hned jej provedeme. V obou systémech existuje vektorová báze. Ve výsledném systému, který je ortonormální, ji tvoří vektory $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, v systému výchozím potom $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$, přičemž pro normy vektorů báze platí $\|\mathbf{e}'_1\| = q^X$, $\|\mathbf{e}'_2\| = q^Y$. Pro libovolný vektor \mathbf{a} o souřadnicích (X, Y) respektive (x, y) musí platit

$$X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 = x\mathbf{e}'_1 + y\mathbf{e}'_2 + \mathbf{t}$$

Postupným skalárním vynásobením rovnice vektorem \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_2 dostáváme vztahy pro souřadnice X, Y (vzhledem k tomu, že báze $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ je ortonormální platí $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$, $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1$)

$$\begin{aligned} X &= x(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_1) + y(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_1) + (\mathbf{t}, \mathbf{e}_1) \\ Y &= x(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_2) + y(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_2) + (\mathbf{t}, \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} X &= x \cdot q^X \cos \omega^X - y \cdot q^Y \sin \omega^Y + T^X \\ Y &= x \cdot q^X \sin \omega^X - y \cdot q^Y \cos \omega^Y + T^Y . \end{aligned}$$

Důkaz je hotov.

Z rovnice (17) je patrné, že existuje šest parametrů afinní transformace a tedy pro jejich jednoznačné určení jsou nezbytné tři identické body. Vypočet je triviální pomocí soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ Y^1 \\ X^2 \\ Y^2 \\ X^3 \\ Y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^X \\ T^Y \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{21} \\ r_{22} \end{pmatrix} . \quad (19)$$

V případě většího počtu identických bodů lze opět počítat metodou nejmenších čtverců. Úpravou transformačních rovnic (17) snadno získáme rovnice oprav přímo v lineárním tvaru (pro jeden bod)

$$\begin{pmatrix} v_i^X \\ v_i^Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_i & -y_i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_i & y_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^X \\ T^Y \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{21} \\ r_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} . \quad (20)$$

4.2 Aplikace afinní transformace

Nejčastějším případem aplikace afinní transformace v geodézii je transformace mapových listů pomocí křížků pravidelné kilometrové sítě. Většinou se postupuje tak, že pro dané území je spočten jeden transformační klíč z maximálního množství křížků (identických bodů) metodou nejmenších čtverců. Je tak zohledněna především různá srážlivost papíru v kolmých směrech. Nicméně protože je pro výpočet klíče použit nadbytečný počet identických bodů, zůstávají po transformaci na mapových křížcích residua.

Další možností je provádět transformaci podobným způsobem jako v případě transformace kolineární a tedy počítat klíč pro každou trojici křížků. Tedy dané území se rozdělí na trojúhelníkové transformační oblasti, pro které platí vlastní transformační klíč. Narozdíl od transformace kolineární nevznikne nespojitost zobrazení na stykové čáře, neboť výsledné souřadnice hraničních bodů spočtené pomocí obou klíčů jsou totožné, ale vládně zde jistá libovůle volby transformační oblasti. Uvažujeme-li čtveřici křížků mapového listu, potom můžeme vytvořit dvě trojúhelníkové transformační oblasti dvojím způsobem - území lze rozdělit úhlopříčkou směřující z horního levého rohu k dolnímu pravému a nebo uhlopříčkou druhou. V obou případech dostáváme jiné souřadnice všech pretransformovaných bodů.

5 Prostorová Helmertova transformace

5.1 Transformační rovnice

Prostorovou Helmertovou transformací rozumíme transformaci souřadnic bodů mezi dvěma pravouhlými prostorovými souřadnými soustavami, které se liší natočením os, polohou počátku a měřítkem. Rotaci mezi oběma systémy lze popsat postupnými rotacemi kolem všech tří souřadných os. Transformační rovnice tedy zapíšeme

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = q \cdot \mathbf{R}^X(\alpha) \cdot \mathbf{R}^Y(\beta) \cdot \mathbf{R}^Z(\gamma) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T^X \\ T^Y \\ T^Z \end{pmatrix} = q \cdot \mathbf{R} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T^X \\ T^Y \\ T^Z \end{pmatrix} \quad (21)$$

kde q je měřítko transformace, $\mathbf{R}^i(\omega)$ jsou matice rotace podle jednotlivých souřadných os a $(T^X, T^Y, T^Z)^T$ je vektor posunu počátku souřadné soustavy. Pro matice rotací platí

$$\mathbf{R}^X(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}^Y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{R}^Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

V rovnicích vystupuje sedm neznámých parametrů a tedy pro jednoznačné určení stačí právě sedm lineárně nezávislých rovnic. To znamená, že v extrémním případě k určení transformačního klíče postačují tři identické body s tím, že u jednoho z bodů je dána pouze jedna souřadnice v obou systémech. Ve většině případů jsou ale k dispozici tři a více identických bodů se všemi známými souřadnicemi.

