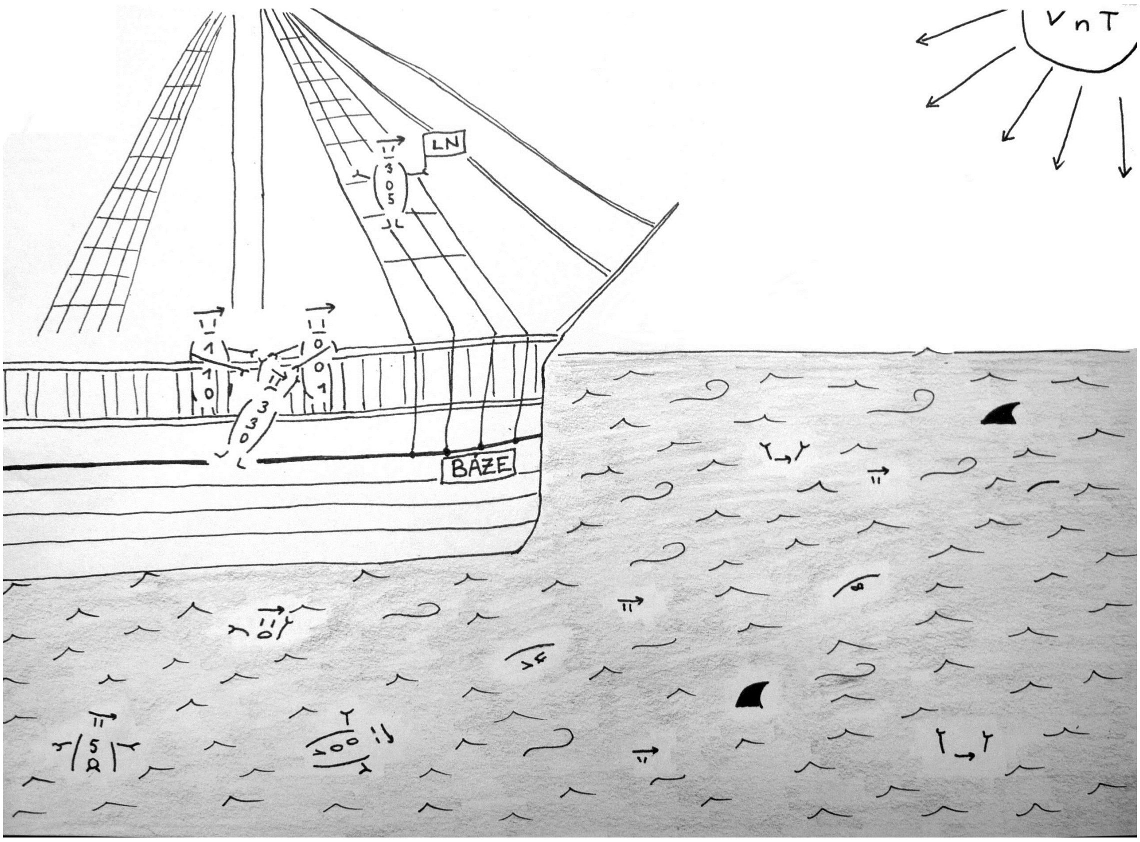


Tereza Velká s přispěním Daniela Gromady a Jakuba Krásenského:
Válka za lineární nezávislost

Opět začínáme skripta obrázkem a doufáme, že absolvent zimního semestru lineární algebry ocení paralelu mezi bostonským pitím čaje [1] a vyhazováním vektorů z (budoucí) báze.

[1] Bostonské pití čaje se odehrálo v roce 1773. Američtí kolonisté na protest proti britskému impériu vyhodili v přístavu do moře mnoho beden čaje. Tento okamžik bývá považován za začátek americké války za nezávislost.

Datum sestavení dokumentu: 5. ledna 2014

Lineární algebra 2

Autoři: Ľubomíra Balková a Jakub Krásenský
Ilustrace: Jakub Klinkovský

e-mail: `lubomira.balkova@fjfi.cvut.cz`

Předmluva

Jak název Lineární algebra 2 naznačuje, skripta navazují na Lineární algebru 1. Předpokládám proto, že kdo čte tuto předmluvu, už první díl v ruce držel. Dokonce předpokládám, že kdo hodlá ve čtení pokračovat, látku z prvního dílu ovládá.

Na vzniku skript se opět velkou měrou podíleli studenti, kteří byli v akademickém roce 2012–2013 prváky. Mezi nimi nejvíce mí dva spoluautoři – Jakubové. **Jakub Krásenský** se mnou ladil druhý díl skript už od léta. Během zimního semestru s pečlivostí sobě vlastní vznikající texty pročítal a opravoval. Společně jsme se tak snažili dosáhnout neskromného cíle: čtivého, přesného, srozumitelného a logicky vystavěného textu, který způsobí, že kdo byl spokojený s Lineární algebrou 1, bude nadšený Lineární algebrou 2, a kdo ještě kráse lineární algebry v zimě nepodlehl, v letním semestru už se neubrání. Skripta s Jakubem opět prožila prázdniny, tentokrát vánoční. Na světlo světa pak naše dílo – obrazně řečeno – doprovodily silvestrovské ohňostroje. **Jakub Klinkovský** vytvořil ilustrace přesně podle mých přání. Snad vám pomohou k názorné geometrické představě. Poděkování patří i mnoha dalším studentům. Jmenovitě **Kateřině Jirákové**, **Mateji Hazalovi** a **Danielu Hnykovi**. Za pomoc s formátováním a typografií děkuji Ing. **Petru Ambrožovi**, Ph.D., a Ing. **Tomáši Hejdovi**.

Skripta jsou určená studentům prvního ročníku „Jaderky“, tentokrát ovšem hlavně absolventům předmětu Lineární algebra plus (LAP), a obsahují látku předmětu Lineární algebra A2 (LAA2). U studentů se předpokládá zájem o probíranou látku a snaha co nejvíce porozumět. Právě míru porozumění si může čtenář ověřit řešením domácích úkolů, kterých je ještě více než v prvním dílu. Jejich obtížnost je opět vyznačena hvězdičkami (žádná hvězdička = lehký úkol, $*$ = obtížnější úkol, $**$ = těžký úkol).

Sylabus skript je inspirován přednáškou a skripty asistenta **Jiřího Pytlíčka**. Také se snažíme být stejně precizní a zprostředkovat čtenáři krásu lineární algebry stejně přesvědčivě jako pan asistent. Ovšem zároveň máme stále na paměti heslo doc. **Emila Humhala**, že lineární algebru může pochopit každý pilný student, když se mu srozumitelně vyloží. Proto se snažíme abstraktnost lineární algebry zmírnit ilustrací probírané látky na konkrétních příkladech a definováním nových pojmů nejprve pro matice (pro ty si je čtenář snáze představí), a až poté pro operátory.

V motivačních textech naznačujeme širokou škálu aplikací lineární algebry. V poznámkách pod čarou popisujeme rozmanitost značení a terminologie a vkládáme historické údaje. Ani tentokrát nechybí text, který zasazuje lineární algebru do historického kontextu. Jde o dodatek k historii soustav lineárních algebraických rovnic, který by se také mohl jmenovat „Alenka v říši lineární algebry“. Poznámky pod čarou, motivační texty a historické okénko jsou vloženy jen pro zajímavost (nezkouší se z nich).

Na závěr to nejdůležitější poděkování – lektorce skript prof. **Editě Pelantové**. V této souvislosti si dovolím připomenout výrok Paula Erdőse, [2] podle kterého Bůh vlastní Knihu, v níž jsou všechna matematická tvrzení a k nim ty nejelegantnější důkazy. Právě prof. Pelantová nám pomohla důkazy a pasáže, které ještě z Knihy nebyly, do elegantní podoby přepsat.

V Litomyšli 31. prosince 2013 Ľubomíra Balková

[2] Paul Erdős [výslovnost „erdöš“] (1913–1996) byl maďarský matematik, který má na kontě nejvíce matematických článků v celé historii matematiky (kolem 1500 s více než 500 spoluautory). Není divu, že bylo definováno Erdősovo číslo: Erdős sám má číslo 0; ti, kdo napsali článek s Erdősem, mají číslo 1; ti, kdo publikovali článek s nějakým spoluautorem Erdőse, mají číslo 2 atd.

Seznam použitých symbolů

Použitá písmena řecké abecedy a jejich výslovnost

α	„alfa“
β	„beta“
γ	„gama“
δ	„delta“
Δ	„delta“ (velká)
Θ	„théta“ (velká)
λ	„lambda“
μ	„mí“
ν	„ný“
π	„pí“
ρ	„ró“
σ	„sigma“
τ	„tau“
φ	„fí“

Další použité symboly

$*$	obtížnější úkol
$**$	těžký úkol
$\widehat{n}$	$\{1, 2, \ldots, n\}$
$\emptyset$	prázdná množina
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	množina přirozených, racionálních, reálných, komplexních čísel
$\mathrm{Re}(\alpha)$, $\mathrm{Im}(\alpha)$	reálná, resp. imaginární část α
$\overline{\alpha}$	číslo komplexně sdružené k α
$\langle 0, 1\rangle$	uzavřený interval
$:=$	rovnost definující nový objekt
δ_{ij}	Kroneckerovo delta
$\in$	náležet, být prvkem
$\inf M$	infimum množiny M
$A \times B$	kartézský součin množin
$A \subset B$	A je podmnožinou B (mohou se rovnat)
$\bigcap_{i=1}^{\ell}$	průnik ℓ množin
$(\mathbb{A}\vert\vec{b})$	rozšířená matice soustavy
$\mathbb{AB}$, $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}$	součin matic
$\mathbb{O}$	nulová matice
$\mathbb{I}$ ($\mathbb{I}_n$)	jednotková matice (řádu n)

$\mathbb{D}$	diagonální matice
$\mathbb{A}^T$	transponovaná matice
$\overline{\mathbb{A}}, \mathbb{A}^H$	komplexně, resp. hermitovsky sdružená matice
$\sim$	ekvivalentní řádková úprava
T	(číselné) těleso
V	vektorový prostor
$\vec{0}$	nulový vektor
T^n	prostor n-tic čísel
$T^{m,n}$	prostor matic o m řádcích a n sloupcích
$\mathbb{A}_{ij}, [\mathbb{A}]_{ij}, a_{ij}$	prvek matice v i-tém řádku a j-tém sloupci
$\mathbb{A}_{i\bullet}$, $\mathbb{A}_{\bullet j}$	i-tý řádek, resp. j-tý sloupec matice $\mathbb{A}$
$\mathcal{O}$	nulový polynom
$\mathcal{P}$	prostor polynomů
$\mathcal{E}$	standardní báze T^n, $T^{m,n}$
$\vec{e}_i$	vektor ze standardní báze T^n
$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$	lineární kombinace vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$
$[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda$	lineární obal vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$
$\dim V$	dimenze V
V_n	prostor dimenze n
$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$	soubor vektorů
$(\vec{x})_\mathcal{X}$	souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi $\mathcal{X}$
$x_i^\#$	i-tý souřadnicový funkcionál v bázi $\mathcal{X}$
$\subset\subset$	podprostor
$P + Q$	součet množin
$P \oplus Q$	direktní součet množin
$\operatorname{codim} P$	kodimenze podprostoru P
Θ	nulové zobrazení (funkcionál, operátor)
I	identický operátor
D, S	operátor derivování, resp. integrování
AB	složené zobrazení
$A\vec{x}$	obraz vektoru $\vec{x}$
$A(M)$	obraz množiny M
$\mathcal{L}(P, Q)$	prostor lineárních zobrazení P do Q
$\ker A$	jádro A
$d(A)$, $h(A)$	defekt, resp. hodnost A
$V^\#$	duální prostor k V
$\mathcal{X}^\#$	duální báze k bázi $\mathcal{X}$
${}^\mathcal{X}A^\mathcal{Y}$	matice zobrazení A v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$
${}^\mathcal{X}A$	matice operátoru A v bázi $\mathcal{X}$

$\mathcal{Z}(W)$	zaměření lineární variety W
$(\mathbb{A}\|\mathbb{B})$	rozšířená matice v úplné Gaussově eliminaci
$\mathbb{A}^{-1}$, A^{-1}	inverzní matice, resp. operátor
S_n	množina permutací na $\widehat{n}$
I_π	počet inverzí v permutaci
$\operatorname{sgn}\pi$	znaménko permutace
id	identická permutace
τ_{ij}	transpozice čísel i a j
$\det\mathbb{A},\ \|\mathbb{A}\|$	determinant matice
D_{ij}	algebraický doplněk
$\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}$	adjungovaná matice
$\mathbb{A}\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_k \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_\ell \end{pmatrix}$	submatice
$\det A$	determinant operátoru
λ	vlastní číslo
$\sigma(\mathbb{A}),\ \sigma(A)$	spektrum matice, resp. operátoru
P_λ	vlastní podprostor
$\nu_a(\lambda)$, $\nu_g(\lambda)$	algebraická, resp. geometrická násobnost
$p_{\mathbb{A}},\ p_A$	charakteristický polynom matice, resp. operátoru
${p_{\mathbb{A}}}^{-1}(0),\ {p_A}^{-1}(0)$	kořeny charakteristického polynomu
h	hermitovská forma (polára kvadratické formy)
Q	diagonála hermitovské formy (kvadratická forma)
N_h	nulprostor
$\mathcal{A}$	polární báze
$\mathrm{sg}(Q)$	signatura kvadratické formy
$h(Q)$	hodnost kvadratické formy
${}^{\mathcal{X}}Q$	matice kvadratické formy
Δ_k	hlavní subdeterminant řádu k
$\langle . \| . \rangle$	skalární součin
$\\|.\\|$	norma (indukovaná skalárním součinem)
$\mathcal{H}$ $(\mathcal{H}_n)$	prostor se skalárním součinem (dimenze n)
$\vec{x}\perp\vec{y}$	kolmé vektory
$\mathbb{G}$	Gramova matice
$P^\perp$	ortogonální doplněk
$\vec{x}_P$	ortogonální průmět vektoru
$\rho(\vec{x},\vec{y})$	vzdálenost $\vec{x}$ a $\vec{y}$
$\vec{n}$, $\vec{s}$	normálový, resp. směrový vektor variety
$\vec{x}\times\vec{y}$	vektorový součin
A^*	sdružený operátor

Obsah

1 Inverzní matice a inverzní operátor

Motivace. Místo praktického použití invertování zmíníme pro pobavení čtenáře hravou metodu šifrování [12]. Uvažujme šifrování textu bez háčků a čárek podle následující tabulky:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
8	7	5	13	9	16	18	22	4	23	11	3	21

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	6	15	12	19	2	14	17	20	25	24	10	26

Kromě šifrovací tabulky mají Alice (odesílatelka zprávy) i Bob (příjemce zprávy) k dispozici stejnou regulární matici, např. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Zprávu bez háčků a čárek Alice nejprve převede pomocí šifrovací tabulky na čísla, rozdělí na devítice (případně doplní nulami) a zapíše do matic řádu tři. Poté všechny matice zašifruje násobením s maticí $\mathbb{A}$. Chce-li například šifrovat text BÍLÁ KOČKA, pak převedením na čísla dostane matici $\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 8 & 11 & 6 \\ 5 & 11 & 8 \end{pmatrix}$ a odešle Bobovi matici $\mathbb{AM} = \begin{pmatrix} 19 & 19 & 14 \\ 12 & 15 & 11 \\ 8 & 11 & 6 \end{pmatrix}$.

Bob už přečetl kapitolu o inverzních maticích, proto umí najít matici $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ takovou, že $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}$. Touto maticí vynásobí matici, kterou obdržel od Alice, tj. provede součin $\mathbb{A}^{-1}(\mathbb{AM}) = \mathbb{M}$. Podle šifrovací tabulky pak zpátky dešifruje BILAKOCKA.

Kdyby se Bob neučil pořádně lineární algebru, mohl by si myslet, že je násobení matic komutativní. To by pak klidně vynásobil matici od Alice zprava a dostal by:

$$(\mathbb{AM})\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & 19 & 14 \\ 12 & 15 & 11 \\ 8 & 11 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 19 \\ 1 & 10 & 15 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Výsledek by podle tabulky dešifroval jako CERNYPSIK.

1.1 Inverzní matice

V této kapitole navážeme na maticový počet ze skript Lineární algebra 1, zejména pak na kapitolu Frobeniova věta.

Definice 1.1. Nechť $\mathbb{A}$ je matice s prvky z tělesa T. Pokud existuje matice $\mathbb{B}$ s prvky z T taková, že $\mathbb{AB} = \mathbb{BA} = \mathbb{I}$, kde $\mathbb{I}$ je jednotková matice, pak $\mathbb{B}$ nazveme **inverzní** maticí k $\mathbb{A}$.

Poznámka 1.2.

- Matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ musejí být nutně čtvercové stejného řádu jako $\mathbb{I}$ (plyne z pravidel pro násobení matic).

- Pro singulární matici inverzní neexistuje. Víme totiž, že $h(\mathbb{AB}) \leq h(\mathbb{A})$. Proto je-li $\mathbb{A}$ singulární, nemůže platit $\mathbb{AB} = \mathbb{BA} = \mathbb{I}$ pro žádnou matici $\mathbb{B}$.

Věta 1.3 (Existence inverzní matice)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice řádu n s prvky z tělesa T. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice.*

Důkaz.

- Existence:
  Najdeme podobu inverzní matice $\mathbb{B}$ k matici $\mathbb{A}$. Uvažujme lineární operátor A definovaný pro každé $\vec{x} \in T^n$ jako $A\vec{x} = \mathbb{A}\vec{x}$. Takový operátor je jistě regulární, a existuje tudíž operátor k němu inverzní A^{-1}. Položíme-li $\mathbb{B} = {}^{\mathcal{E}}(A^{-1})$, kde $\mathcal{E}$ je standardní báze T^n, pak lehce ověříme, že splňuje $\mathbb{AB} = \mathbb{BA} = \mathbb{I}$. (Stačí si uvědomit, že $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}}A$.)

