Zadání projektů z matematiky

26. května 2019

Kvadratické funkce

1) Vymyslete předpis dvou různých kvadratických funkcí, jejichž grafem je konvexní parabola procházející body $[-1; 0]$ a $[3; 0]$. Grafy obou funkcí zakreslete do jednoho souřadnicového systému. (**30**)

2) Vymyslete předpis dvou různých kvadratických funkcí, jejichž grafem je konkávní parabola, která nemá žádné průsečíky s osou x a prochází bodem $[1; -2]$. Grafy obou funkcí zakreslete do jednoho souřadnicového systému. (**30**)

3) Určete předpis kvadratické funkce procházející body $[2; 5]$, $[-2; -3]$ a $[3; 12]$. Nakreslete její graf. (**30**)

4) Určete předpis kvadratické funkce, jejímž grafem je parabola, která má právě jeden průsečík s osou x a prochází body $[3; 8]$ a $[0; 2]$. Nakreslete její graf. (**50**)

5) Určete předpis kvadratické funkce, jejímž grafem je parabola, která má maximum v bodě $[2; 2]$ a prochází bodem $[0; -6]$. Nakreslete její graf. (**50**)

Geometrické úlohy

6) Vypočtěte obsah trojúhelníku ohraničeného křivkami $y = x+5$, $y = 2x+5$ a $y = 1$. (**50**)

7) Vypočtěte obsah lichoběžníku ohraničeného křivkami $y = x$, $y = 8 - x$, $y = 1$ a $y = 3$ (**50**).

Návod: Nejprve si zakreslete všechny přímky do jednoho souřadnicového systému, určete vrcholy daného obrazce a délky jeho stran. Použijte čtverečkovaný sešit a zvolte vhodné měřítko.

8) Najděte předpis lineární funkce, jejímž grafem je přímka procházející bodem $[2; 1]$, která je rovnoběžná s přímkou $y = 2x + 2$. Grafy obou funkcí zakreslete. (**30**)

Polynomy

9) Jsou dány polynomy

$$f(x) = x^3 + 8x^2 + 5x + a$$

$$g(x) = x^2 + 3x + b$$

Určete konstanty $a, b \in \mathbf{R}$ tak, aby polynom f byl dělitelný polynomem g beze zbytku. (**30**)

10) Řešte nerovnici pro $x \in \mathbf{R}$. (**50**)

$$x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 10 \geq 0$$

Návod: Najděte nejprve kořeny daného polynomu a pokuste se jej rozložit na součin

Kvadratická rovnice

11) Je dána kvadratická rovnice s parametrem $p \in \mathbf{R}$. (**30**)

$$x^2 + (4p - 4)x - 4p + 12 = 0$$

Určete pro které hodnoty parametru $p \in \mathbf{R}$ má rovnice právě jedno řešení, pro které hodnoty nemá žádné řešení a pro které hodnoty má 2 řešení.

Slovní úlohy

12) Aritmetický průměr dvou čísel je 5, jejich geometrický průměr je 4. Určete tato čísla. (**30**)

13) Obsah obdélníku je 6 cm^2. Jestliže jednu jeho stranu dvakrát zvětšíme a druhou stranu zvětšíme o dva centimetry, dostaneme obdélník o obsahu 18 cm^2. Jaké jsou délky stran původního obdélníku? (**30**)

14) Obsah pravoúhlého trojúhelníku je 7 cm^2. Jestliže jednu jeho odvěsnu sedmkrát zmenšíme a druhou odvěsnu zvětšíme o osm centimetrů, dostaneme trojúhelník o obsahu 3 cm^2. Jaké jsou délky odvěsen původního trojúhelníku? (**30**)

15) Máme rozdělit desku dlouhou 4 metry na 10 dílů tak, aby každý díl byl o 6 cm delší než přecházející. Kolik měří nejkratší a nejdelší díl? (**50**)

16) Dva matematici, z nichž jeden nese na zádech plný pytel, se potkají na ulici:
A: ... a mimochodem, proč neseš na zádech ten pytel?
B: Ale, nesu dárky svým třem synům, všichni mají zítra narozeniny.
A: Ale to jsem nevěděl, že máš tři syny. A jak jsou ti tvoji kluci staří?
B: Jsi matematik, tak si to si musíš vypočítat. Když vynásobíš jejich stáří, jehož zítra dosáhnou, dostaneš číslo 36. A: No jo, ale to mně nestačí.
B: Tak dobře, vidíš tady ten dům, co před ním stojíme? Počet jeho oken dá náhodou zrovna tolik jako součet zítřejších let mých synů!
A: Musíš prominout, ale jak já se na ten dům dívám, musím říct, že mi to stále ještě nestačí. Řekni mi o svých synech ještě něco.
B: Budiž. Tak tedy můj nejstarší syn se jmenuje Vojtěch. A to je opravdu to poslední, co jsem ti o nich řekl.
A: Ale to je přece právě to, co mi k úplné spokojenosti chybělo! Jako bys mi tím přesně řekl stáří svých tří synů.
Tak kolik jim vlastně bude? (**70**)

Teoretická úloha (100)

17) Dokažte, že kořeny kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

kde $a, b, c \in \mathbf{R}$, mají tvar

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2}$$

(1. část).

Ukažte platnost Vietových vzorců, víte-li, že kořeny kvadratické rovnice (1) mají právě tento tvar (2). Tedy že pro kvadratickou rovnici v normovaném tvaru

$$x^2 + px + q = 0 \tag{3}$$

platí, že součin jejich kořenů je roven jejímu absolutnímu členu q a zároveň součet jejich kořenů je roven mínus koeficientu lineárního členu p.

$$x_1 \cdot x_2 = q, \tag{4}$$

$$-(x_1 + x_2) = p \tag{5}$$

(2. část)