5.2 Výpočet parametrů pomocí MNČ

Protože jsou k dispozici většinou minimálně tři identické body, tak i základní výpočet je nutno korektně počítat pomocí MNČ, neboť k dispozici je devět a více rovnic oproti sedmi neznámým parametrům. K tomu je nezbytné sestavit zlinearizované rovnice oprav a tedy vypočítat diferenciály prvního řádu

rovníc (21) podle jednotlivých neznámých $(T^X, T^Y, T^Z, q, \alpha, \beta, \gamma)^T$. Diferenciál zapíšeme následujícím způsobem

$$\begin{pmatrix} dX' \\ dY' \\ dZ' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dT^X \\ dT^Y \\ dT^Z \end{pmatrix} + \mathbf{R}_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} dq + q_0 \begin{pmatrix} \mathbf{D}_\alpha & \mathbf{D}_\beta & \mathbf{D}_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\alpha \\ d\beta \\ d\gamma \end{pmatrix}, \quad (23)$$

kde pro sloupcové vektory \mathbf{D}_i derivací jednotlivých souřadnic podle rotačních úhlů platí

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\alpha &= \frac{d\mathbf{R}^X(\alpha_0)}{d\alpha} \cdot \mathbf{R}^Y(\beta_0) \cdot \mathbf{R}^Z(\gamma_0) \cdot \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}^T \\ \mathbf{D}_\beta &= \mathbf{R}^X(\alpha_0) \cdot \frac{d\mathbf{R}^Y(\beta_0)}{d\beta} \cdot \mathbf{R}^Z(\gamma_0) \cdot \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}^T \\ \mathbf{D}_\gamma &= \mathbf{R}^X(\alpha_0) \cdot \mathbf{R}^Y(\beta_0) \cdot \frac{d\mathbf{R}^Z(\gamma_0)}{d\gamma} \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}^T, \end{aligned}$$

$(q_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ jsou přibližné hodnoty parametrů a \mathbf{R}_0 je rotační matice spočtená pomocí těchto přibližných hodnot. Pro parametry (T^X, T^Y, T^Z) není přibližné hodnoty parametrů potřeba stanovovat a lze je tedy přímo počítat.

Sestavit z uvedených rovnic matici \mathbf{A} je již snadné. Redukovaný vektor měření l' má přitom tvar

$$l' = q_0 \cdot \mathbf{R}_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}. \quad (24)$$

5.3 Výpočet přibližných hodnot transformačních parametrů

Pro výpočet prvků matice \mathbf{A} a vektoru l' je nutno znát přibližné hodnoty transformačních parametrů. Tento problém se u transformací často řeší tak, že se v prvním kroku dosadí nulové rotační úhly a měřítko rovno 1. Vyrovnané parametry se dosadí za přibližné do dalšího výpočtu a pokračuje se tak dlouho, dokud výsledek dvojího výpočtu oprav není uspokojivý. Bohužel v případě prostorové transformace u některých reálných příkladů tento postup selhává a proces nekonverguje k žádnému výsledku (ba dokonce se může stát, že součet $[p_{vv}]$ dokonverguje k jinému, lokálnímu minimu!). Proto je nutné nalézt postup, pomocí kterého se přibližné parametry spočtou. Situace je v tomto případě oproti rovinné transformaci mnohem složitější. V rovinném případě se použije substituce λ_1, λ_2 (viz příslušná kapitola) a rovnice přejdou na lineární tvar. Zde je matice \mathbf{R} velmi komplikovaná. Protože budeme matici v dalším textu potřebovat, uvedeme na tomto místě její tvar

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Lze dokázat, že matice \mathbf{R} je ortonormální a tedy platí $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{E}$.

Ukazuje se, že výpočet přibližných hodnot transformačních parametrů lze rozdělit na dva případy. Každému se budeme v věnovat v samostatné pasáži.

5.3.1 Výpočet přibližných hodnot pomocí čtveřice identických bodů

Případ, kdy jsou k dispozici čtyři identické body a tedy celkem 12 souřadnic, je poměrně jednoduchý. Jeden z možných způsobů jak spočítat transformační parametry je následující.