- Jednoznačnost:
  Nechť $\mathbb{X}$ je také inverzní matice k $\mathbb{A}$, tedy $\mathbb{XA} = \mathbb{AX} = \mathbb{I}$. Pak podle pravidel pro násobení matic platí:
  $$\mathbb{X} = \mathbb{XI} = \mathbb{X}(\mathbb{AB}) = (\mathbb{XA})\mathbb{B} = \mathbb{IB} = \mathbb{B}. \qquad \square$$

Nyní, když víme, že pro regulární matici $\mathbb{A}$ existuje právě jedna inverzní matice, má smysl ji nějak označit. Obvyklé je značení $\mathbb{A}^{-1}$.

Z věty 1.3 a z faktu, že singulární matice nelze invertovat, plyne nová ekvivalentní definice regulární matice.

Důsledek 1.4 (Regularita a inverzní matice)**.** *Čtvercová matice $\mathbb{A}$ s prvky z tělesa T je regulární, právě když existuje $\mathbb{A}^{-1}$.*

Věta 1.5 (Vlastnosti inverzních matic)**.** *Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ jsou čtvercové matice stejného řádu s prvky z tělesa T.*

1. *Pokud $\mathbb{AB} = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{A}$ je regulární a $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$.*

2. *Pokud $\mathbb{BA} = \mathbb{I}$, potom $\mathbb{A}$ je regulární a $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$.*

3. *Platí, že $\mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$.*

4. *Je-li $\mathbb{A}$ regulární matice, pak $(\alpha\mathbb{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbb{A}^{-1}$ pro každé $\alpha \in T,\ \alpha \neq 0$.*

5. *Je-li $\mathbb{A}$ regulární matice, potom $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$.*

6. *Je-li $\mathbb{A}$ regulární matice, potom $(\mathbb{A}^T)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^T$.*

7. *Je-li $\vec{b} \in T^n$, pak soustava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ s regulární maticí $\mathbb{A}$ řádu n má právě jedno řešení, a to $\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}\vec{b}$.*

Důkaz.

1. Regularita $\mathbb{A}$ plyne z nerovnosti $h(\mathbb{AB}) \leq h(\mathbb{A})$. Podle věty 1.3 proto existuje $\mathbb{A}^{-1}$ a platí:
$$\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{AB}) = (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})\mathbb{B} = \mathbb{IB} = \mathbb{B}.$$

2. Analogie prvního bodu.

3. Tvrzení plyne z rovnosti $\mathbb{II} = \mathbb{I}$.

4. Užitím prvního bodu dostáváme tvrzení z rovnosti $(\alpha\mathbb{A})(\frac{1}{\alpha}\mathbb{A}^{-1}) = (\alpha\frac{1}{\alpha})(\mathbb{AA}^{-1}) = \mathbb{I}$.

5. Opět užitím prvního bodu plyne tvrzení z rovnosti $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}$.

6. Podle pravidel pro transponování dostáváme, že $\mathbb{A}^T(\mathbb{A}^{-1})^T = (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})^T = \mathbb{I}^T = \mathbb{I}$. Tvrzení se pak získá aplikací prvního bodu.

7. Z Frobeniovy věty víme, že existuje jediné řešení. Jeho tvar dostaneme vynásobením rovnosti $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ zleva maticí $\mathbb{A}^{-1}$. □

První a druhý bod věty 1.5 umožňují snazší ověření, že čtvercová matice $\mathbb{B}$ je inverzní k $\mathbb{A}$. Stačí dostat jednotkovou matici při násobení matic jen v jednom pořadí, nikoliv z obou stran, jak se požaduje v definici 1.1.

Věta 1.6 (Inverzní matice k součinu matic)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ jsou regulární matice řádu n s prvky z tělesa T. Pak také matice $\mathbb{AB}$ je regulární a $(\mathbb{AB})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$.*

Důkaz. Jelikož $\mathbb{AB}(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}) = \mathbb{A}(\mathbb{BB}^{-1})\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{AA}^{-1} = \mathbb{I}$, dostáváme podle prvního bodu věty 1.5, že $\mathbb{AB}$ je regulární a $(\mathbb{AB})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$. □

1.2 Úplná Gaussova eliminace

Zatím jsme definovali inverzní matici a popsali její vlastnosti. V důkazu věty 1.3 se objevil i předpis pro inverzní matici (ve tvaru matice v bázích jistého operátoru), ten se ovšem nehodí pro praktický výpočet. V této kapitole si proto posvítíme na způsob hledání inverzních matic. Než si vysvětlíme, jak a proč funguje **úplná Gaussova eliminace**, [3] musíme si nejprve uvědomit, že řádkové úpravy v matici odpovídají násobení vhodnou maticí zleva.

[3] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), německý matematik a fyzik

Lemma 1.7. *Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. Jestliže provedeme ekvivalentní řádkovou úpravu, je výsledná matice rovna matici $\mathbb{M}\mathbb{A}$, kde $\mathbb{M}$ je čtvercová matice řádu m, která vznikla z jednotkové matice $\mathbb{I}$ stejnou řádkovou úpravou.*

Důkaz. Je třeba ověřit, že je tvrzení pravdivé pro všechny ekvivalentní řádkové úpravy:

1. Záměna i-tého a j-tého řádku.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & i & & & & j & & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{pmatrix}
\mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \cdots & \mathbb{A}_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{A}_{i1} & \mathbb{A}_{i2} & \cdots & \mathbb{A}_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{A}_{j1} & \mathbb{A}_{j2} & \cdots & \mathbb{A}_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{A}_{m1} & \mathbb{A}_{m2} & \cdots & \mathbb{A}_{mn}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \cdots & \mathbb{A}_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{A}_{j1} & \mathbb{A}_{j2} & \cdots & \mathbb{A}_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{A}_{i1} & \mathbb{A}_{i2} & \cdots & \mathbb{A}_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{A}_{m1} & \mathbb{A}_{m2} & \cdots & \mathbb{A}_{mn}
\end{pmatrix}$$

2. Vynásobení řádku nenulovým číslem α z T.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & i & & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \alpha & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{pmatrix}
\mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \cdots & \mathbb{A}_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{A}_{i1} & \mathbb{A}_{i2} & \cdots & \mathbb{A}_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{A}_{m1} & \mathbb{A}_{m2} & \cdots & \mathbb{A}_{mn}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \cdots & \mathbb{A}_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha\mathbb{A}_{i1} & \alpha\mathbb{A}_{i2} & \cdots & \alpha\mathbb{A}_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{A}_{m1} & \mathbb{A}_{m2} & \cdots & \mathbb{A}_{mn}
\end{pmatrix}$$

3. Přičtení α-násobku i-tého řádku k j-tému.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & i & & & & j & & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & \alpha & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{pmatrix}
\mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \cdots & \mathbb{A}_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{A}_{i1} & \mathbb{A}_{i2} & \cdots & \mathbb{A}_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{A}_{j1} & \mathbb{A}_{j2} & \cdots & \mathbb{A}_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{A}_{m1} & \mathbb{A}_{m2} & \cdots & \mathbb{A}_{mn}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \cdots & \mathbb{A}_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{A}_{i1} & \mathbb{A}_{i2} & \cdots & \mathbb{A}_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha\mathbb{A}_{i1} + \mathbb{A}_{j1} & \alpha\mathbb{A}_{i2} + \mathbb{A}_{j2} & \cdots & \alpha\mathbb{A}_{in} + \mathbb{A}_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{A}_{m1} & \mathbb{A}_{m2} & \cdots & \mathbb{A}_{mn}
\end{pmatrix}$$

Čtenář sám ověří podle pravidel maticového násobení, že všechny tři rovnosti platí. $\square$

Věta 1.8 (Ekvivalentní řádkové úpravy a násobení maticí)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{m,n}$*. Provedeme-li s* $\mathbb{A}$ *konečný počet ekvivalentních řádkových úprav, je výsledná matice rovna matici* $\mathbb{M}\mathbb{A}$*, kde* $\mathbb{M}$ *je čtvercová matice řádu* m*, která vznikla z jednotkové matice* $\mathbb{I}$ *stejnými ekvivalentními řádkovými úpravami provedenými ve stejném pořadí.*

Důkaz. Jestliže v $\mathbb{A}$ provedeme k ekvivalentních řádkových úprav (EŘÚ), potom je podle lemmatu 1.7 výsledná matice rovna:

$$\mathbb{M}_k \dots \mathbb{M}_2\mathbb{M}_1\mathbb{A},$$

kde $\mathbb{M}_i$ je matice vzniklá z jednotkové i-tou EŘÚ. Označme $\mathbb{M} = \mathbb{M}_k \dots \mathbb{M}_2\mathbb{M}_1$. Pak $\mathbb{M} = \mathbb{M}_k \dots \mathbb{M}_2\mathbb{M}_1\mathbb{I}$ a podle lemmatu 1.7 vidíme, že $\mathbb{M}$ vznikla z $\mathbb{I}$ stejnými k EŘÚ provedenými ve stejném pořadí. $\square$

Příklad 1.9. V matici $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ proveďte EŘÚ: záměnu prvního a druhého řádku, přičtení prvního řádku k druhému řádku, vynásobení třetího řádku číslem dva. Ověřte, že výsledná matice je rovna $\mathbb{M}\mathbb{A}$, kde $\mathbb{M}$ vznikla z jednotkové matice stejnými řádkovými úpravami provedenými ve stejném pořadí.
Řešení:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \mathbb{M}\mathbb{A}, \text{ kde } \mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Věta 1.10 (Úplná Gaussova eliminace)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$*,* $\mathbb{A}$ *je regulární matice a* $\mathbb{B} \in T^{n,m}$*. Pak* $\mathbb{A}$ *lze převést ekvivalentními řádkovými úpravami na jednotkovou matici. Pokud převedeme rozšířenou matici* $(\mathbb{A} \mid \mathbb{B})$ *ekvivalentními řádkovými úpravami do tvaru* $(\mathbb{I} \mid \mathbb{X})$*, potom* $\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$*.*

Symbolicky zapsáno:

$$(\mathbb{A} \mid \mathbb{B}) \sim \left(\mathbb{I} \mid \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}\right).$$

Důkaz. Po převedení $\mathbb{A}$ pomocí EŘÚ do horního stupňovitého tvaru má matice na diagonále díky regularitě pouze nenulová čísla. Když poté každý řádek vydělíme odpovídajícím číslem, dostaneme na diagonále jedničky. A nad ní již jednoduše vyrobíme nuly – nejprve v předposledním řádku odečtením odpovídajícího násobku posledního řádku, poté ve třetím řádku od konce odečtením vhodného násobku posledního a vhodného násobku předposledního řádku atd.

K důkazu druhé části věty si stačí uvědomit, že $\mathbb{I}$ vznikla EŘÚ z $\mathbb{A}$ a že $\mathbb{X}$ vznikla z $\mathbb{B}$ stejnými úpravami provedenými ve stejném pořadí. Z věty 1.8 plyne existence matice $\mathbb{M}$ takové, že $\mathbb{I} = \mathbb{M}\mathbb{A}$ a $\mathbb{X} = \mathbb{M}\mathbb{B}$. Z první rovnosti dostáváme $\mathbb{M} = \mathbb{A}^{-1}$ a z druhé rovnosti pak $\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Slovo „úplná“ naznačuje, že na rozdíl od Gaussovy eliminace, kdy jsme matici pomocí EŘÚ převedli do horního stupňovitého tvaru a zastavili se, v úplné Gaussově eliminaci z horního stupňovitého tvaru pokračujeme a vyrábíme nuly nad diagonálou, dokud nedostaneme jednotkovou matici.

Úplnou Gaussovu eliminaci budeme používat k řešení následujících úloh:

(a) Jsou dány matice $\mathbb{A}$ regulární a $\mathbb{B}$ vhodného rozměru. Najděte $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$.

(b) Je dána regulární matice $\mathbb{A}$. Určete $\mathbb{A}^{-1}$. (Klademe $\mathbb{B}$ rovno $\mathbb{I}$.)

(c) Je dána regulární matice $\mathbb{A}$ a vektor $\vec{b}$ vhodného rozměru. Najděte $\mathbb{A}^{-1}\vec{b}$, tj. řešte rovnici $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$. (Klademe $\mathbb{B}$ rovno $\vec{b}$.)

(d) Jsou dány matice $\mathbb{A}$ regulární a $\mathbb{X}$ vhodného rozměru. Spočtěte $\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1}$.
Zde aplikujeme úplnou Gaussovu eliminaci na transponované matice:

$$\left(\mathbb{A}^T \mid \mathbb{X}^T\right) \sim \left(\mathbb{I} \mid (\mathbb{A}^T)^{-1}\mathbb{X}^T\right). \tag{1}$$

Podle šestého bodu věty 1.5 a pravidel pro transponování součinu platí:

$$(\mathbb{A}^T)^{-1}\mathbb{X}^T = (\mathbb{A}^{-1})^T\mathbb{X}^T = (\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1})^T.$$

Tudíž transponováním matice na pravé straně rozšířené matice (1) získáme $\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1}$.

Příklad 1.11. Jsou dány matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$ a $\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1}$ bez toho, abyste počítali $\mathbb{A}^{-1}$. Poté $\mathbb{A}^{-1}$ vypočítejte a předchozí výsledky pomocí nalezené $\mathbb{A}^{-1}$ zkontrolujte.
Řešení:

- $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$:

$$(\mathbb{A} \mid \mathbb{B}) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ tedy } \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1}$:

$$\left(\mathbb{A}^T \mid \mathbb{X}^T\right) = \left(\begin{array}{rrr|rr} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right), \text{ tudíž } \mathbb{X}\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $\mathbb{A}^{-1}$:

$$(\mathbb{A} \mid \mathbb{I}) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \text{ proto } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sami zkontrolujte vynásobením s $\mathbb{A}^{-1}$, že jsme nalezli $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$ a $\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1}$ správně.

Úkol 1.12 (Sloupcová analogie úplné Gaussovy eliminace)**.** Zformulujte a dokažte analogickou větu, jako je věta 1.8, pro ekvivalentní sloupcové úpravy. Je tedy třeba definovat ekvivalentní sloupcové úpravy a vymyslet, násobení jakou maticí a z které strany odpovídají. Poté vyslovte pro úplnou Gaussovu eliminaci ve sloupcovém tvaru větu analogickou větě 1.10. Ilustrujte sloupcovou metodu na konkrétním příkladu.

1.3 Inverzní operátor

Již víme, že pokud V je vektorový prostor nad tělesem T a A je regulární operátor na V, pak A^{-1} je také regulární operátor, tj. invertování zobrazení zachovává linearitu. Podle definice inverzního zobrazení také hned vidíme, že platí $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, kde I značí identický operátor.

Podíváme se, jakým jiným způsobem lze zjistit, zda je nějaký operátor inverzní k předepsanému operátoru. Zejména se zaměříme na rozdíly mezi vektorovými prostory konečné a nekonečné dimenze.

Věta 1.13 (Pravý a levý inverzní operátor)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$.*

1. *Pokud existuje $B \in \mathcal{L}(V)$ tak, že $AB = I$, pak A je „na V“.*

2. *Pokud existuje $C \in \mathcal{L}(V)$ tak, že $CA = I$, pak A je prostý.*

3. *Pokud existují $B, C \in \mathcal{L}(V)$ splňující $AB = I = CA$, potom A je regulární operátor a platí:*
$$A^{-1} = B = C.$$

Důkaz.

1. Chceme dokázat, že pro každé $\vec{y} \in V$ existuje $\vec{x} \in V$ tak, že $A\vec{x} = \vec{y}$. Stačí položit $\vec{x} = B\vec{y}$.

2. Ověřujeme, že $\ker A = \{\vec{0}\}$. Uvažujeme libovolné $\vec{x} \in \ker A$. Pak $(CA)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}$ a zároveň $(CA)\vec{x} = C(A\vec{x}) = C(\vec{0}) = \vec{0}$, proto $\vec{x} = \vec{0}$.

3. Pokud existují $B, C \in \mathcal{L}(V)$ splňující $AB = I = CA$, pak je operátor A podle prvního bodu „na V" a podle druhého bodu prostý, tudíž A je regulární. Proto existuje A^{-1} a platí:
$$A^{-1} = A^{-1}I = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B,$$
$$A^{-1} = IA^{-1} = (CA)A^{-1} = C(AA^{-1}) = CI = C. \qquad \square$$

Operátor B z věty 1.13 nazveme **pravým inverzním operátorem** k A a C nazveme **levým inverzním operátorem** k A.

Poznámka 1.14. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T.

- Je-li $\dim V < +\infty$ a $A \in \mathcal{L}(V)$, potom víme, že A je regulární operátor právě tehdy, když je prostý nebo „na V". Jakmile tedy existuje B pravý inverzní operátor k A, pak je A regulární a $A^{-1} = B$. Analogicky jakmile existuje C levý inverzní operátor k A, pak je A regulární a $A^{-1} = C$.

- Je-li $\dim V = +\infty$, pak z existence pouze levého či pouze pravého inverzního operátoru neplyne nutně existence inverzního operátoru. Například pro operátory derivování a integrování $D, S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ platí $DS = I$, ale $SD \neq I$.

Věta 1.13 dává návod k ověření, že operátor B je inverzní k lineárnímu operátoru A. Je-li $\dim V < +\infty$, pak stačí ověřit, že $AB = I$. Je-li $\dim V = +\infty$, pak je třeba zkontrolovat, že $AB = I = BA$.

