LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 3. ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY A SPECIÁLNÍ PRAVOU STRANOU - KVAZIPOLYNOM

$$y''' + y' = 2x + 1 + \cos x$$

1. ŘEŠENÍ HOMOGENNÍ ROVNICE : $y''' + y' = 0$

CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE JE $\lambda^3 + \lambda = 0$

$$\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\underline{\lambda = 0} \vee \underline{\lambda = \pm i}$$

FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM HOMOGENNÍHO ŘEŠENÍ TVOŘÍ VŽDY FUNKCE VE TVARU „$e^{\lambda x}$" V PŘÍPADĚ JEDNONÁSOBNÝCH KOŘENŮ λ

TEDY FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM TVOŘÍ : e^{0x}, $\sin x$, $\cos x$

NEBOŤ PLATÍ : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

HOMOGENNÍM ŘEŠENÍM TEDY JE $y_h = c_1 \cdot 1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x$,

KDE $c_1, c_2, c_3 \in R$

2. PRAVÁ STRANA JE SOUČTEM DVOU KVAZIPOLYNOMŮ $q_1 + q_2$

$q_1(x) = 2x + 1$

$q_2(x) = \cos x$

KVAZIPOLYNOM JE FUNKCE VE TVARU :

$$e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$$

=> PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ BUDE SOUČTEM $y_{p_1} + y_{p_2}$ PRO q_1, q_2

1) $\underline{y''' + y' = 2x + 1}$

- JE ČÍSLO $a \pm ib$ KOŘENEM CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE ?
- $a \pm ib = 0$ → ANO, JE TO JEDNONÁSOBNÝ KOŘEN CHAR. ROVNICE,

PROTO BUDEME HLEDAT PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ VE TVARU:

$$y_{p_1} = (ax + b)\cdot x^1$$

→ NÁSOBNOST 0 JAKOŽTO KOŘENE CHARAKTERISTICKÉHO POLYNOMU

$$y_{p_1} = ax^2 + bx \;;\; y'_{p_1} = 2ax + b,\; y''_{p_1} = 2a \;;\; y'''_{p_1} = 0$$

DOSAZENÍM DO ROVNICE → $\underline{2a}x + \underline{b} = \underline{2}x + \underline{1}$ $a = 1$, $b = 1$

PROTO $y_{p_1} = x^2 + x$

2) $\underline{y''' + y' = \cos x}$

- $a \pm ib = \pm i$ JE KOŘENEM CHARAKTERISTICKÉHO POLYNOMU

PROTO BUDEME PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ HLEDAT VE TVARU :

$$y_{p_2} = (A\cdot\cos x + B\cdot\sin x)\cdot x$$

$$y_{p_2} = Ax\cos x + Bx\sin x$$

$$y'_{p_2} = A\cos x + Ax(-\sin x) + B\sin x + Bx\cos x$$

$$y''_{p_2} = -A\sin x + A\cdot(-\sin x) + Ax\cdot(-\cos x) + B\cos x$$
$$+ B\cos x + Bx\cdot(-\sin x)$$

$$y'''_{p_3} = -A\cos x\cdot 2 + 2B(-\sin x) + A(-\cos x) + Ax(\sin x)$$
$$+ B\cdot(-\sin x) + Bx(-\cos x)$$
$$= -3A\cos x - 3B\sin x + Ax\sin x + Bx(-\cos x)$$

$$-3A\cos x - 3B\sin x + Ax\sin x - Bx\cos x + Ax\cos x + Bx\sin x = \cos x$$

$$-3A\cos x - 3B\sin x + Ax\sin x - Bx\cos x + A\cos x - Ax\sin x + B\sin x$$
$$+ Bx\cos x = 1\cos x + 0\sin x$$

$$-3A + A = 1$$
$$-3B + B = 0$$

$$A = -\frac{1}{2}$$
$$B = 0$$
$$\Rightarrow y_{p_2} = -\frac{x}{2}\cos x$$

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2}$$

$$\boxed{y = c_1 + c_2\sin x + c_3\cos x + x^2 + x - \frac{x}{2}\cos x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in R$$