Pro matici $q\mathbf{R}$ zavedeme substituci pomocí r_{ij} , rovnice transformace přejde v tvar

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} T^X \\ T^Y \\ T^Z \end{pmatrix}. \quad (26)$$

V rovnici vystupuje 12 neznámých a k dispozici je právě 12 rovnic (zde pouze rovnice pro jeden bod)

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X & Y & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z & Y & Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^X \\ T^Y \\ T^Z \\ r_{11} \\ r_{12} \\ \vdots \\ r_{33} \end{pmatrix} \quad (27)$$

Vyřešením této soustavy dostáváme všechny prvky matice $q\mathbf{R}$. Vzhledem k tomu, že souřadnice bodů v obou systémech se liší nejenom směrem souřadných os, ale i vlivem různých chyb (v geodézii transformujeme většinou měřené souřadnice), tak výsledná přibližná matice $q\mathbf{R}$ není přesně ortogonální, přesněji řečeno, nejedná se vůbec o matici rotace. Avšak tento fakt nijak nebrání výpočtu rotačních úhlů z jednotlivých prvků. Při znalosti tvaru (25) matice \mathbf{R} (pozor, zde je matice přenásobena měřítkem q) se rotační úhly spočtou jako

$$\begin{aligned} \beta &= \arcsin \frac{-r_{13}}{q} \\ \alpha &= \arctan \frac{r_{23}}{r_{33}} \\ \gamma &= \arctan \frac{r_{12}}{r_{11}}, \end{aligned} \quad (28)$$

příčemž q získáme z poměru délek vektorů v obou systémech. Je zajímavé, že při výpočtu úhlu β není nutné "hlídat" kvadranty. U ostatních úhlů již samozřejmě ano (tedy je lepší používat funkci $\arctan2$, která se vyskytuje takřka ve všech matematických programech).

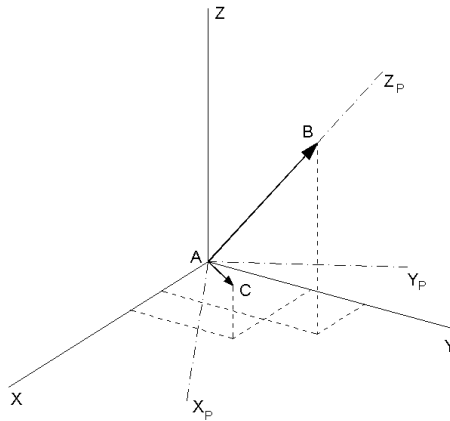
5.3.2 Výpočet přibližných hodnot pomocí trojice identických bodů

Tento případ navíc zkomplikujeme tak, že k dispozici jsou dány dva body všemi souřadnicemi, v případě třetího bodu, je dána souřadnice pouze jedna. Samozřejmě v obou systémech. Je tedy znám právě nutný počet souřadnic pro určení parametrů transformace.

Použití substitucí r_{ij} z minulého části dává 12 neznámých (včetně parametrů translace). Z vlastnosti matice \mathbf{R} , která je ortonormální a tedy $q\mathbf{R}^T q\mathbf{R} = q^2 \mathbf{E}$ navíc vyplývá dalších 6 podmínek a také jedna neznámá q . Tedy celkem je 7 rovnic a 6 podmínek (celkem 13) a zároveň 13 neznámých (posunutí, měřítko a prvky matice \mathbf{R}). Systém je tedy jednoznačně řešitelný. Avšak podmínky již nejsou lineární a řešení takového systému je s největší pravděpodobností komplikované. Proto je možná snazší k řešení problému přistoupit geometricky.

Označme zadané identické body písmeny A, B, C , přičemž bod C má dānu pouze jednu souřadnici X . Uveď me pro úplnost, že další uvedený postup je obecný v tom smyslu, že nezáleží na tom, která ze souřadnic je zadána. A zajisté mohou být zadány i ostatní souřadnice.

Věnujme se postupně výpočtu jednotlivých parametrů. Nejsnazší je výpočet měřítka q , získá se z poměru délek vektorů AB a $A'B'$ v jednom a druhém systému. Vztáhneme-li souřadnice bodů v obou systémech k bodu A (resp. A') a tedy ztotožníme počátky obou soustav, přejde transformační vztah v čistě rotační.