Věta 1.15 (Inverzní operátor k inverznímu operátoru)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$. Pokud A je regulární operátor, pak $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Důkaz. Jelikož $AA^{-1} = I = A^{-1}A$, je A levý i pravý inverzní operátor k A^{-1}, tedy podle věty 1.13 je A inverzní operátor k A^{-1}. $\square$

Věta 1.16 (Inverzní operátor ke složení operátorů)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$ a A i B jsou regulární operátory. Pak AB je regulární operátor a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Důkaz. Podle věty 1.13 stačí ověřit, že $B^{-1}A^{-1}$ je pravým i levým inverzním operátorem k AB.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = BB^{-1} = I. \qquad \square$$

Věta 1.17 (Inverzní operátor a inverzní matice)**.** *Nechť V_n je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad tělesem T, $\mathcal{X}$ je báze V_n a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Je-li A regulární operátor, pak platí:*

$$^{\mathcal{X}}(A^{-1}) = (^{\mathcal{X}}A)^{-1}.$$

Důkaz. Podle prvního bodu věty 1.5 plyne z rovnosti $^{\mathcal{X}}A\,^{\mathcal{X}}(A^{-1}) = {}^{\mathcal{X}}(AA^{-1}) = {}^{\mathcal{X}}I = \mathbb{I}$, že $(^{\mathcal{X}}A)^{-1} = {}^{\mathcal{X}}(A^{-1})$. $\square$

Úkol 1.18. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou báze V. Najděte vztah matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$, tj. $^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$, a matice přechodu od báze $\mathcal{X}^{\#}$ k bázi $\mathcal{Y}^{\#}$, tj. $^{\mathcal{X}^{\#}}I^{\mathcal{Y}^{\#}}$. Připomeňme, že $\mathcal{X}^{\#}$ je duální báze k $\mathcal{X}$.

2 Permutace a determinanty

Motivace. Determinanty úzce souvisí s obsahy a objemy. Ukážeme si, že pomocí determinantu lze snadno spočítat obsah rovnoběžníka a objem rovnoběžnostěnu. V budoucnu se setkáte s Wronského determinantem, wronskiánem, v němž jako prvky vystupují funkce a jejich derivace. Je používán zejména v teorii diferenciálních rovnic při jejich řešení metodou variace konstant a při zjišťování lineární nezávislosti funkcí. Dále se seznámíte s Jacobiho determinantem, jakobiánem, při výpočtu vícerozměrných integrálů.

Pro motivační úlohu využijeme souvislost determinantů s řešením soustav LAR. Užitím determinantů lze například najít rovnici sféry v $\mathbb{R}^3$, která je určená čtyřmi body:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Obecná rovnice sféry má tvar $A(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Dz + E = 0$. Zjišťujeme tedy, zda existují čísla $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ taková, že platí:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} A(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) & + & Ba_1 & + & Ca_2 & + & Da_3 & + & E & = & 0 \\ A(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) & + & Bb_1 & + & Cb_2 & + & Db_3 & + & E & = & 0 \\ A(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) & + & Bc_1 & + & Cc_2 & + & Dc_3 & + & E & = & 0 \\ A(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) & + & Bd_1 & + & Cd_2 & + & Dd_3 & + & E & = & 0. \end{array}$$

Čtenář jistě i bez znalosti determinantů najde rovnici sféry, která prochází body:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

K úloze se vrátíme na konci kapitoly o determinantech a ukážeme si řešení s jejich využitím.

2.1 Permutace

Abychom mohli zavést pojem determinant matice, musíme nejprve vysvětlit několik pojmů z teorie permutací. V celém textu značí n přirozené číslo.

Definice 2.1. Každou bijekci (zobrazení prosté a „na“) $\pi\colon \widehat{n} \to \widehat{n}$ nazýváme **permutací** na $\widehat{n}$. Množinu všech permutací na $\widehat{n}$ značíme S_n.

Úkol 2.2. Rozmyslete si, že množina S_n má $n!$ prvků.

Poznámka 2.3. Permutace zapisujeme tabulkou s dvěma řádky $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, případně jediným řádkem $\pi = (4\ 3\ 1\ 2)$. Obojí znamená:

$$\pi(1) = 4,\ \pi(2) = 3,\ \pi(3) = 1,\ \pi(4) = 2.$$

V případě dvouřádkového zápisu nemusejí být čísla v prvním řádku uspořádána vzestupně. Permutaci π můžeme proto také zapsat například jako $\pi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 2.4. Nechť $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Najděte:

$$\pi_1 \circ \pi_2, \quad \pi_2^2 = \pi_2 \circ \pi_2, \quad \pi_2 \circ \pi_1, \quad \pi_2^{-1},$$

kde $\circ$ značí skládání.
Řešení:

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \pi_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \pi_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní permutaci lze tedy získat prohozením řádků v dvouřádkovém zápisu.

Definice 2.5. Nechť $\pi \in S_n$. Pak **inverzí** v π nazveme každou uspořádanou dvojici (i, j) splňující: $i, j \in \widehat{n}$, $i < j$ a $\pi(i) > \pi(j)$. Počet inverzí v π značíme I_π. **Znaménkem** permutace π nazveme číslo $\operatorname{sgn} \pi := (-1)^{I_\pi}$. [4] Jde o permutaci **sudou**, pokud $\operatorname{sgn} \pi = 1$, a **lichou**, pokud $\operatorname{sgn} \pi = -1$.

Identická permutace je sudá, protože počet inverzí v ní je roven 0. Značíme ji id.

Úkol 2.6. Rozmyslete si, že S_n pro $n \geq 2$ obsahuje vždy stejný počet sudých a lichých permutací.

Příklad 2.7. Určete počet inverzí v $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a najděte $\operatorname{sgn} \pi$.

Řešení: Podívejme se na všechny uspořádané dvojice (i, j), kde $i, j \in \widehat{4}$ a $i < j$, a zkontrolujme, zda $\pi(i) > \pi(j)$.

(i,j)	$(\pi(i), \pi(j))$	$\pi(i) > \pi(j)$
$(1,2)$	$(4,3)$	✓
$(1,3)$	$(4,1)$	✓
$(1,4)$	$(4,2)$	✓
$(2,3)$	$(3,1)$	✓
$(2,4)$	$(3,2)$	✓
$(3,4)$	$(1,2)$	

Počet inverzí $I_\pi = 5$, proto $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^5 = -1$.

[4] Setkáme se i se značením $\operatorname{in} \pi$ pro počet inverzí v permutaci π a $\operatorname{zn} \pi$ či dokonce $\operatorname{znak} \pi$ pro znaménko permutace.

Definice 2.8. Nechť $n \geq 2$ a $i, j \in \widehat{n},\ i \neq j$. **Transpozicí** čísel i a j nazveme permutaci τ_{ij} splňující:

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(k) &= k \quad \text{pro } i \neq k \neq j, \\ \tau_{ij}(i) &= j, \\ \tau_{ij}(j) &= i. \end{aligned}$$

Pokud zapíšeme τ_{ij} pomocí tabulky (pro $i < j$), dostaneme:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Věta 2.9 (Znaménko transpozice)**.** *Každá transpozice je lichá permutace.*

Důkaz. Nechť $n \geq 2,\ i, j \in \widehat{n}$ a BÚNO [5] $i < j$. Pak snadno nahlédneme s pomocí (2), že inverze v permutaci τ_{ij} tvoří páry (i, k), kde $i < k < j$, dále (k, j), kde $i < k < j$, a pár (i, j). Inverzí je proto celkem $2(j - i - 1) + 1$, což je liché číslo, tudíž $\operatorname{sgn} \pi = -1$. □

Věta 2.10 (Znaménko složené permutace)**.** *Nechť* $\pi, \rho \in S_n$. *Pak platí:*

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) = \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \rho.$$

Důkaz. Určeme počet inverzí v $\pi \circ \rho$ v závislosti na počtu inverzí v π a ρ. Pro $i, j \in \widehat{n}, i < j$, vyjmenujme všechny nerovnosti, které mohou nastat mezi $\rho(i)$ a $\rho(j)$ a mezi $\pi(\rho(i))$ a $\pi(\rho(j))$.

(a) $\rho(i) > \rho(j)$ a $\pi(\rho(i)) > \pi(\rho(j))$,

(b) $\rho(i) > \rho(j)$ a $\pi(\rho(i)) < \pi(\rho(j))$,

(c) $\rho(i) < \rho(j)$ a $\pi(\rho(i)) > \pi(\rho(j))$,

(d) $\rho(i) < \rho(j)$ a $\pi(\rho(i)) < \pi(\rho(j))$.

Označme jako A, B, C počet uspořádaných dvojic (i, j), pro které nastává možnost (a), resp. (b), resp. (c). Je jasné, že $I_{\pi \circ \rho} = A + C$ a $I_\rho = A + B$. Jelikož ρ je permutace, dostaneme všechny dvojice (k, ℓ), kde $k < \ell$, pokud uvažujeme dvojice $(\rho(i), \rho(j))$, je-li $\rho(i) < \rho(j)$, a k nim přidáme dvojice $(\rho(j), \rho(i))$, je-li $\rho(i) > \rho(j)$. Odtud vidíme, že inverzím v π odpovídá druhá a třetí možnost, tudíž $I_\pi = B + C$. Celkově dostáváme vztah $I_{\pi \circ \rho} + 2B = I_\pi + I_\rho$, z kterého plyne, že $\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) = \operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \rho$. □

Důsledek 2.11. *Nechť* $\pi \in S_n$. *Pak* $\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \pi^{-1}$.

Důkaz. Jelikož $\pi \circ \pi^{-1} = \mathrm{id}$ a identita je sudá permutace, plyne z věty 2.10, že platí vztah $\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \pi^{-1} = 1$, tudíž π a π^{-1} mají stejné znaménko. □

[5] BÚNO znamená „bez újmy na obecnosti“. Užívá se v situacích, kdy je důkaz pro ostatní případy přímou analogií vybraného případu.

2.2 Determinant matice

V celé kapitole uvažujeme výhradně čtvercové matice a T značí těleso.

Definice 2.12. Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak **determinantem matice** $\mathbb{A}$ nazveme číslo

$$\det \mathbb{A} := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \mathbb{A}_{2\pi(2)} \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)}.$$

Sčítance v sumě nazýváme **členy determinantu**.

Poznámka 2.13. Suma má $n!$ sčítanců. (Víme, že právě tolik je permutací na $\widehat{n}$, tedy prvků množiny S_n.) V každém členu se objevuje z každého řádku a každého sloupce matice právě jeden prvek.

Příklad 2.14. Odvoďte podle definice, jak vypadají determinanty matic řádů jedna, dva a tři.
Řešení:

- Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} \end{pmatrix}$. Na $\widehat{1}$ máme jedině identickou permutaci (1) se znaménkem 1, proto $\det \mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}$.
- Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} \end{pmatrix}$. Na $\widehat{2}$ máme dvě permutace $\mathrm{id} = (1\ 2)$ a $\tau_{12} = (2\ 1)$ se znaménky 1, resp. -1, proto $\det \mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22} - \mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{21}$.
- Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \mathbb{A}_{13} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} & \mathbb{A}_{23} \\ \mathbb{A}_{31} & \mathbb{A}_{32} & \mathbb{A}_{33} \end{pmatrix}$. Na $\widehat{3}$ máme šest permutací:

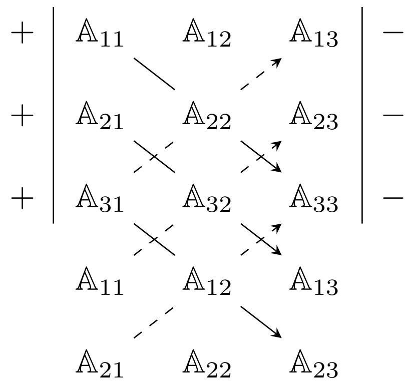
  $$\pi_1 = (1\ 2\ 3),\ \pi_2 = (3\ 1\ 2),\ \pi_3 = (2\ 3\ 1),\ \pi_4 = (1\ 3\ 2),\ \pi_5 = (3\ 2\ 1),\ \pi_6 = (2\ 1\ 3)\ .$$

  První tři jsou sudé a další tři liché. Proto dostáváme:

  $$\det \mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22}\mathbb{A}_{33} + \mathbb{A}_{13}\mathbb{A}_{21}\mathbb{A}_{32} + \mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{31} - \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{32} - \mathbb{A}_{13}\mathbb{A}_{22}\mathbb{A}_{31} - \mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{21}\mathbb{A}_{33}.$$

Determinant matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \ldots & \mathbb{A}_{1n} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} & \ldots & \mathbb{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{A}_{n1} & \mathbb{A}_{n2} & \ldots & \mathbb{A}_{nn} \end{pmatrix}$ také značíme $\begin{vmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \ldots & \mathbb{A}_{1n} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} & \ldots & \mathbb{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{A}_{n1} & \mathbb{A}_{n2} & \ldots & \mathbb{A}_{nn} \end{vmatrix}$.

Poznámka 2.15. K zapamatování vzorců pro determinanty matic řádu dva a tři může posloužit tzv. **Sarrusovo pravidlo**, [6] jak pro matici řádu tři ilustruje obrázek 1. Pro výpočet determinantu matice řádu dva stačí nakreslit jednu šipku směrem vpravo dolů a druhou směrem vpravo nahoru a aplikovat stejné pravidlo pro znaménka.



Obrázek 1: Determinant matice řádu tři dostaneme sečtením součinů prvků matice spojených šipkami vedoucími vpravo dolů a odečtením součinů prvků spojených šipkami vedoucími vpravo nahoru.

Pro matice vyšších řádů pravidlo použít nelze. Čtenář si rozmyslí, že sepsáním řádků a spojováním prvků šipkami už nevyrobíme všechny členy determinantu (např. pro řád čtyři dostaneme jen osm různých součinů, ale členů determinantu je $4! = 24$).

Věta 2.16 (Determinant transponované matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. *Pak* $\det \mathbb{A}^T = \det \mathbb{A}$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \det \mathbb{A}^T &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ [\mathbb{A}^T]_{1\pi(1)} [\mathbb{A}^T]_{2\pi(2)} \dots [\mathbb{A}^T]_{n\pi(n)} && \text{(definice determinantu)} \\ &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{\pi(1)1} \mathbb{A}_{\pi(2)2} \dots \mathbb{A}_{\pi(n)n} && \text{(definice } \mathbb{A}^T\text{).} \end{aligned}$$

Pro libovolnou permutaci $\pi \in S_n$ a $i \in \widehat{n}$ platí, že $\mathbb{A}_{\pi(i)i} = \mathbb{A}_{j\pi^{-1}(j)}$, kde $j = \pi(i)$. Jelikož dále π zobrazuje $\widehat{n}$ na $\widehat{n}$, dostáváme:

$$\mathbb{A}_{\pi(1)1} \mathbb{A}_{\pi(2)2} \dots \mathbb{A}_{\pi(n)n} = \mathbb{A}_{1\pi^{-1}(1)} \mathbb{A}_{2\pi^{-1}(2)} \dots \mathbb{A}_{n\pi^{-1}(n)},$$

přičemž činitelé v součinech nejsou nutně ve stejném pořadí. Můžeme proto psát:

$$\begin{aligned} \det \mathbb{A}^T &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi^{-1}(1)} \mathbb{A}_{2\pi^{-1}(2)} \dots \mathbb{A}_{n\pi^{-1}(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi^{-1} \ \mathbb{A}_{1\pi^{-1}(1)} \mathbb{A}_{2\pi^{-1}(2)} \dots \mathbb{A}_{n\pi^{-1}(n)} && (\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \pi^{-1}) \\ &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ \mathbb{A}_{1\sigma(1)} \mathbb{A}_{2\sigma(2)} \dots \mathbb{A}_{n\sigma(n)} && (\{\pi^{-1} \mid \pi \in S_n\} = S_n) \\ &= \det \mathbb{A}. \end{aligned}$$

□

Poznámka 2.17. Z předchozího důkazu si zapamatujme, že vzorec

$$\det \mathbb{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{\pi(1)1} \mathbb{A}_{\pi(2)2} \dots \mathbb{A}_{\pi(n)n}$$

můžeme také považovat za definici determinantu.

[6] Pierre Frédéric Sarrus [výslovnost „sárüs“] (1798–1861), francouzský matematik

Nyní představíme třídu matic, pro které je snadné vypočítat determinant.

Definice 2.18. Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$.

- Matici $\mathbb{A}$ nazveme **horní trojúhelníkovou maticí**, [7] pokud pro každé $i, j \in \widehat{n}$, kde $i > j$, platí $\mathbb{A}_{ij} = 0$. Slovy: „$\mathbb{A}$ má pod diagonálou samé nuly."
- Matici $\mathbb{A}$ nazveme **dolní trojúhelníkovou maticí**, pokud pro každé $i, j \in \widehat{n}$, kde $i < j$, platí $\mathbb{A}_{ij} = 0$. Slovy: „$\mathbb{A}$ má nad diagonálou samé nuly."

Poznámka 2.19. Je lehké si rozmyslet, že pro čtvercovou matici $\mathbb{A}$ platí:

- Je-li $\mathbb{A}$ v horním stupňovitém tvaru, pak je i v horním trojúhelníkovém tvaru.
- Je-li $\mathbb{A}$ v horním trojúhelníkovém tvaru, nemusí nutně být v horním stupňovitém tvaru. Např. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je v horním trojúhelníkovém, ale ne stupňovitém tvaru.

Věta 2.20 (Determinant trojúhelníkových matic)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ *a* $\mathbb{A}$ *je horní či dolní trojúhelníková. Pak* $\det \mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22} \dots \mathbb{A}_{nn}$.

Důkaz. Dokážeme tvrzení pro horní trojúhelníkové matice, pro dolní trojúhelníkové je důkaz analogický. Určíme, jak musí vypadat permutace π na $\widehat{n}$, aby jí odpovídající člen determinantu $\operatorname{sgn} \pi\ \mathbb{A}_{1\pi(1)}\mathbb{A}_{2\pi(2)} \dots \mathbb{A}_{n\pi(n)}$ nebyl nutně nulový.

- Zcela jistě $\pi(n) = n$. Kdyby totiž $\pi(n) = j < n$, pak by se ve členu determinantu vyskytoval prvek $\mathbb{A}_{nj}$ nacházející se v matici pod diagonálou, tj. $\mathbb{A}_{nj} = 0$.
- Dále $\pi(n-1) = n-1$. Není možné, aby $\pi(n-1) = n$, protože by π nebyla permutace, a kdyby $\pi(n-1) = j < n-1$, pak by platilo $\mathbb{A}_{(n-1)j} = 0$.
- Analogickými úvahami postupně dostaneme, že $\pi = \mathrm{id}$.