→ AFINNÍ PROSTOR FUNKCÍ DIMENZE 3

$$-y'' + 5y' - 6y = -4\sin(2x) - 32\cos(2x)$$

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY A SPECIÁLNÍ PRAVOU STRANOU VE TVARU KVAZIPOLYNOMU:

$$„ e^{ax}\cdot\left(P_n(x)\cdot\sin(bx) + Q_m(x)\cdot\cos(bx)\right) “$$

1) HOMOGENNÍ ROVNICE: $-y'' + 5y' - 6y = 0$

$$-\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$$
$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$
$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$\Rightarrow$ KOŘENY CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE JSOU $\underline{\lambda_1 = 2}$ A $\underline{\lambda_2 = 3}$

FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM TVOŘÍ FUNKCE $e^{2x}; e^{3x}$

ŘEŠENÍM HOMOGENNÍ ROVNICE JE: $y_h = c_1\cdot e^{2x} + c_2\cdot e^{3x}$, KDE $c_1, c_2 \in R$

$\rightarrow$ PROSTOR FUNKCÍ DIMENZE 2

2) V JAKÉM TVARU BUDEME HLEDAT PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ?

• PODÍVÁM SE NA ČÍSLO „$a \pm ib$“ $\rightarrow$ PRO NÁŠ KVAZIPOLYNOM JE TO $\pm 2i$

$\rightarrow$ ČÍSLO $2i$ <u>NENÍ</u> KOŘENEM CHAR. ROVNICE $\sim$ „JE KOŘENEM NÁSOBNOSTI NULA“

PROTO BUDEME PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ HLEDAT V PODOBNÉM TVARU JAKO BYLA PRAVÁ STRANA: $\boxed{y_p = A\cdot\sin 2x + B\cdot\cos 2x}$; KDE $A, B \in R$

• $\underline{A, B}$ JSOU TEDY ČÍSLA $\equiv$ POLYNOMY 0. STUPNĚ; KTERÁ CHCEME NAJÍT:

$$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$$
$$y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$$

DOSADÍME DO ROVNICE: $-y'' + 5y' - 6y = -4\sin 2x - 32\cos 2x$

TEDY: $$\underbrace{4A\sin 2x + 4B\cos 2x}_{-y''} + \underbrace{5(2A\cos 2x - 2B\sin 2x)}_{+5y'} \underbrace{- 6(A\sin 2x + B\cos 2x)}_{-6y}$$

$$= -2A\sin 2x - 2B\cos 2x + 10A\cos 2x - 10B\sin 2x = -4\sin 2x - 32\cos 2x$$

KOEFICIENTY u $\sin 2x$: $-2A - 10B = -4 \quad |\cdot 5$

u $\cos 2x$: $-2B + 10A = -32$ $\quad (+)$

$\rightarrow$ SOUSTAVA 2 ROVNIC O 2 NEZNÁMÝCH

$$-52B = -52$$
$$\boxed{B = 1}$$

$$-2A = 6$$
$$\boxed{A = -3}$$

PARTIKULÁRNÍM ŘEŠENÍM JE: $y_p = -3\sin 2x + \cos 2x$

TEDY CELKOVÉ ŘEŠENÍ $y = (\text{HOMOGENNÍ ŘEŠENÍ } y_h) + (\text{PARTIKULÁRNÍ } y_p)$

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{3x} - 3\sin 2x + \cos 2x} \quad ; c_1, c_2 \in R$$

JE ZADÁNA LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S KONST. KOEFICIENTY A SPECIÁLNÍ PRAVOU STRANOU:

$$y''' - 2y'' = \underbrace{e^{ax}\cdot\left(P_n(x)\sin bx + Q_m(x)\cos bx\right)}_{\text{KVAZIPOLYM } q(x)}$$

OTÁZKA: V JAKÉM TVARU BUDEME HLEDAT PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ, JE-LI ZADÁNA PRAVÁ STRANA JAKO:

- $q(x) = \cos 2x$?
- $q(x) = (x^2 - 2x)\cdot\cos x$?
- $q(x) = (2x-6)\cos x + (4x-1)\sin x$?
- $q(x) = 2\cos x + x^3 \sin x$?
- $q(x) = (x^2 - 2x + 1)\cdot e^{2x}$?
- $q(x) = 6x + 1$?
- $q(x) = e^{2x}\cdot(x\cos x - 2\sin x)$?
- $q(x) = 2$?
- $q(x) = e^{7x}$?
- $q(x) = e^{2x}\cdot x^2$?