Obrázek 3:

Souřadnice bodu A jsou v takto redukovaném systému nulové $A_R = (0, 0, 0)$, souřadnice bodů B a C jsou souřadnicemi vektoru $B_R = \vec{AB}$ a $C_R = \vec{AC}$. Stejně tak i v druhém systému. Platí

$$\mathbf{X}'_R = \mathbf{qR}\mathbf{X}_R$$

a úkolem je spočítat rotační matici \mathbf{R} . Postupovat lze tak, že tuto matici rozložíme v několik postupných rotací kolem jednotlivých os tak, aby výsledně došlo ke ztotožnění souřadných os. Představit si a realizovat rotace mezi vůči sobě obecně postavenými systémy je komplikované (ne-li přímo nemožné) a proto se nabízí možnost postupovat přes vhodný pomocný souřadný systém, do kterého mohou být jednotlivě obě soustavy transformovány a tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_P &= \mathbf{R}_1 \mathbf{X}_R \\ \mathbf{X}_P &= \mathbf{R}_2 \mathbf{X}'_R \end{aligned}$$

Výpočet matice celkové rotace je potom jednoduchý

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1 . \quad (29)$$

Vhodných pomocných soustav je mnoho, zvolme jednu takovou. Osa Z_P má totožný směr s vektorem \vec{AB} a vektor \vec{AC} leží v rovině $Y_P Z_P$, počátek je v bodě A . Důsledkem toho souřadnice x, y vektoru \vec{AB} jsou nulové a stejně jako souřadnice x vektoru \vec{AC} . Transformace redukovaných souřadnic \mathbf{X}_R a \mathbf{X}'_R do tohoto systému se provede pomocí trojice rotací kolem souřadných os.

Nejprve ztotožnění vektoru \vec{AB} s osou Z_P . Jedna z možností (viz obrázek) je otočit souřadnou soustavu kolem osy Z tak, aby vektor \vec{AB} ležel v rovině XZ nového systému a potom provést další rotaci kolem osy Y , tak aby osa Z byla totožná s vektorem. V prvním kroku tedy hledáme takovou matici rotace \mathbf{R}_X aby platilo (zjednodušená symbolika)

$$\begin{pmatrix} X' \\ 0 \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

a tedy

$$0 = Y \cos \omega + Z \sin \omega .$$

Tato rovnice o jedné neznámé je jistě řešitelná. Podobně v druhém kroku (to je již souřadnice Y nulová) hledáme takový úhel ω , pro který platí

$$\begin{pmatrix} 0 \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 0 \\ Z' \end{pmatrix} .$$

Po provedení těchto dvou rotací je ztotožněn vektor \vec{AB} s osou Z_P . Zbývá zaručit, aby vektor \vec{AC} ležel v rovině $Y_P Z_P$. To odpovídá situaci, kdy souřadnice x vektoru je nulová a postupujeme již popsaným způsobem, kdy hledáme takový úhel rotace kolem osy Z , aby rovnost byla splněna.

Výsledně tedy každá z matic $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ se skládá ze tří postupných rotací. Po výpočtu matice \mathbf{R} podle vztahu (29) se spočtou hodnoty celkových rotací podle vztahů (28) již zmíněným postupem.

Konečně výpočet parametrů translace se již jednoduchý

$$\begin{pmatrix} T^X \\ T^Y \\ T^Z \end{pmatrix} = q \cdot \mathbf{R} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Reference

- [Böhm, 1966] Böhm, .: Vyšší geodézie II, Souřadnicové soustavy, SNTL, Praha, 1966
- [Böhm, 1983] Böhm, J., Hora, L., Kolenatý, E.: Vyšší geodézie - díl 2, ČVUT, Praha, 1983
- [Böhm et al., 1983] Böhm, J., Radouch, V., Hampacher, M.: Teorie chyb a vyrovnávací počet, GKP Praha, Praha, 1990
- [Cimbálník et al., 1997] Cimbálník, M., Mervart, L.: Vyšší geodézie II, ČVUT, Praha, 1997
- [Demlová et al., 1997] Demlová, M., Nagy, J.: Algebra, SNTL, Praha, 1985
- [Hofmann-Wellenhof et al., 1992] Hofmann-Wellenhof, B., H. Lichtenegger, J. Collins: Global Positioning System, Theory and Practice, Springer-Verlag, Wien, New York, 1992
- [Mervart et al., 1997] Mervart, L., Cimbálník, M.: Vyšší geodézie II, ČVUT, Praha, 1997