Všem permutacím, které nejsou identické, odpovídá tedy v determinantu nulový člen. Odtud již plyne $\det \mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22} \dots \mathbb{A}_{nn}$. □

Determinanty matic řádů vyšších než tři se naučíme pomocí následující věty počítat tak, že matice pomocí řádkových a sloupcových úprav převedeme do trojúhelníkového tvaru, aniž by se determinant změnil. Poté využijeme právě dokázaného faktu, že determinant trojúhelníkové matice je součin prvků na diagonále.

Věta 2.21 (Řádkové a sloupcové úpravy determinantů)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$*. Pak platí:*

1. *Vznikne-li* $\mathbb{B}$ *vynásobením některého řádku (sloupce) matice* $\mathbb{A}$ *číslem* $\alpha \in T$*, pak* $\det \mathbb{B} = \alpha \det \mathbb{A}$.

[7] V literatuře se objevuje i termín pravá a levá trojúhelníková matice místo horní a dolní trojúhelníková.

2. *Je-li některý řádek (sloupec) $\mathbb{A}$ nulový, je také* $\det \mathbb{A}$ *nulový.*

3. *Vznikne-li $\mathbb{B}$ z $\mathbb{A}$ prohozením dvou řádků (sloupců), potom* $\det \mathbb{B} = -\det \mathbb{A}$.

4. *Má-li $\mathbb{A}$ dva řádky (sloupce) stejné, je* $\det \mathbb{A}$ *nulový.*

5. *Označme* $\mathbb{A} = (\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_{i-1} \ \vec{p} \ \vec{a}_{i+1} \ \dots \ \vec{a}_n)$ a $\mathbb{B} = (\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_{i-1} \ \vec{q} \ \vec{a}_{i+1} \ \dots \ \vec{a}_n)$. *Pak* $\det \mathbb{A} + \det \mathbb{B} = \det(\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_{i-1} \ (\vec{p} + \vec{q}) \ \vec{a}_{i+1} \ \dots \ \vec{a}_n)$. *Pro řádky platí analogie.*

6. *Přičteme-li k jednomu řádku (sloupci) matice $\mathbb{A}$ libovolný násobek jiného řádku (sloupce), determinant se nezmění.*

Důkaz. U každého tvrzení dokážeme jen řádkovou variantu. Sloupcová varianta pak plyne z věty 2.16, tedy z faktu, že determinant matice a matice k ní transponované jsou stejné.

1. Nechť $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ vynásobením i-tého řádku číslem $\alpha \in T$, pak platí:
$$\begin{aligned}\det \mathbb{B} &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{B}_{1\pi(1)} \dots \mathbb{B}_{i\pi(i)} \dots \mathbb{B}_{n\pi(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \dots (\alpha \mathbb{A}_{i\pi(i)}) \dots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \alpha \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \dots \mathbb{A}_{i\pi(i)} \dots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \alpha \det \mathbb{A}.\end{aligned}$$

2. Má-li $\mathbb{A}$ i-tý řádek nulový, pak pro každou permutaci π na $\widehat{n}$ je prvek $\mathbb{A}_{i\pi(i)} = 0$, proto každý člen determinantu $\mathbb{A}$ je nulový.

3. Nechť $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ záměnou i-tého a j-tého řádku, potom platí:
$$\begin{aligned}\det \mathbb{B} &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{B}_{1\pi(1)} \dots \mathbb{B}_{i\pi(i)} \dots \mathbb{B}_{j\pi(j)} \dots \mathbb{B}_{n\pi(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \dots \mathbb{A}_{j\pi(i)} \dots \mathbb{A}_{i\pi(j)} \dots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} -\operatorname{sgn} (\pi \circ \tau_{ij}) \ \mathbb{A}_{1(\pi \circ \tau_{ij})(1)} \dots \mathbb{A}_{i(\pi \circ \tau_{ij})(i)} \dots \mathbb{A}_{j(\pi \circ \tau_{ij})(j)} \dots \mathbb{A}_{n(\pi \circ \tau_{ij})(n)} \\ &= -\textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ \mathbb{A}_{1\sigma(1)} \dots \mathbb{A}_{i\sigma(i)} \dots \mathbb{A}_{j\sigma(j)} \dots \mathbb{A}_{n\sigma(n)} \\ &= -\det \mathbb{A}.\end{aligned}$$
V předposlední rovnosti jsme využili toho, že $\{\pi \circ \tau_{ij} | \pi \in S_n\} = S_n$.

4. Má-li $\mathbb{A}$ stejný i-tý a j-tý řádek, pak matice získaná záměnou i-tého a j-tého řádku, je opět matice $\mathbb{A}$. Podle předchozího bodu platí, že $\det \mathbb{A} = -\det \mathbb{A}$, proto $\det \mathbb{A} = 0$.

5. Označme $\vec{p}^{\,T} = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$ i-tý řádek $\mathbb{A}$, $\vec{q}^{\,T} = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n)$ i-tý řádek $\mathbb{B}$, kde $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ mají ostatní řádky stejné. Jako $\mathbb{X}$ označme matici, která má v i-tém řádku $(\vec{p} + \vec{q})^T$ a všechny ostatní řádky má stejné jako $\mathbb{A}$. Pak platí:
$$\begin{aligned}\det \mathbb{X} &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{X}_{1\pi(1)} \dots \mathbb{X}_{i\pi(i)} \dots \mathbb{X}_{n\pi(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \mathbb{A}_{1\pi(1)} \dots (p_{\pi(i)} + q_{\pi(i)}) \dots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \mathbb{A}_{1\pi(1)} \dots p_{\pi(i)} \dots \mathbb{A}_{n\pi(n)} + \textstyle\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \mathbb{A}_{1\pi(1)} \dots q_{\pi(i)} \dots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \det \mathbb{A} + \det \mathbb{B}.\end{aligned}$$

6. Tvrzení plyne z pátého, prvního a čtvrtého bodu. □

Důsledek 2.22. *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ *a* $\alpha \in T$. *Potom* $\det(\alpha\mathbb{A}) = \alpha^n \det \mathbb{A}$.

Důkaz. Matice $\alpha\mathbb{A}$ vznikla z $\mathbb{A}$ vynásobením každého řádku číslem α, tvrzení proto plyne z prvního bodu věty 2.21. □

Příklad 2.23. Pomocí řádkových úprav spočítejte determinant matice $\mathbb{A}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\det \mathbb{A} \overset{(a)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} \overset{(b)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} \overset{(c)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(d)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 15 \end{vmatrix} \overset{(e)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} \overset{(f)}{=} -54.$$

Využili jsme následujících úprav:

(a) Odečtení vhodných násobků prvního řádku od ostatních řádků. Determinant se nemění.

(b) Přičtení druhého řádku ke třetímu. Determinant se nemění.

(c) Záměna třetího a pátého řádku. Mění se znaménko determinantu. Aby se nezměnil výsledek, je determinant vynásoben číslem -1.

(d) Odečtení dvojnásobku třetího řádku od čtvrtého a pátého. Determinant se nemění.

(e) Záměna čtvrtého a pátého řádku. Mění se znaménko determinantu. Aby se nezměnil výsledek, je determinant vynásoben číslem -1.

(f) Determinant horní trojúhelníkové matice je roven součinu diagonálních prvků.

Zavedeme pojem n-lineární antisymetrická forma a ukážeme, že determinant je příkladem takové formy.

Definice 2.24. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Pak zobrazení $w\colon \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n\text{-krát}} \to T$ nazveme:

- **n-lineární formou** na V, pokud pro každé $\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in V$ a $\alpha \in T$ a pro každé $i \in \hat{n}$ platí:
$$\begin{aligned} w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \alpha\vec{y} + \vec{z}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n) &= \alpha w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n) \\ &\quad + w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{z}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n), \end{aligned}$$
- **antisymetrickou formou** na V, pokud pro každé $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in V$ a pro každé $i, j \in \hat{n}, i \neq j$, platí:
$$w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_n) = -w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_n).$$

Důsledek 2.25. *Vnímáme-li determinant jako funkci sloupců matice, tj. jako zobrazení* $\det\colon \underbrace{T^n \times \ldots \times T^n}_{n\text{-krát}} \to T$*, pak je determinant n-lineární antisymetrickou formou na T^n.*

Důkaz. Antisymetrie je důsledkem třetího a n-linearita pátého a prvního bodu věty 2.21. □

2.3 Determinant součinu matic

Nyní vyslovíme sérii tvrzení, která nám pomohou dokázat další důležitou vlastnost determinantů – determinant součinu matic je roven součinu determinantů jednotlivých matic.

Lemma 2.26. *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Předpokládejme, že $\mathbb{M}$ vznikla z jednotkové matice $\mathbb{I}_n$ nějakou ekvivalentní řádkovou úpravou. Pak platí, že* $\det(\mathbb{M}\mathbb{A}) = \det\mathbb{M}\det\mathbb{A}$.

Důkaz. Označme $\mathbb{B} = \mathbb{M}\mathbb{A}$. Podle lemmatu 1.7 vznikla $\mathbb{B}$ z $\mathbb{A}$ stejnou řádkovou úpravou jako $\mathbb{M}$ z $\mathbb{I}_n$. S využitím věty 2.21 vidíme, že při provedení jednotlivých EŘÚ máme následující vztahy mezi determinanty:

1. Vznikla-li $\mathbb{M}$ z $\mathbb{I}_n$ vynásobením řádku nenulovým číslem α, pak $\det\mathbb{B} = \alpha\det\mathbb{A}$ a $\det\mathbb{M} = \alpha\det\mathbb{I}_n = \alpha$.
2. Vznikla-li $\mathbb{M}$ z $\mathbb{I}_n$ záměnou dvou řádků, pak $\det\mathbb{B} = -\det\mathbb{A}$ a $\det\mathbb{M} = -\det\mathbb{I}_n = -1$.
3. Vznikla-li $\mathbb{M}$ z $\mathbb{I}_n$ přičtením násobku jiného řádku k vybranému řádku, pak $\det\mathbb{B} = \det\mathbb{A}$ a $\det\mathbb{M} = \det\mathbb{I}_n = 1$.

Ve všech třech případech tudíž platí, že $\det\mathbb{B} = \det\mathbb{M}\det\mathbb{A}$. □

Věta 2.27 (Ekvivalentní řádkové úpravy a determinant matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. *Předpokládejme, že* $\mathbb{M}$ *vznikla z jednotkové matice* $\mathbb{I}_n$ *konečným počtem ekvivalentních řádkových úprav. Pak* $\det(\mathbb{MA}) = \det \mathbb{M} \det \mathbb{A}$.

Důkaz. Nechť $\mathbb{M}_i$ je matice, která vznikla z $\mathbb{I}_n$ provedením i-té EŘÚ. Pak podle lemmatu 1.7 platí $\mathbb{M} = \mathbb{M}_k\mathbb{M}_{k-1} \dots \mathbb{M}_2\mathbb{M}_1\mathbb{I}_n$. Opakovanou aplikací lemmatu 2.26 dostaneme:

$$\det \mathbb{M} = \det \mathbb{M}_k \det \mathbb{M}_{k-1} \dots \det \mathbb{M}_2 \det \mathbb{M}_1 \det \mathbb{I}_n = \det \mathbb{M}_k \det \mathbb{M}_{k-1} \dots \det \mathbb{M}_2 \det \mathbb{M}_1.$$

Zároveň $\mathbb{MA} = \mathbb{M}_k\mathbb{M}_{k-1} \dots \mathbb{M}_2\mathbb{M}_1\mathbb{A}$, proto opět opakovanou aplikací lemmatu 2.26 dostaneme $\det(\mathbb{MA}) = \det \mathbb{M}_k \det \mathbb{M}_{k-1} \dots \det \mathbb{M}_2 \det \mathbb{M}_1 \det \mathbb{A}$. Tím je dokázáno, že $\det(\mathbb{MA}) = \det \mathbb{M} \det \mathbb{A}$. ☐

Poznámka 2.28. Z důkazu předchozí věty plyne, že determinant matice, která vznikne z $\mathbb{I}$ konečným počtem EŘÚ, je nenulový. Je totiž součinem determinantů matic, které vznikly jednou řádkovou úpravou z $\mathbb{I}$. Tyto determinanty jsou rovny -1 (záměna řádků), 1 (přičtení násobku jednoho řádku k jinému) nebo α (vynásobení řádku nenulovým číslem α).

Věta 2.29 (Regulární matice a determinant)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. *Potom* $\mathbb{A}$ *je regulární, právě když* $\det \mathbb{A} \neq 0$.

Důkaz.

- ($\Rightarrow$): Nechť $\mathbb{A}$ je regulární, pak $\mathbb{A}$ lze převést EŘÚ na $\mathbb{I}$, tj. existuje matice $\mathbb{M}$ vzniklá z $\mathbb{I}$ řádkovými úpravami taková, že $\mathbb{MA} = \mathbb{I}$. Podle věty 2.27 platí, že $\det \mathbb{M} \det \mathbb{A} = \det \mathbb{I} = 1$. Odtud je jasné, že $\det \mathbb{A} \neq 0$.

- ($\Leftarrow$): Matici $\mathbb{A}$ lze převést EŘÚ na matici $\tilde{\mathbb{A}}$ v horním stupňovitém tvaru. Existuje tedy $\mathbb{M}$ vzniklá z $\mathbb{I}$ řádkovými úpravami taková, že $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{MA}$. Podle věty 2.27 a poznámky 2.28 platí, že $\det \tilde{\mathbb{A}} = \det \mathbb{M} \det \mathbb{A} \neq 0$. Čtvercová matice v horním stupňovitém tvaru s nenulovým determinantem má na diagonále pouze nenulová čísla. Tudíž $\tilde{\mathbb{A}}$ má samé hlavní sloupce a hodnost rovnou n. Odtud už plyne, že $h(\mathbb{A}) = n$, tudíž $\mathbb{A}$ je regulární. ☐

Věta 2.30 (Determinant součinu matic)**.** *Jsou-li* $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$, *pak platí:*

$$\det(\mathbb{AB}) = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}.$$

Důkaz. Rozdělíme důkaz na dva případy.

(a) Je-li $\mathbb{A}$ singulární, potom $\mathbb{AB}$ je také singulární. Z věty 2.29 plyne, že $\det \mathbb{A} = 0$ a $\det(\mathbb{AB}) = 0$. Tvrzení tedy platí.

(b) Je-li $\mathbb{A}$ regulární, pak $\mathbb{A}^{-1}$ je také regulární, a lze ji tedy převést EŘÚ na $\mathbb{I}$, tj. existuje matice $\mathbb{M}$ vzniklá řádkovými úpravami z $\mathbb{I}$ taková, že $\mathbb{I} = \mathbb{MA}^{-1}$. Odtud vidíme, že $\mathbb{A} = \mathbb{M}$, a podle věty 2.27 platí, že $\det(\mathbb{AB}) = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}$. ☐

Věta 2.31 (Determinant inverzní matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A}$ *je regulární matice, pak platí:*

$$\det(\mathbb{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathbb{A}}.$$

Důkaz. Jelikož $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$, dostáváme podle věty 2.30 o determinantu součinu matic rovnost:

$$\det \mathbb{A} \det(\mathbb{A}^{-1}) = \det \mathbb{I} = 1.$$ □

Příklad 2.32. Spočítejte $\det(\mathbb{A}^{-1})$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Z věty 2.31 víme, že stačí najít převrácenou hodnotu k $\det \mathbb{A}$.

$$\det \mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Výsledek je tudíž $\det(\mathbb{A}^{-1}) = -\frac{1}{2}$. Najděte také $\mathbb{A}^{-1}$ úplnou Gaussovou eliminací a ověřte, že opravdu $\det \mathbb{A}^{-1} = -\frac{1}{2}$.

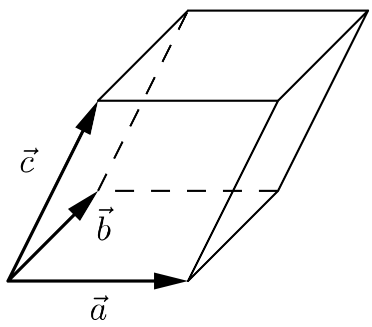
Úkol 2.33 (Geometrický význam determinantu)**.** ** Ověřte následující vztahy pro obsahy a objemy. Nepoužívejte skalární ani vektorový součin. Hvězdičky patří k části (b).

(a) Nechť je dán trojúhelník v $\mathbb{R}^2$ určený vrcholy $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Pak pro jeho obsah platí:

$$S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \right|.$$

(b) Nechť je dán rovnoběžnostěn určený vrcholy $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ a $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, tj. uvažujeme množinu $\{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1\rangle\}$. Ilustrace je na obrázku 2. Potom pro jeho objem platí:

$$V = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right|.$$



Obrázek 2: Rovnoběžnostěn.

2.4 Rozvoj determinantu

Metoda rozvoje podle řádku či sloupce, také známá jako Laplaceova formule, [8] se bude hodit pro výpočet determinantu matice, která obsahuje hodně nulových prvků. Dále ji využijeme k hledání inverzní matice a řešení soustavy LAR pomocí Cramerova pravidla. Nejprve ale potřebujeme znát pojem algebraického doplňku.

Definice 2.34. Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, kde $n > 1$. Označme $\mathbb{A}^{(i,j)}$ matici, která vznikne z $\mathbb{A}$ vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak číslo

$$D_{ij} := (-1)^{i+j} \det \mathbb{A}^{(i,j)}$$

nazveme **algebraickým doplňkem** prvku $\mathbb{A}_{ij}$. [9]

Příklad 2.35. Najděte algebraické doplňky všech prvků matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$D_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad D_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad D_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad D_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad D_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$D_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad D_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad D_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Věta 2.36 (Rozvoj determinantu podle řádku či sloupce)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. Pak platí pro každé $i \in \hat{n}$:*

$$\det \mathbb{A} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{ij} D_{ij} \quad \textit{(rozvoj podle i-tého řádku)},$$

[8] Pierre-Simon de Laplace [výslovnost „d laplas“] (1749–1827), francouzský matematik, fyzik, astronom a politik

[9] Algebraickému doplňku se někdy říká kofaktor.

respektive pro každé $j \in \widehat{n}$:

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{A}_{ij} D_{ij} \quad \textit{(rozvoj podle } j\textit{-tého sloupce).}$$

K důkazu využijeme pomocné lemma.

Lemma 2.37. *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. Nechť má $\mathbb{A}$ v i-tém řádku samé nulové prvky kromě $\mathbb{A}_{ik}$, tj. $\mathbb{A}_{i\ell} = 0$ pro každé $\ell \in \widehat{n}$, $\ell \neq k$. Pak platí* $\det \mathbb{A} = \mathbb{A}_{ik} D_{ik}$.

Důkaz. Rozdělíme důkaz na dva případy.

(a) Pro $i = k = n$ plyne z definice $\det \mathbb{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \mathbb{A}_{1\pi(1)} \mathbb{A}_{2\pi(2)} \dots \mathbb{A}_{n\pi(n)}$, že členy odpovídající permutacím π, pro které $\pi(n) \neq n$, jsou nulové. Navíc platí, že permutace

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-1 & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(n-1) & n \end{pmatrix} \in S_n \text{ a } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-1 \\ \pi(1) & \dots & \pi(n-1) \end{pmatrix} \in S_{n-1}$$

mají stejné znaménko. Odtud dostáváme:

$$\det \mathbb{A} = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \mathbb{A}_{1\sigma(1)} \mathbb{A}_{2\sigma(2)} \dots \mathbb{A}_{(n-1)\sigma(n-1)} \mathbb{A}_{nn} = \mathbb{A}_{nn} \det \mathbb{A}^{(n,n)} = \mathbb{A}_{nn} D_{nn}.$$

(b) Pro $(i, k) \neq (n, n)$ provedeme postupně záměnu i. a $(i+1)$. řádku, poté $(i+1)$. a $(i+2)$. řádku, ..., až po záměnu $(n-1)$. a n. řádku. Tak dopravíme i-tý řádek na poslední místo. Celkem tedy provedeme $n - i$ záměn. Podobným způsobem uděláme z k-tého sloupce poslední. Vyrobíme tak matici, která splňuje podmínku z prvního bodu důkazu. Podle pravidel o záměnách řádků a sloupců dostaneme:

$$\det \mathbb{A} = (-1)^{n-i}(-1)^{n-k} \mathbb{A}_{ik} \det \mathbb{A}^{(i,k)} = (-1)^{i+k} \mathbb{A}_{ik} \det \mathbb{A}^{(i,k)} = \mathbb{A}_{ik} D_{ik}. \qquad \square$$

Důkaz věty 2.36. Dokážeme tvrzení o rozvoji podle i-tého řádku. Tvrzení o rozvoji podle j-tého sloupce se dokáže analogicky. Označme ${}^i\mathbb{A}^j$ matici, která se shoduje s maticí $\mathbb{A}$, pouze v i-tém řádku má kromě prvku $\mathbb{A}_{ij}$ samé nuly. Pro takovou matici víme podle lemmatu 2.37, že $\det({}^i\mathbb{A}^j) = \mathbb{A}_{ij} D_{ij}$. Díky pátému bodu věty 2.21 (verze pro řádky) platí, že $\det \mathbb{A} = \sum_{j=1}^{n} \det({}^i\mathbb{A}^j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{ij} D_{ij}$. $\square$

Příklad 2.38. Spočtěte determinant matice $\mathbb{A}$ rozvojem podle řádků či sloupců.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Začneme rozvojem podle prvního řádku.

$$\det \mathbb{A} \;=\; 5(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

První dva determinanty jsou nulové, protože příslušné matice mají LZ sloupce. Dopočteme determinant rozvojem podle posledního sloupce.

$$\det \mathbb{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 + 1 = 6.$$

K výpočtu inverzní matice pomocí algebraických doplňků je třeba zavést pojem adjungovaná matice. [10]

Definice 2.39. Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. **Adjungovanou maticí** k $\mathbb{A}$ nazveme matici $\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}$ splňující pro každé $i, j \in \hat{n}$:

$$[\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}]_{ij} := D_{ji}.$$

Věta 2.40 (Inverzní a adjungovaná matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$.

1. *Platí rovnost* $(\det \mathbb{A})\mathbb{I} = \mathbb{A}^{\mathrm{adj}}\mathbb{A}$.
2. *Pokud* $\mathbb{A}$ *je regulární, pak platí, že* $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}}\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}$.

Důkaz.

1. Nechť $i, j \in \hat{n}$. Pak platí:

$$[\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}\mathbb{A}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} D_{ki}\mathbb{A}_{kj}.$$

- Pro $i = j$ aplikujeme větu 2.36 a máme:

$$[\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}\mathbb{A}]_{ii} = \sum_{k=1}^{n} D_{ki}\mathbb{A}_{ki} = \det \mathbb{A}.$$

- Pro $i \neq j$ uvažujme matici $\mathbb{B}$, která vznikne z $\mathbb{A}$ nahrazením i-tého sloupce j-tým. Determinant matice $\mathbb{B}$ je nulový (má dva stejné sloupce), a počítáme-li $\det \mathbb{B}$ rozvojem podle i-tého sloupce, dostaneme $\det \mathbb{B} = \sum_{k=1}^{n} D_{ki}\mathbb{A}_{kj}$. Proto $[\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}\mathbb{A}]_{ij} = 0$. □

[10] Adjungovaná matice se také označuje termínem reciproká. Bohužel v názvosloví nepanuje jednotnost, a tak se setkáme i s použitím slova adjungovaná pro matici hermitovsky sdruženou. Někdy se pro adjungovanou matici používá symbol adj($\mathbb{A}$), $\mathbb{A}_{\mathrm{rec}}$ nebo dokonce $\overline{\mathbb{A}}$ (což my ovšem máme vyhrazeno pro matici komplexně sdruženou).

2. Druhé tvrzení dostaneme vynásobením obou stran rovnosti z prvního bodu maticí $\mathbb{A}^{-1}$ zprava a vydělením determinantem.

Poznámka 2.41. Vzorec pro výpočet $\mathbb{A}^{-1}$ pomocí $\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}$ má oproti úplné Gaussově eliminaci tu výhodu, že je možné vypočítat konkrétní prvek $[\mathbb{A}^{-1}]_{ij} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} D_{ji}$, aniž bychom počítali celou $\mathbb{A}^{-1}$. Nevýhodou je pomalost, náročnost výpočtu determinantů.

Příklad 2.42. Spočtěte $\det(\mathbb{A}^{\mathrm{adj}})$, znáte-li $\det \mathbb{A}$.
Řešení:

- Je-li $\mathbb{A} = \mathbb{O}$, pak je jistě $\mathbb{A}^{\mathrm{adj}} = \mathbb{O}$. Proto $\det(\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}) = 0$.
- Je-li $\mathbb{A}$ nenulová singulární matice, potom vidíme ze vztahu $(\det \mathbb{A})\mathbb{I} = \mathbb{A}^{\mathrm{adj}}\mathbb{A}$, že $\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}$ je také singulární. Kdyby byla regulární, pak by $h(\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}\mathbb{A}) = h(\mathbb{A})$ a zároveň $\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}\mathbb{A} = \mathbb{O}$. Odtud by ovšem plynulo, že $\mathbb{A} = \mathbb{O}$, což je spor s předpokladem. Celkově dostáváme, že $\det(\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}) = 0$.
- Je-li $\mathbb{A}$ regulární matice, potom získáme ze vztahu $(\det \mathbb{A})\mathbb{I} = \mathbb{A}^{\mathrm{adj}}\mathbb{A}$ rovnost $(\det \mathbb{A})^n = \det(\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}) \det \mathbb{A}$. Odtud plyne, že $\det(\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}) = (\det \mathbb{A})^{n-1}$.

Příklad 2.43. Najděte $\mathbb{A}^{-1}$ pomocí matice adjungované k $\mathbb{A}$ pro $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Algebraické doplňky prvků $\mathbb{A}$ už jsme našli v příkladu 2.35. Také máme spočteno, že $\det \mathbb{A} = -2$. Odtud plyne:

$$\mathbb{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Věta 2.44 (Cramerovo pravidlo)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, kde $n > 1$, a $\vec{b} \in T^n$. Pokud $\mathbb{A}$ je regulární matice, potom pro každé $j \in \hat{n}$ je j-tá složka řešení soustavy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ rovna:*

$$x_j = \frac{\det \mathbb{B}^{(j)}}{\det \mathbb{A}},$$

kde $\mathbb{B}^{(j)}$ je matice, která vznikne nahrazením j-tého sloupce matice $\mathbb{A}$ vektorem $\vec{b}$.

Důkaz. Z posledního bodu věty 1.5 víme, že řešení splňuje $\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}\vec{b}$. Využijeme vzorec pro výpočet inverzní matice pomocí adjungované z věty 2.40 a vypočítáme x_j. Připomeňme, že $\mathbb{A}_{j\bullet}$ značí j-tý řádek matice $\mathbb{A}$.

$$x_j = [\mathbb{A}^{-1}]_{j\bullet}\vec{b} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \sum_{k=1}^{n} [\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}]_{jk} b_k = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \sum_{k=1}^{n} b_k D_{kj} = \frac{\det \mathbb{B}^{(j)}}{\det \mathbb{A}},$$

přičemž v poslední rovnosti jsme využili rozvoje $\det \mathbb{B}^{(j)}$ podle j-tého sloupce. $\square$

Poznámka 2.45. Výhodou Cramerova pravidla [11] oproti Gaussově eliminaci je možnost vypočíst konkrétní složku řešení, aniž bychom počítali ostatní složky. Nevýhodou je opět náročnost výpočtu determinantů.

Příklad 2.46. Najděte pomocí Cramerova pravidla řešení soustavy s maticí $\mathbb{A}$ a vektorem pravé strany $\vec{b}$.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Už víme, že $\det \mathbb{A} = -2$.

$$x_1 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Řešením soustavy je tudíž $\vec{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Úkol 2.47. ** Vypočítejte Vandermondův determinant [12]

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Poté použijte Cramerovo pravidlo a Vandermondův determinant k určení vztahů, které musejí splňovat parametry $a, b, c \in \mathbb{C}$, aby následující soustava LAR měla právě jedno řešení. Toto řešení nalezněte.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & a^3 \\ x & + & by & + & b^2z & = & b^3 \\ x & + & cy & + & c^2z & = & c^3. \end{array}$$

2.5 Hodnost a subdeterminant

V této části si ukážeme souvislost hodnosti a determinantu matice. V historii byla hodnost definována nejprve pomocí determinantů, až později vznikla „naše“ současná definice. Pozor! Připouštíme nyní i obdélníkové matice (na rozdíl od předcházejícího textu této kapitoly).

[11] Gabriel Cramer (1704–1752), švýcarský matematik

[12] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796), francouzský matematik, chemik a hudebník

Definice 2.48. Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. Nechť čísla $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \widehat{m}$ a $j_1, j_2, \ldots, j_\ell \in \widehat{n}$ splňují:

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m \quad \text{a} \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_\ell \leq n.$$

Pak matici $\mathbb{A}\begin{pmatrix} i_1, \, i_2, \, \ldots, \, i_k \\ j_1, \, j_2, \, \ldots, \, j_\ell \end{pmatrix}$, jež vznikla z $\mathbb{A}$ zachováním pouze těch prvků, které mají řádkový index z $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ a zároveň sloupcový index z $\{j_1, j_2, \ldots, j_\ell\}$, nazveme **submaticí** matice $\mathbb{A}$. [13] Je-li submatice čtvercová řádu k, pak její determinant nazveme **subdeterminantem (minorem)** řádu k matice $\mathbb{A}$.

Příklad 2.49. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$. Pak $\mathbb{A}\begin{pmatrix} 2, \, 3 \\ 1, \, 3, \, 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

Věta 2.50 (Hodnost a subdeterminant)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. Pak $h(\mathbb{A}) = k$, právě když existuje nenulový subdeterminant matice $\mathbb{A}$ řádu k a zároveň je každý subdeterminant vyššího řádu nulový.*

Důkaz.

- $(\Rightarrow)$: Nejprve dokážeme existenci nenulového subdeterminantu řádu k.

  Jelikož $h(\mathbb{A}) = k$, existují vzájemně různé sloupcové indexy $j_1, j_2, \ldots, j_k$ takové, že $h(\mathbb{A}) = h\left(\mathbb{A}\begin{pmatrix} 1, \, 2, \, \ldots, \, m \\ j_1, \, j_2, \, \ldots, \, j_k \end{pmatrix}\right)$. Z rovnosti hodnosti matice a matice k ní transponované víme, že platí:

  $$h\left(\mathbb{A}\begin{pmatrix} 1, \, 2, \, \ldots, \, m \\ j_1, \, j_2, \, \ldots, \, j_k \end{pmatrix}\right) = h\left(\left(\mathbb{A}\begin{pmatrix} 1, \, 2, \, \ldots, \, m \\ j_1, \, j_2, \, \ldots, \, j_k \end{pmatrix}\right)^T\right).$$

  Protože je jedno, zda nejprve škrtáme sloupce a pak transponujeme, nebo nejprve transponujeme a pak škrtáme příslušné řádky, platí také:

  $$\left(\mathbb{A}\begin{pmatrix} 1, \, 2, \, \ldots, \, m \\ j_1, \, j_2, \, \ldots, \, j_k \end{pmatrix}\right)^T = \mathbb{A}^T\begin{pmatrix} j_1, \, j_2, \, \ldots, \, j_k \\ 1, \, 2, \, \ldots, \, m \end{pmatrix}.$$

  Hodnost $\mathbb{A}^T\begin{pmatrix} j_1, \, j_2, \, \ldots, \, j_k \\ 1, \, 2, \, \ldots, \, m \end{pmatrix}$ je rovna k, existují tedy indexy $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \widehat{m}$ takové, že $k = h\left(\mathbb{A}^T\begin{pmatrix} j_1, \, j_2, \, \ldots, \, j_k \\ i_1, \, i_2, \, \ldots, \, i_k \end{pmatrix}\right)$. Opět ze zachování hodnosti při transpozici dostáváme $k = h\left(\mathbb{A}\begin{pmatrix} i_1, \, i_2, \, \ldots, \, i_k \\ j_1, \, j_2, \, \ldots, \, j_k \end{pmatrix}\right)$. Tudíž submatice $\mathbb{A}\begin{pmatrix} i_1, \, i_2, \, \ldots, \, i_k \\ j_1, \, j_2, \, \ldots, \, j_k \end{pmatrix}$ je regulární a podle věty 2.29 je její determinant hledaným nenulovým subdeterminantem řádu k.

[13] Používá se i českému uchu lépe znějící pojem podmatice.

Nyní ověříme nulovost subdeterminantů vyšších řádů.

Je-li $\ell > k$, pak lze pro libovolné řádkové indexy $i_1, i_2, \dots, i_\ell$ a sloupcové indexy $j_1, j_2, \dots, j_\ell$ podobnými argumenty jako v předchozím bodě (definice hodnosti a zachování hodnosti při transpozici) ověřit, že platí:

$$h\left(\mathbb{A}\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_\ell \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_\ell \end{pmatrix}\right) \leq h(\mathbb{A}) = k.$$

Libovolná submatice řádu vyššího než k je tudíž singulární, a proto má nulový determinant.

- ($\Leftarrow$): Nechť $\det(\mathbb{A}\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_k \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_k \end{pmatrix}) \neq 0$, pak dostáváme:

$$k = h\left(\mathbb{A}\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_k \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_k \end{pmatrix}\right) \leq h(\mathbb{A}).$$

Zároveň $h(\mathbb{A}) < k + 1$. Kdyby totiž platilo $h(\mathbb{A}) \geq k + 1$, pak by podle již dokázané implikace existoval nenulový subdeterminant řádu většího než k, což je spor s předpokladem. □

2.6 Determinant operátoru

Definice 2.51. Nechť V_n je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X}$ je libovolná báze V_n a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Pak **determinant operátoru** A značíme $\det A$ a klademe jej roven $\det A := \det({}^{\mathcal{X}}A)$.

Poznámka 2.52. Je třeba ověřit korektnost definice, tedy nezávislost na volbě báze. Je-li $\mathcal{Y}$ také báze V_n, pak ${}^{\mathcal{X}}A = ({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})({}^{\mathcal{Y}}A)({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}})$. Podle věty o matici složeného zobrazení víme, že matice ${}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}$ a ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$ jsou k sobě inverzní (platí totiž ${}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}\,{}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}I = \mathbb{I}$). Proto dostáváme užitím věty 2.31:

$$\det({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})\det({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}) = 1.$$

Nakonec podle věty 2.30 máme:

$$\det({}^{\mathcal{X}}A) = \det\left(({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})({}^{\mathcal{Y}}A)({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}})\right) = \det({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})\det({}^{\mathcal{Y}}A)\det({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}) = \det({}^{\mathcal{Y}}A).$$

Úkol 2.53. Pro operátory platí podobná tvrzení jako pro matice. Dokažte je.

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Potom A je regulární, právě když $\det A \neq 0$.

2. Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V_n)$. Pak $\det(AB) = \det A \det B$.

3. Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$ a A je regulární. Potom $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Úkol 2.54. * Definujme operátor, který je analogií adjungované matice. Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$ a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Potom $A^{\mathrm{adj}} \in \mathcal{L}(V_n)$ je definován pomocí své matice v bázi $\mathcal{X}$ jako ${}^{\mathcal{X}}(A^{\mathrm{adj}}) := ({}^{\mathcal{X}}A)^{\mathrm{adj}}$. Ověřte korektnost takové definice, tedy nezávislost na volbě báze, a zkoumejte vlastnosti operátoru A^{adj}.

Vraťme se na závěr kapitoly k motivačnímu textu. Hledali jsme rovnici sféry procházející body: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$. Jinak řečeno: Zjišťovali jsme, zda existují čísla $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ splňující:

$$\begin{array}{rcccccccccl} A(a_1^2+a_2^2+a_3^2) & + & Ba_1 & + & Ca_2 & + & Da_3 & + & E & = & 0 \\ A(b_1^2+b_2^2+b_3^2) & + & Bb_1 & + & Cb_2 & + & Db_3 & + & E & = & 0 \\ A(c_1^2+c_2^2+c_3^2) & + & Bc_1 & + & Cc_2 & + & Dc_3 & + & E & = & 0 \\ A(d_1^2+d_2^2+d_3^2) & + & Bd_1 & + & Cd_2 & + & Dd_3 & + & E & = & 0. \end{array}$$

Řešení: Spolu s rovnicí sféry $A(x^2+y^2+z^2)+Bx+Cy+Dz+E=0$ obdržíme soustavu pěti rovnic pro pět neznámých. Víme, že čtvercová homogenní soustava LAR má netriviální řešení právě tehdy, když má její matice nulový determinant. Musí tedy platit:

$$\begin{vmatrix} (x^2+y^2+z^2) & x & y & z & 1 \\ (a_1^2+a_2^2+a_3^2) & a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ (b_1^2+b_2^2+b_3^2) & b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ (c_1^2+c_2^2+c_3^2) & c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ (d_1^2+d_2^2+d_3^2) & d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sféra procházející body $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ se tudíž získá úpravou determinantu:

$$\begin{vmatrix} (x^2+y^2+z^2) & x & y & z & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rovnice sféry má tvar:

$$x^2+y^2+z^2+9x+7y+z-10=0.$$

3 Spektrální teorie

Pod označením „spektrální teorie“ budeme rozumět vlastní čísla neboli spektrum, vlastní vektory a diagonalizovatelnost matic a operátorů. Měli bychom spíše říkat „úvod do spektrální teorie“, protože spektrum operátorů ve vektorových prostorech nekonečné dimenze je definováno obecněji. Vlastní čísla tvoří jen část spektra, říká se jí bodové (též diskrétní) spektrum. Ale spektrum může mít i část spojitou a reziduální, jak se dozvíte ve funkcionální analýze.

Motivace. Spektrální teorie má velmi širokou škálu uplatnění. Pro ilustraci uvedeme jen několik oblastí, ale sami uvidíte v budoucnu, že se s vlastními čísly a vlastními vektory matic a operátorů budete setkávat na každém kroku. V matematice využijete spektrální teorii při vyšetřování charakteru kvadratických forem, při řešení obyčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, v iteračních metodách, v teorii grafů atd. V kvantové mechanice popisují vlastní vektory Schrödingerova operátoru stacionární stavy elektronů v atomech. Vlastní číslo pak odpovídá vlastní energii. U oscilátorů je velmi důležitá vlastní frekvence kmitů, která souvisí s rezonancí (např. při konstrukci mostů je třeba umět počítat vlastní čísla). Spektrální teorie se dále aplikuje v analýze vibrací, zpracování obrazu, ale třeba i při určování rychlosti šíření epidemií.

Nejprve se budeme věnovat spektrální teorii matic, která je trochu jednodušší než spektrální teorie operátorů, jelikož nevyžaduje hlídání tělesa. Matice totiž automaticky považujeme za prvky prostoru $\mathbb{C}^{n,n}$.

3.1 Vlastní čísla a vlastní vektory matic

Definice 3.1. Nechť je dána matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazveme **vlastním číslem** matice $\mathbb{A}$, pokud existuje vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, takový, že $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vektor $\vec{x}$ nazveme **vlastním vektorem** matice $\mathbb{A}$ příslušným vlastnímu číslu λ. Množinu vlastních čísel matice $\mathbb{A}$ nazveme **spektrem** matice $\mathbb{A}$ a značíme $\sigma(\mathbb{A})$. **Vlastním podprostorem** matice $\mathbb{A}$ příslušným vlastnímu číslu λ rozumíme $P_\lambda \coloneqq \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$, tj. P_λ je množina vlastních vektorů $\mathbb{A}$ příslušných λ s přidáním nulového vektoru. [14]

Poznámka 3.2. Matice s reálnými prvky nemusí mít reálná vlastní čísla. Například $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ má vlastní číslo i s vlastním vektorem $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$, protože

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[14] V angličtině se používají názvy eigenvalue, eigenvector a eigenspace [výslovnost „ajgn-“] popořadě pro vlastní číslo, vlastní vektor a vlastní podprostor. Ovšem názvosloví ovlivnil německý matematik David Hilbert (1862–1943).

Věta 3.3 (LK vlastních vektorů)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *a* $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$*. Pak* $P_\lambda \subset\subset \mathbb{C}^n$*. Navíc* $\{\mathbb{A}\vec{x} \mid \vec{x} \in P_\lambda\} \subset P_\lambda$*.*

Důkaz. $P_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = \vec{0}\}$, tj. P_λ je množinou řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}$, proto z Frobeniovy věty plyne, že $P_\lambda \subset\subset \mathbb{C}^n$. Jelikož $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \in P_\lambda$ pro každé $\vec{x} \in P_\lambda$, platí i druhé tvrzení. □

Definice 3.4. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Potom **geometrickou násobností** vlastního čísla λ nazveme $\nu_g(\lambda) := \dim P_\lambda$.
Slovy: „Geometrická násobnost vlastního čísla λ je počet LN vlastních vektorů $\mathbb{A}$ příslušných λ."

Hledat vlastní vektory $\mathbb{A}$ příslušné vlastnímu číslu λ znamená řešit homogenní soustavu s maticí $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}$. Ještě je třeba vědět, jak efektivně hledat vlastní čísla. K tomu potřebujeme definovat charakteristický polynom matice $\mathbb{A}$.

Definice 3.5. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Zobrazení $p_\mathbb{A} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované pro každé $t \in \mathbb{C}$ jako $p_\mathbb{A}(t) = \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I})$ nazýváme **charakteristickým polynomem** matice $\mathbb{A}$.

Věta 3.6 (Vlastnosti charakteristického polynomu)**.** *Nechť* $p_\mathbb{A}$ *je charakteristický polynom matice* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$*. Potom platí:*

1. $p_\mathbb{A}$ *je polynom.*

2. *Stupeň* $p_\mathbb{A}$ *je* n *a koeficient u členu nejvyššího stupně* t^n *v* $p_\mathbb{A}(t)$ *je* $(-1)^n$*.*

3. *Konstantní člen polynomu* $p_\mathbb{A}$ *je roven* $\det \mathbb{A}$*.*

Důkaz.

1. Podle definice obsahuje každý člen determinantu $p_\mathbb{A}(t)$ součin n prvků matice $\mathbb{A} - t\mathbb{I}$ opatřený znaménkem odpovídající permutace. Každý člen je tedy sám o sobě polynomem v proměnné t. Členy determinantu se pak sčítají, tedy výsledný determinant $p_\mathbb{A}(t)$ je opět polynomem v proměnné t.

2. Nejvyšší mocnina t se vyskytuje ve členu determinantu $p_\mathbb{A}(t) = \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I})$ odpovídajícím identické permutaci, tedy ve členu $(\mathbb{A}_{11} - t)(\mathbb{A}_{22} - t) \dots (\mathbb{A}_{nn} - t)$. Jde o mocninu t^n a objevuje se s koeficientem $(-1)^n$. Proto má $p_\mathbb{A}$ stupeň n.

3. Označme $p_\mathbb{A}(t) = (-1)^n t^n + \beta_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \beta_1 t + \beta_0$. Pak $p_\mathbb{A}(0) = \beta_0$. Zároveň podle definice charakteristického polynomu máme $p_\mathbb{A}(0) = \det(\mathbb{A} - 0\mathbb{I}) = \det \mathbb{A}$. Tedy konstantní člen β_0 je roven $\det \mathbb{A}$. □

Úkol 3.7. Součet diagonálních prvků matice $\mathbb{A}$ nazýváme její **stopou** a značíme $\mathrm{Tr}(\mathbb{A})$. [15]

1. Je-li $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, dokažte, že $\beta_{n-1} = (-1)^n \mathrm{Tr}(\mathbb{A})$, kde β_{n-1} je koeficient u t^{n-1} v charakteristickém polynomu $p_{\mathbb{A}}$.

2. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{3,3}$. Dokažte, že mezi stopou a charakteristickým polynomem platí pro každé $t \in \mathbb{C}$ vztah $p_{\mathbb{A}}(t) = -t^3 + t^2\mathrm{Tr}(\mathbb{A}) - \frac{1}{2}t\left((\mathrm{Tr}(\mathbb{A}))^2 - \mathrm{Tr}(\mathbb{A}^2)\right) + \det\mathbb{A}$, přičemž $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A}$.

Věta 3.8 (Vlastní čísla a charakteristický polynom)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. *Pak* $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, *právě když* $p_{\mathbb{A}}(\lambda) = 0$.
Slovy: „λ je vlastním číslem $\mathbb{A}$, právě když λ je kořenem charakteristického polynomu.“

Důkaz. $\lambda \in \sigma(\mathbb{A}) \Leftrightarrow$ existuje nenulové $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ tak, že $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow$ existuje nenulové $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ tak, že $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow$ homogenní soustava s maticí $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$ má netriviální řešení $\Leftrightarrow$ matice $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$ je singulární $\Leftrightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0 \Leftrightarrow p_{\mathbb{A}}(\lambda) = 0$. □

Příklad 3.9. Najděte vlastní čísla a všechny k nim příslušné vlastní vektory matice $\mathbb{A}$, je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

- Vlastní čísla:
$$p_{\mathbb{A}}(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & -1 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & -t \end{vmatrix} = -t(1-t)^2, \text{ proto } \sigma(\mathbb{A}) = \{0, 1\}.$$

- Vlastní vektory $\mathbb{A}$ příslušné nule řeší homogenní soustavu s maticí $\mathbb{A} - 0\mathbb{I} = \mathbb{A}$. Z Frobeniovy věty plyne, že dimenze množiny řešení $\nu_g(0) = 1$ a množina všech řešení je $P_0 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$. Vlastními vektory $\mathbb{A}$ příslušnými nule jsou tudíž všechny nenulové násobky vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Vlastní vektory $\mathbb{A}$ příslušné jedničce řeší homogenní soustavu s maticí
$$\mathbb{A} - 1\mathbb{I} = \mathbb{A} - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[15] Značení $\mathrm{Tr}(\mathbb{A})$ pochází ze slova trace, což je anglicky stopa. Lze se setkat i se symbolem $\mathrm{Sp}(\mathbb{A})$ z německého Spur.

Z Frobeniovy věty plyne, že $\nu_g(1) = 2$ a množina všech řešení je $P_1 = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

Vlastními vektory $\mathbb{A}$ příslušnými jedničce jsou netriviální LK vektorů $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Definice 3.10. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. **Algebraickou násobností** $\nu_a(\lambda)$ vlastního čísla λ nazveme násobnost λ jakožto kořene charakteristického polynomu $p_\mathbb{A}$. [16]

Poznámka 3.11. Nechť je dána matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Jelikož je součet násobností v rozkladu polynomu na kořenové činitele roven stupni polynomu, platí:

$$\sum_{\lambda \in \sigma(\mathbb{A})} \nu_a(\lambda) = n.$$

Věta 3.12 (Vlastní čísla a determinant)**.** *Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou všechna vzájemně různá vlastní čísla matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak platí:*

$$\det \mathbb{A} = \lambda_1^{\nu_a(\lambda_1)} \lambda_2^{\nu_a(\lambda_2)} \ldots \lambda_k^{\nu_a(\lambda_k)}.$$

Slovy: „Determinant $\mathbb{A}$ je součinem vlastních čísel $\mathbb{A}$ (braných včetně násobností).“

Důkaz. Jelikož kořeny $p_\mathbb{A}$ jsou právě vlastní čísla, tj. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, a koeficient u nejvyšší mocniny t^n je $(-1)^n$, má rozklad na kořenové činitele tvar:

$$p_\mathbb{A}(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{\nu_a(\lambda_1)} (t - \lambda_2)^{\nu_a(\lambda_2)} \ldots (t - \lambda_k)^{\nu_a(\lambda_k)}.$$

Z něj vidíme, že $p_\mathbb{A}(0) = \lambda_1^{\nu_a(\lambda_1)} \lambda_2^{\nu_a(\lambda_2)} \ldots \lambda_k^{\nu_a(\lambda_k)}$. Z definice $p_\mathbb{A}$ poté již plyne, že $\det \mathbb{A} = \lambda_1^{\nu_a(\lambda_1)} \lambda_2^{\nu_a(\lambda_2)} \ldots \lambda_k^{\nu_a(\lambda_k)}$. □

Důsledek 3.13 (Vlastní čísla a regularita matice)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Matice $\mathbb{A}$ je regulární, právě když $0 \notin \sigma(\mathbb{A})$.*

Důkaz. Stačí uvážit, že podle věty 3.12 je $\det \mathbb{A}$ roven součinu vlastních čísel a že $\mathbb{A}$ je regulární, právě když $\det \mathbb{A} \neq 0$. □

Úkol 3.14. Dokažte následující tvrzení: Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou všechna vzájemně různá vlastní čísla matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak platí, že $\mathrm{Tr}(\mathbb{A}) = \nu_a(\lambda_1)\lambda_1 + \nu_a(\lambda_2)\lambda_2 + \ldots + \nu_a(\lambda_k)\lambda_k$. Slovy: „Stopa $\mathbb{A}$ je součtem vlastních čísel $\mathbb{A}$ (braných včetně násobností).“

Věta 3.15 (Vlastní čísla trojúhelníkové matice)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\mathbb{A}$ je horní (nebo dolní) trojúhelníková matice. Pak vlastní čísla jsou rovna jejím diagonálním prvkům.*

Důkaz. Pro horní (dolní) trojúhelníkovou matici víme z věty 2.20 o determinantu trojúhelníkové matice, že $p_\mathbb{A}(t) = \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I}) = (\mathbb{A}_{11} - t)(\mathbb{A}_{22} - t) \ldots (\mathbb{A}_{nn} - t)$. Odtud již tvrzení plyne užitím věty 3.8. □

[16] V literatuře se někdy značí $\mu_\mathbb{A}$ algebraická a $\gamma_\mathbb{A}$ geometrická násobnost.

Věta 3.16 (Algebraická a geometrická násobnost). *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí:*

$$\nu_a(\lambda) \geq \nu_g(\lambda).$$

Důkaz. Označme $k = \nu_g(\lambda)$. Podle definice geometrické násobnosti umíme najít k vlastních vektorů příslušných λ, které jsou LN. Označme je $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$. Doplňme vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ na bázi $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ prostoru $\mathbb{C}^n$. Vytvořme matici $\mathbb{X}$ mající sloupce $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$. Taková matice je jistě regulární, neboť má LN sloupce. Proto existuje $\mathbb{X}^{-1}$. Podle věty 2.30 o determinantu součinu matic a věty 2.31 o determinantu inverzní matice platí:

$$p_{\mathbb{A}}(t) = \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I}) = \det\left(\mathbb{X}^{-1}(\mathbb{A} - t\mathbb{I})\mathbb{X}\right).$$

Jelikož $\mathbb{A}\vec{x}_i = \lambda\vec{x}_i$ pro každé $i \in \widehat{k}$, je prvních k sloupců matice $\mathbb{X}^{-1}(\mathbb{A} - t\mathbb{I})\mathbb{X}$ tvořeno vektory $(\lambda - t)\vec{e}_1, (\lambda - t)\vec{e}_2, \ldots, (\lambda - t)\vec{e}_k$, přičemž $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ jsou vektory ze standardní báze $\mathbb{C}^n$. Když pro výpočet $\det(\mathbb{X}^{-1}(\mathbb{A} - t\mathbb{I})\mathbb{X})$ opakovaně použijeme rozvoj podle prvního sloupce, dostaneme:

$$\det\left(\mathbb{X}^{-1}(\mathbb{A} - t\mathbb{I})\mathbb{X}\right) = (\lambda - t)^k q(t),$$

kde $q(t)$ je determinant matice, která zbude z $\mathbb{X}^{-1}(\mathbb{A} - t\mathbb{I})\mathbb{X}$ po vyškrtání prvních k řádků a sloupců. Z rovnosti $p_{\mathbb{A}}(t) = (\lambda - t)^k q(t)$ je jasné, že $\nu_a(\lambda) \geq k = \nu_g(\lambda)$. □

Poznámka 3.17. Je-li λ vlastní číslo $\mathbb{A}$, pak zřejmě $\nu_a(\lambda) \geq 1$ a $\nu_g(\lambda) \geq 1$. Podle věty 3.16 dostáváme, že jakmile $\nu_a(\lambda) = 1$, pak také $\nu_g(\lambda) = 1$.

Věta 3.18 (LN vlastních vektorů). *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou vzájemně různá vlastní čísla a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ jsou jim příslušné vlastní vektory matice $\mathbb{A}$. Pak $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ jsou LN.*

Důkaz. Dokážeme tvrzení sporem. Předpokládejme, že $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ jsou LZ. Pak podle alternativní definice LZ je buď $\vec{x}_1 = \vec{0}$ (to ale nenastává, protože $\vec{x}_1$ je vlastní vektor), nebo existuje $j \in \widehat{k}$, $j \geq 2$, a čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}$ tak, že $\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \vec{x}_i$. Uvažujme nejmenší takové j. Potom je zřejmé, že $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{j-1}$ jsou LN. Dále jistě platí, že $\lambda_j \vec{x}_j = \mathbb{A}\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \mathbb{A}\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \lambda_i \vec{x}_i$. Zároveň $\lambda_j \vec{x}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \lambda_j \vec{x}_i$. Odtud dostáváme:

$$\sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_j)\vec{x}_i = \vec{0}.$$

Jelikož $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro každé $i \in \widehat{j-1}$, plyne z LN vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{j-1}$, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \widehat{j-1}$. Odtud dále vidíme, že $\vec{x}_j = \vec{0}$. To je ovšem spor s předpokladem, že $\vec{x}_j$ je vlastní, tedy nenulový vektor. □

Věta 3.19 (Báze z vlastních vektorů). *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. V prostoru $\mathbb{C}^n$ existuje báze z vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$ právě tehdy, když pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí, že $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.*

Důkaz.

- ($\Rightarrow$): Nechť $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ je báze $\mathbb{C}^n$ tvořená vlastními vektory $\mathbb{A}$. Označme $\ell(\lambda)$ počet vektorů báze, které přísluší vlastnímu číslu λ. Protože počet LN vlastních vektorů příslušných λ může být maximálně $\nu_g(\lambda)$, platí:
$$\ell(\lambda) \leq \nu_g(\lambda) \leq \nu_a(\lambda), \tag{3}$$
přičemž druhá nerovnost plyne z věty 3.16. Sčítáním nerovnosti (3) přes všechna vlastní čísla získáme:
$$n = \text{počet členů báze} = \sum_{\lambda \in \sigma(\mathbb{A})} \ell(\lambda) \leq \sum_{\lambda \in \sigma(\mathbb{A})} \nu_g(\lambda) \leq \sum_{\lambda \in \sigma(\mathbb{A})} \nu_a(\lambda) = n.$$
Poslední rovnost plyne z poznámky 3.11. Proto v obou nerovnostech nastávají rovnosti, tudíž s využitím vztahu (3) vidíme, že $\nu_g(\lambda) = \nu_a(\lambda)$.

- ($\Leftarrow$): Předpokládejme, že matice $\mathbb{A}$ má k různých vlastních čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Ke každému vlastnímu číslu λ_i lze najít $\nu_g(\lambda_i)$ vlastních vektorů $\vec{x}_1^{(i)}, \vec{x}_2^{(i)}, \dots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_i)}^{(i)}$, které jsou LN. Ukažme, že soubor vytvořený z vektorů
$$\left(\vec{x}_1^{(1)}, \vec{x}_2^{(1)}, \dots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_1)}^{(1)}, \vec{x}_1^{(2)}, \vec{x}_2^{(2)}, \dots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_2)}^{(2)}, \dots, \vec{x}_1^{(k)}, \vec{x}_2^{(k)}, \dots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_k)}^{(k)}\right)$$
tvoří bázi $\mathbb{C}^n$. Jejich počet je roven $\sum_{i=1}^k \nu_g(\lambda_i) = \sum_{i=1}^k \nu_a(\lambda_i) = n$, kde první rovnost plyne z rovností $\nu_g(\lambda) = \nu_a(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ a druhá z poznámky 3.11. Stačí proto ukázat, že vektory jsou LN. Uvažujme LK vektorů rovnou nulovému vektoru, tj.
$$\sum_{j_1=1}^{\nu_g(\lambda_1)} \alpha_{j_1}^{(1)} \vec{x}_{j_1}^{(1)} + \sum_{j_2=1}^{\nu_g(\lambda_2)} \alpha_{j_2}^{(2)} \vec{x}_{j_2}^{(2)} + \ldots + \sum_{j_k=1}^{\nu_g(\lambda_k)} \alpha_{j_k}^{(k)} \vec{x}_{j_k}^{(k)} = \vec{0}.$$
Jelikož je j-tá suma rovna LK vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu λ_j, je to buď nulový vektor, nebo jde o vlastní vektor matice $\mathbb{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ_j. Protože jsou ovšem vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům podle věty 3.18 LN, nutně nastává první možnost, tedy sumy jsou rovny nulovým vektorům. Nulovost koeficientů $\alpha_{j_i}^{(i)}$ pro každé $i \in \widehat{k}$ a každé $j_i \in \{1, \dots, \nu_g(\lambda_i)\}$ pak plyne z LN vektorů $\vec{x}_1^{(i)}, \vec{x}_2^{(i)}, \dots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_i)}^{(i)}$ pro každé $i \in \widehat{k}$. Tím je LN všech vektorů dokázána. $\square$

3.2 Diagonalizovatelnost matic

Definice 3.20. Nechť $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbb{A}$ je **podobná** matici $\mathbb{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbb{X}$ řádu n taková, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}$.

Poznámka 3.21. Podobnost je ekvivalence na množině čtvercových matic řádu n, tj. platí:

(a) Reflexivita: $\mathbb{A}$ je podobná sama sobě.

(b) Symetrie: Je-li $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$, pak $\mathbb{B}$ je podobná $\mathbb{A}$.

(c) Tranzitivita: Je-li $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$ a $\mathbb{B}$ podobná $\mathbb{C}$, pak i $\mathbb{A}$ je podobná $\mathbb{C}$.

Důkaz je ponechán čtenáři. Plyne snadno z definice podobnosti.

Věta 3.22 (Vlastnosti podobných matic)**.** *Nechť* $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *a* $\mathbb{A}$ *je podobná* $\mathbb{B}$.

1. *Pak* $p_{\mathbb{A}} = p_{\mathbb{B}}$, *tedy i* $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B})$ *a* $\nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_a^{\mathbb{B}}(\lambda)$ *pro každé* $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, *kde* $\nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda)$ *značí algebraickou násobnost* λ *pro matici* $\mathbb{A}$ *a* $\nu_a^{\mathbb{B}}(\lambda)$ *pro* $\mathbb{B}$.
2. *Je-li* $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, *pak* $\nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_g^{\mathbb{B}}(\lambda)$, *kde* $\nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda)$ *značí geometrickou násobnost* λ *pro matici* $\mathbb{A}$ *a* $\nu_g^{\mathbb{B}}(\lambda)$ *pro* $\mathbb{B}$.
3. *Potom* $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{B}$ *a* $\mathrm{Tr}(\mathbb{A}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{B})$.

Důkaz.

1. Nechť $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}$, pak pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí:

   $$p_{\mathbb{A}}(t) = \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I}) = \det(\mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1} - t\mathbb{I}) = \det\left(\mathbb{X}(\mathbb{B} - t\mathbb{I})\mathbb{X}^{-1}\right) = \det(\mathbb{B} - t\mathbb{I}) = p_{\mathbb{B}}(t).$$

   Tím je dokázána rovnost charakteristických polynomů, tedy i spekter a algebraických násobností.

2. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda)}$ jsou LN vlastní vektory matice $\mathbb{A}$ příslušné λ. Pak $\lambda\vec{x}_i = \mathbb{A}\vec{x}_i = \mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}\vec{x}_i$, odtud $\lambda\mathbb{X}^{-1}\vec{x}_i = \mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}\vec{x}_i$. Proto $\mathbb{X}^{-1}\vec{x}_1, \mathbb{X}^{-1}\vec{x}_2, \ldots, \mathbb{X}^{-1}\vec{x}_{\nu_g(\lambda)}$ jsou vlastní vektory matice $\mathbb{B}$ příslušné λ. Díky regularitě $\mathbb{X}$, tedy i $\mathbb{X}^{-1}$, jsou získané vlastní vektory $\mathbb{B}$ také LN. Proto $\nu_g^{\mathbb{B}}(\lambda) \geq \nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda)$. Jelikož $\mathbb{B}$ je zároveň podobná $\mathbb{A}$, dostaneme také $\nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda) \geq \nu_g^{\mathbb{B}}(\lambda)$. Tím je dokázána rovnost geometrických násobností.

3. Vztahy plynou z rovnosti charakteristických polynomů. □

Úkol 3.23. Implikaci ve větě 3.22 nelze obrátit. Ověřte, že matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mají stejné charakteristické polynomy i stejné geometrické násobnosti odpovídajících vlastních čísel, přesto si nejsou podobné. (Nápověda: Ověřte, že neexistuje regulární matice $\mathbb{X}$ splňující $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{B}$.)

Úkol 3.24. Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Dokažte, že potom platí:

1. Matice $\mathbb{A}^T$ je podobná $\mathbb{A}$.
2. Je-li $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$, pak $\mathbb{A}^T$ je podobná $\mathbb{B}^T$, $\mathbb{A}^{-1}$ je podobná $\mathbb{B}^{-1}$ (existují-li) a $\mathbb{A}^k$ je podobná $\mathbb{B}^k$ pro $k \in \mathbb{N}$.
3. Je-li alespoň jedna z matic regulární, potom $\mathbb{AB}$ je podobná $\mathbb{BA}$.

Nabízí se otázka, do jaké nejjednodušší podoby lze matici podobnostní transformací převést, tj. jaké nejjednodušší matici je daná matice podobná. Speciálně se ptáme, zda je každá čtvercová matice podobná **diagonální** matici, tedy matici, jejíž všechny prvky kromě diagonálních jsou nulové (a diagonální mohou být nulové i nenulové).

Definice 3.25. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom matici $\mathbb{A}$ nazveme **diagonalizovatelnou**, pokud je podobná diagonální matici, tj. existují diagonální matice $\mathbb{D}$ a regulární matice $\mathbb{X}$ takové, že $\mathbb{A} = \mathbb{XDX}^{-1}$.

Poznámka 3.26. Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{X} \in \mathbb{C}^{n,n}$, matice $\mathbb{D}$ je diagonální a $\mathbb{X}$ je regulární. Potom $\mathbb{A} = \mathbb{XDX}^{-1}$ právě tehdy, když $\mathbb{AX} = \mathbb{XD}$. Odtud je dobře vidět, že označíme-li $\vec{x}_i$ i-tý sloupec $\mathbb{X}$ a λ_i i-té číslo na diagonále $\mathbb{D}$, pak $\mathbb{A}\vec{x}_i = \lambda_i\vec{x}_i$. Sloupce matice $\mathbb{X}$ jsou tudíž vlastními vektory matice $\mathbb{A}$ a čísla na diagonále $\mathbb{D}$ jsou vlastními čísly $\mathbb{A}$.

Věta 3.27 (Diagonalizovatelnost a báze z vlastních vektorů)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná, právě když v $\mathbb{C}^n$ existuje báze z vlastních vektorů $\mathbb{A}$.*

Důkaz.

- ($\Rightarrow$): Nechť $\mathbb{A} = \mathbb{XDX}^{-1}$. Potom podle poznámky 3.26 tvoří soubor sloupců matice $\mathbb{X}$ hledanou bázi $\mathbb{C}^n$.
- ($\Leftarrow$): Nechť $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze $\mathbb{C}^n$ z vlastních vektorů příslušných vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Označme $\mathbb{X}$ matici se sloupci $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. Matice $\mathbb{X}$ je tedy regulární. Dále označme $\mathbb{D}$ diagonální matici s čísly $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ na diagonále. Potom jistě platí $\mathbb{AX} = \mathbb{XD}$, tudíž také $\mathbb{A} = \mathbb{XDX}^{-1}$. Proto $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná. $\square$

Při praktickém ověřování, zda je matice diagonalizovatelná, se nám lépe bude hodit následující tvrzení, které je důsledkem vět 3.19 a 3.27.

Věta 3.28 (Diagonalizovatelnost a násobnosti)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná, právě když pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.*

Poznámka 3.29. Z důkazů vět 3.19 a 3.27 víme, jak najdeme regulární matici $\mathbb{X}$ a diagonální matici $\mathbb{D}$ tak, aby $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$. Je to možné, pokud jsou algebraické a geometrické násobnosti všech vlastních čísel shodné. V takovém případě umíme najít tolik LN vlastních vektorů ke každému vlastnímu číslu, kolik je jeho geometrická (a tedy i algebraická) násobnost. Z těchto vektorů sestavíme matici $\mathbb{X}$. Matice $\mathbb{D}$ má pak na diagonále vlastní čísla příslušná nalezeným vlastním vektorům v pořadí daném pořadím sloupců matice $\mathbb{X}$.

Příklad 3.30. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Sestavte matice $\mathbb{X}$ a $\mathbb{D}$ tak, aby $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.

Řešení: V příkladu 3.9 jsme našli vlastní vektory:

$$\text{vlastní vektor } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ příslušný nule a LN vlastní vektory } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ příslušné jedničce.}$$

Sestavíme-li matici $\mathbb{X}$ z vlastních vektorů a matici $\mathbb{D}$ z vlastních čísel v odpovídajícím pořadí, tj. např.

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pak podle předchozí poznámky platí, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$. Čtenář–teoretik tomuto tvrzení věří na základě předchozích důkazů. Čtenář–pratik rovnost ověří nalezením $\mathbb{X}^{-1}$ a vynásobením matic.

Poznámka 3.31. Zatímco podobnostní transformace zachovávají vlastní čísla a diagonalizovatelnost matic, ekvivalentní řádkové úpravy mohou vlastní čísla matice měnit a mohou měnit i diagonalizovatelnost. Například následující matice $\mathbb{B}$ vznikla z $\mathbb{A}$ záměnou řádků, ale $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ má různá vlastní čísla 0 a 1, je tedy diagonalizovatelná, zatímco $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má pouze vlastní číslo 0 s $\nu_a(0) = 2 > 1 = \nu_g(0)$, proto není diagonalizovatelná.

Poznámka 3.32. Viděli jsme, že ne každou matici lze diagonalizovat. Bez důkazu uveďme, že každá matice je podobná matici $\mathbb{J}$ v **Jordanově kanonickém tvaru**, [17] kde

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

je v blokově diagonálním tvaru (na diagonále jsou Jordanovy bloky J_i a mimo ně jsou

[17] Marie Ennemond Camille Jordan [výslovnost „žordán“] (1838–1922), francouzský matematik

samé nuly). Jordanův blok má tvar:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Jordanův kanonický tvar je pro každou matici jedinečný až na pořadí bloků, počet Jordanových bloků odpovídajících vlastnímu číslu λ je roven $\nu_g(\lambda)$ a součet řádů bloků odpovídajících λ je roven $\nu_a(\lambda)$. Důkaz lze najít např. v [4].

Úkol 3.33 (Jordanův kanonický tvar)**.** * Najděte regulární matice $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{J}\mathbb{X}^{-1}$ a $\mathbb{B} = \mathbb{Y}\widehat{\mathbb{J}}\mathbb{Y}^{-1}$, kde $\mathbb{J}$ a $\widehat{\mathbb{J}}$ jsou v Jordanově kanonickém tvaru. Jsou si $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ podobné? Vysvětlete.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kapitolu uzavřeme zajímavým pozorováním, že každá matice je kořenem svého charakteristického polynomu. Větu dokázal Caley [18] pouze pro matice řádu dva a tři a v plné obecnosti pak Hamilton. [19]

Věta 3.34 (Hamiltonova–Caleyho)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak matice $\mathbb{A}$ je kořenem svého charakteristického polynomu, tj. je-li $p_{\mathbb{A}}(t) = \beta_n t^n + \beta_{n-1} t^{n-1} + \ldots + \beta_1 t + \beta_0$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, pak platí:*

$$p_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}) := \beta_n \mathbb{A}^n + \beta_{n-1}\mathbb{A}^{n-1} + \ldots + \beta_1 \mathbb{A} + \beta_0 \mathbb{I} = \mathbb{O}.$$

Důkaz. Pro $n = 1$ tvrzení evidentně platí. Uvažujme $n > 1$. Využijeme vztah z prvního bodu věty 2.40 platný pro každé $t \in \mathbb{C}$:

$$(\mathbb{A} - t\mathbb{I})(\mathbb{A} - t\mathbb{I})^{adj} = p_{\mathbb{A}}(t)\mathbb{I}.$$

Podle definice adjungované matice jsou prvky $(\mathbb{A} - t\mathbb{I})^{adj}$ polynomy stupně maximálně $n - 1$. Můžeme tedy psát:

$$(\mathbb{A} - t\mathbb{I})^{adj} = \sum_{j=0}^{n-1} t^j \mathbb{B}_j,$$

[18] Arthur Cayley (1821–1895), anglický matematik a právník

[19] William Rowan Hamilton (1805–1865), irský matematik, fyzik a astronom

kde $\mathbb{B}_j$ je matice řádu n sestavená z koeficientů vyskytujících se u t^j v odpovídajících prvcích matice $(\mathbb{A} - t\mathbb{I})^{adj}$. Máme tedy maticovou rovnost:

$$(\mathbb{A} - t\mathbb{I}) \sum_{j=0}^{n-1} t^j \mathbb{B}_j = \beta_0 \mathbb{I} + \beta_1 t\mathbb{I} + \beta_2 t^2 \mathbb{I} + \ldots + \beta_{n-1} t^{n-1} \mathbb{I} + \beta_n t^n \mathbb{I}.$$

Z rovnosti prvků matic, což jsou polynomy, plyne, že se musejí rovnat matice u jednotlivých mocnin proměnné t. Dostáváme tudíž:

$$\begin{array}{lrcl} t^0: & \mathbb{A}\mathbb{B}_0 & = & \beta_0 \mathbb{I}, \\ t^1: & \mathbb{A}\mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_0 & = & \beta_1 \mathbb{I}, \\ t^2: & \mathbb{A}\mathbb{B}_2 - \mathbb{B}_1 & = & \beta_2 \mathbb{I}, \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ t^{n-1}: & \mathbb{A}\mathbb{B}_{n-1} - \mathbb{B}_{n-2} & = & \beta_{n-1} \mathbb{I}, \\ t^n: & -\mathbb{B}_{n-1} & = & \beta_n \mathbb{I}. \end{array}$$

Pokud vynásobíme obě strany druhé rovnosti maticí $\mathbb{A}$, třetí rovnosti maticí $\mathbb{A}^2$ a analogicky pro další rovnosti – končíme tedy násobením $(n+1)$. rovnosti maticí $\mathbb{A}^n$ – a následně všechny rovnosti sečteme, obdržíme kýžený vztah $\mathbb{O} = p_{\mathbb{A}}(\mathbb{A})$. □

Příklad 3.35. V příkladu 3.9 jsme našli charakteristický polynom $p_{\mathbb{A}}(t) = -t^3 + 2t^2 - t$ matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ověřte, že $-\mathbb{A}^3 + 2\mathbb{A}^2 - \mathbb{A} = \mathbb{O}$.

3.3 Vlastní čísla a vlastní vektory operátorů

Úlohu hledat vlastní čísla a vlastní vektory operátorů převedeme na řešení stejné úlohy pro matice. Ovšem musíme mít pořád na paměti, že na rozdíl od matic, kde pracujeme vždy nad tělesem komplexních čísel, [20] je třeba u operátorů hlídat, nad kterým tělesem jsou definovány.

Definice 3.36. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a je dán operátor $A \in \mathcal{L}(V)$. Číslo $\lambda \in T$ nazveme **vlastním číslem operátoru** A, pokud existuje vektor $\vec{x} \in V$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, takový, že $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vektor $\vec{x}$ nazveme **vlastním vektorem operátoru** A příslušným vlastnímu číslu λ. Množinu vlastních čísel nazveme **spektrem operátoru** A a označíme $\sigma(A)$. **Vlastním podprostorem operátoru** A příslušným vlastnímu číslu λ rozumíme $P_\lambda := \{\vec{x} \in V \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$, tj. P_λ je množina vlastních vektorů operátoru A příslušných vlastnímu číslu λ s přidáním nulového vektoru.

[20] Náš přístup, kdy matice považujeme automaticky za prvky prostoru $\mathbb{C}^{n,n}$, je pohodlnější a snad i častější. Ovšem například pan asistent Pytlíček při vyšetřování vlastních čísel a vlastních vektorů matic vždy uváděl, z jakého prostoru $T^{n,n}$ matice je. Musel být proto při práci s maticemi stejně opatrný, jako my budeme muset být při práci s operátory. Pro reálnou matici se totiž mohla její vlastní čísla lišit podle toho, zda byla matice považována za prvek $\mathbb{C}^{n,n}$ nebo $\mathbb{R}^{n,n}$. Necháme na čtenáři, aby si podrobnosti rozmyslel sám.

Věta 3.37 (LK vlastních vektorů operátoru)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$. Potom $P_\lambda \subset\subset V$. Navíc $A(P_\lambda) \subset P_\lambda$.*

Důkaz. $P_\lambda = \{\vec{x} \in V \mid (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}\}$, tj. $P_\lambda = \ker(A - \lambda I)$, tudíž $P_\lambda \subset\subset V$. Jelikož $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \in P_\lambda$ pro každé $\vec{x} \in P_\lambda$, platí i druhé tvrzení. □

Příklad 3.38. Nechť $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ je operátor integrování a $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ je operátor derivování. Vyšetřete vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory těchto operátorů.
Řešení:

(a) Pokud $\lambda \in \mathbb{C}$ a $x \in \mathcal{P}$ jsou vlastní číslo a vlastní vektor S, pak $Sx = \lambda x$. Nechť $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \alpha_n t^n$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Odtud máme pro každé $t \in \mathbb{C}$:

$$(Sx)(t) = \alpha_0 t + \frac{\alpha_1}{2}t^2 + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{n}t^n + \frac{\alpha_n}{n+1}t^{n+1} = \lambda(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \alpha_n t^n).$$

Pro $\lambda = 0$ i $\lambda \neq 0$ z rovnosti polynomů – tedy rovnosti koeficientů u jednotlivých mocnin t – dostáváme $0 = \alpha_n = \alpha_{n-1} = \ldots = \alpha_1 = \alpha_0$. Tedy x je nulový polynom. Proto žádné komplexní číslo není vlastním číslem S a žádné vlastní vektory operátoru S neexistují.

(b) Pokud $\lambda \in \mathbb{C}$ a $x \in \mathcal{P}$ jsou vlastní číslo a vlastní vektor D, potom $Dx = \lambda x$. Nechť $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \alpha_n t^n$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Odtud máme pro každé $t \in \mathbb{C}$:

$$(Dx)(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + \ldots + n\alpha_n t^{n-1} = \lambda(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \alpha_n t^n).$$

Pro $\lambda \neq 0$ z rovnosti polynomů dostáváme, že $0 = \alpha_n = \alpha_{n-1} = \ldots = \alpha_1 = \alpha_0$. Tedy x je nulový polynom, což znamená, že D nemá žádné nenulové vlastní číslo.
Pro $\lambda = 0$ z rovnosti polynomů plyne, že $0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = \alpha_n$, zatímco α_0 může mít libovolnou hodnotu. Tudíž $\sigma(D) = \{0\}$ a vlastními vektory jsou konstantní polynomy.

Věta 3.39 (LN vlastních vektorů operátoru)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou vzájemně různá vlastní čísla a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ jsou jim příslušné vlastní vektory operátoru A. Pak $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ jsou LN.*

Důkaz. Jde o analogii důkazu pro matice, proto je ponechán čtenáři. □

Definice 3.40. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$. Potom **geometrickou násobností** vlastního čísla λ nazveme $\nu_g(\lambda) := \dim P_\lambda$.
Slovy: „Geometrická násobnost vlastního čísla λ je počet LN vlastních vektorů A příslušných λ."

Ve zbytku kapitoly o spektrální teorii operátorů se omezíme na vektorový prostor V_n konečné dimenze. V něm budeme mít pro vyšetřování spektrálních vlastností operátorů stejný aparát jako u matic.

Definice 3.41. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Nechť $\mathcal{X}$ je báze V_n. Potom **charakteristickým polynomem** p_A operátoru A nazýváme charakteristický polynom matice ${}^{\mathcal{X}}A$.

Poznámka 3.42. Definice je korektní, protože p_A nezávisí na volbě báze. Jsou-li totiž $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ báze V_n a označíme-li $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{X}}A$ a $\mathbb{B} = {}^{\mathcal{Y}}A$, potom platí podle definice 2.51 determinantu operátoru pro každé $t \in T$:

$$\det(\mathbb{A} - t\mathbb{I}) = \det({}^{\mathcal{X}}(A - tI)) = \det(A - tI) = \det({}^{\mathcal{Y}}(A - tI)) = \det(\mathbb{B} - t\mathbb{I}).$$

Vidíme tudíž, že se polynomy $p_{\mathbb{A}}$ a $p_{\mathbb{B}}$ rovnají v nekonečně mnoha bodech, proto platí $p_{\mathbb{A}}(t) = p_{\mathbb{B}}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

Věta 3.43 (Vlastní čísla operátoru a charakteristický polynom)**.** *Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Pak $\lambda \in \sigma(A)$, právě když $p_A(\lambda) = 0$ a $\lambda \in T$. Slovy: „λ je vlastním číslem A, právě když λ je kořenem charakteristického polynomu a patří do tělesa.“*

Důkaz. Nechť $\lambda \in T$. Pak platí následující ekvivalence: $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow$ existuje nenulové $\vec{x} \in V_n$ tak, že $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow$ existuje nenulové $\vec{x} \in V_n$ tak, že $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \ker(A - \lambda I)$ obsahuje nenulový vektor $\Leftrightarrow$ operátor $(A - \lambda I)$ není regulární $\Leftrightarrow$ pro libovolnou bázi $\mathcal{X}$ prostoru V_n platí, že ${}^{\mathcal{X}}A - \lambda\mathbb{I}$ je singulární matice $\Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0$. □

Příklad 3.44. Nechť $A \in \mathcal{L}(T^2)$ a ${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte spektrum A, je-li

(a) $T = \mathbb{C}$,

(b) $T = \mathbb{R}$ (tedy A je operátor rotace o $\frac{\pi}{2}$ proti směru hodinových ručiček).

Řešení: V obou případech je $p_A(t) = t^2 + 1$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

(a) $\sigma(A) = \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$,

(b) $\sigma(A) = \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\} \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

Příklad 3.45. Nechť $A \in \mathcal{L}(T^2)$ a ${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte spektrum A, je-li

(a) $T = \mathbb{R}$,

(b) $T = \mathbb{Q}$.

Řešení: V obou případech je $p_A(t) = t^2 - 2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

(a) $\sigma(A) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$,

(b) $\sigma(A) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.

Definice 3.46. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$. **Algebraickou násobností** $\nu_a(\lambda)$ vlastního čísla λ nazveme násobnost λ jakožto kořene charakteristického polynomu p_A.

Poznámka 3.47. Čtenář si sám rozmyslí, že v případě operátoru $A \in \mathcal{L}(V_n)$ již nemusí platit analogie vztahu z poznámky 3.11, tj. neplatí, že $\sum_{\lambda\in\sigma(A)} \nu_a(\lambda) = n$. Pouze platí, že součet násobností kořenů charakteristického polynomu p_A je roven n.

Poznámka 3.48. Podívejme se na vztah mezi vlastními čísly a vlastními vektory matic a operátorů. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Dále nechť $\mathcal{X}$ je báze V_n. Označme $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{X}}\!A$.

(a) Z vět 3.43 a 3.8 plyne:
$$\sigma(A) = \sigma(\mathbb{A}) \cap T.$$

(b) Pro $\lambda \in T$ a $\vec{x} \in V_n$ platí:
$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{A}(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \lambda(\vec{x})_{\mathcal{X}}.$$

(c) Z předchozích bodů dostaneme pro každé $\lambda \in \sigma(A)$:
$$\nu_a^A(\lambda) = \nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda) \text{ a } \nu_g^A(\lambda) = \nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda),$$
kde symboly A a $\mathbb{A}$ značí, zda jde o násobnost vlastního čísla pro operátor, či matici.

Úkol 3.49. Pomocí předchozích vztahů přeformulujte tvrzení ze spektrální teorie matic na analogická tvrzení pro operátory a dokažte je. Pozor, některá tvrzení pro operátory neplatí. Například determinant operátoru není součinem jeho vlastních čísel (braných včetně násobností). Platí pouze, že determinant operátoru je součinem kořenů charakteristického polynomu (braných včetně násobností).

3.4 Diagonalizovatelnost operátorů

Definice 3.50. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Operátor A nazveme **diagonalizovatelným**, pokud existuje báze $\mathcal{Y}$ prostoru V_n taková, že ${}^{\mathcal{Y}}\!A$ je diagonální matice.

Věta 3.51 (Diagonalizovatelnost operátoru a báze z vlastních vektorů)**.** *Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Nechť $\mathcal{Y}$ je báze V_n. Pak ${}^{\mathcal{Y}}\!A$ je diagonální matice, právě když $\mathcal{Y}$ je báze V_n z vlastních vektorů A.*

Důkaz. Označme $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$. Tvrzení pak plyne ze vztahu:

$$^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A\vec{y}_i = \lambda_i \vec{y}_i \quad \text{pro každé } i \in \hat{n}. \qquad \square$$

Věta 3.52 (Diagonalizovatelnost operátoru a násobnosti)**.** *Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Operátor A je diagonalizovatelný, právě když jsou splněny dvě podmínky:*

1. $p_A^{-1}(0) \subset T$.
   Slovy: „Kořeny charakteristického polynomu jsou z tělesa."

2. $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ *pro každé* $\lambda \in \sigma(A)$.

Důkaz.

- $(\Rightarrow)$: A je diagonalizovatelný, tedy existuje báze $\mathcal{Y}$ prostoru V_n taková, že $^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice. Z definice charakteristického polynomu plyne, že $p_A^{-1}(0) \subset T$ (kořeny p_A jsou totiž diagonální prvky $^{\mathcal{Y}}A$). Označme $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{Y}}A$. Podle věty 3.28 platí $\nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Podle bodu (a) a (c) poznámky 3.48 platí tedy také $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$.

- $(\Leftarrow)$: Nechť $\mathcal{X}$ je libovolná báze V_n. Označme $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{X}}A$. Podle prvního předpokladu platí, že $\sigma(\mathbb{A}) \subset T$, a podle druhého předpokladu a bodu (c) poznámky 3.48 platí, že $\nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Tudíž $\mathbb{A}$ je s využitím věty 3.28 diagonalizovatelná. Existují tedy regulární matice $\mathbb{X}$ a diagonální matice $\mathbb{D} \in T^{n,n}$ (na diagonále jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$, tudíž také operátoru A) takové, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$. Přitom matice $\mathbb{X}$ je sestavená z vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$ a lze ji volit z $T^{n,n}$. (Vlastní vektory totiž získáváme jako řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbb{A} - \lambda_i \mathbb{I}$, kde vlastní čísla λ_i jsou podle prvního předpokladu z tělesa T – a taková soustava má vždy řešení v T^n.)

  Položme $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$, kde $\mathbb{X} = {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}$ (vycházíme z bodu (b) poznámky 3.48). Pak $\mathbb{D} = \mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = ({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}})({}^{\mathcal{X}}A)({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}) = {}^{\mathcal{Y}}A$. Tedy $\mathcal{Y}$ je báze V_n splňující $^{\mathcal{Y}}A = \mathbb{D}$, což znamená, že A je diagonalizovatelný operátor. $\square$

Příklad 3.53. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Najděte $\mathcal{Y}$ tak, aby $^{\mathcal{Y}}A$ byla diagonální matice. Jak vypadá $^{\mathcal{Y}}A$?
Řešení: Označme $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{X}}A$.

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = -t(t-2)(t-3).$$

Dostáváme $\sigma(A) = \{0, 2, 3\}$. Vidíme, že všechny kořeny p_A jsou reálné s násobností jedna, úloha tedy jistě má řešení.
Vlastní vektor $\mathbb{A}$ příslušný nule řeší homogenní soustavu s maticí

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor je např. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vlastní vektor $\mathbb{A}$ příslušný dvojce řeší homogenní soustavu s maticí

$$\mathbb{A} - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor je např. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Vlastní vektor $\mathbb{A}$ příslušný trojce řeší homogenní soustavu s maticí

$$\mathbb{A} - 3\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor je např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Hledanou bázi $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ získáme ze vztahů:

$$(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; (\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ a ${}^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4 Hermitovské a kvadratické formy

Motivace. Křivky a plochy patří k základním objektům, se kterými se v životě setkáváme, a potřeba popsat je matematicky existuje odedávna. Zmiňme v souvislosti s kuželosečkami alespoň zakladatele analytické geometrie Descarta [21] a Fermata, [22] kteří v 17. století řešili úlohu, jak transformovat kuželosečku na kanonický tvar (laicky řečeno: „tvar, který umíme namalovat“). Třírozměrnou analogií kuželoseček (elipsa, parabola, hyperbola) jsou kvadratické plochy (mezi nimi elipsoid, paraboloid, jedno- a dvojdílný hyperboloid).

Je-li dána symetrická matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ (tj. matice splňující $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$), vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ a číslo $c \in \mathbb{R}$, pak **kvadrikou (kvadratickou plochou)** nazveme množinu vektorů $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ splňujících:

$$(\vec{x})^T \mathbb{A} \vec{x} - (\vec{b})^T \vec{x} + c = 0. \tag{4}$$

Ve druhém ročníku se v matematické analýze naučíte kvadriky vyšetřovat a klasifikovat. Budete k tomu využívat znalosti kvadratických forem. Ukažme na jednoduchém příkladě, jak bude takové vyšetřování probíhat.

Nechť je dána kvadrika v $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 1 = 0 \right\}.$$

Opravdu jde o kvadriku, protože má tvar z definičního vztahu (4):

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \vec{0}, \quad c = -1.$$

Upravíme odpovídající kvadratickou formu na čtverce:

$$4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = (2x_1 - \tfrac{1}{2}x_2)^2 + (\tfrac{\sqrt{2}}{2}x_2)^2 + (2x_3 - \tfrac{1}{2}x_2)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

přičemž

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 & \qquad x_1 &= \tfrac{1}{2}\alpha_1 + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\alpha_2 \\ \alpha_2 &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}x_2 & x_2 &= \sqrt{2}\alpha_2 \\ \alpha_3 &= 2x_3 - \tfrac{1}{2}x_2 & x_3 &= \tfrac{\sqrt{2}}{4}\alpha_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_3. \end{aligned}$$

Můžeme tedy vyšetřovanou kvadriku přepsat do následujícího tvaru:

$$\left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \right\}.$$

Z tohoto tvaru je snadné uhádnout, o jakou kvadriku jde, a vykreslit ji. Stačí namalovat kulovou plochu o poloměru jedna se středem v počátku a na každý její bod nechat působit

[21] René Descartes [výslovnost „dekárt“] (1596–1650), francouzský filozof, matematik a fyzik

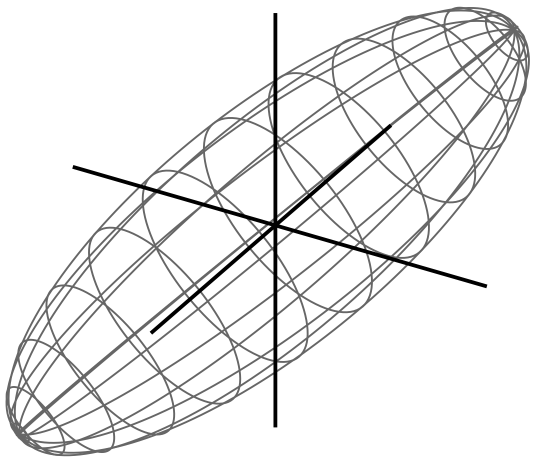
[22] Pierre de Fermat [výslovnost „ferma“] (1601–1665), francouzský matematik

odpovídající lineární transformaci – tedy vynásobit každý bod maticí $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Lineární transformace kulovou plochu protáhne do elipsoidu. Výsledek je na obrázku 3.

Také můžeme kvadriku upravit ještě do jiného ekvivalentního tvaru:

$$\left\{ \vec{x} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \right\}.$$

Z tohoto tvaru lze zase vyčíst, že zadaná kvadrika obsahuje právě ty vektory, jejichž souřadnice v bázi $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$ leží na kulové ploše o poloměru jedna se středem v počátku.



Obrázek 3: Ilustrace kvadriky z motivačního textu – elipsoidu.

V celé kapitole si pod tělesem T představujeme pouze $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$ (všechna tvrzení by platila i pro ostatní číselná tělesa, která jsou uzavřená na komplexní sdružování – bystrý čtenář si rozmyslí, proč musí být splněna právě tato podmínka).

4.1 Hermitovské formy

Definice 4.1. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Zobrazení $h\colon V \times V \to T$ nazveme **hermitovskou formou**, pokud jsou splněny dvě podmínky:

1. **hermitovskost**: pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí, že $h(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{h(\vec{y}, \vec{x})}$,
2. **linearita v prvním argumentu**: pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ je splněno, že $h(\alpha\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = \alpha h(\vec{x}, \vec{z}) + h(\vec{y}, \vec{z})$.

Diagonálou hermitovské formy h nazýváme zobrazení $Q\colon V \to T$ definované pro každé $\vec{x} \in V$ jako $Q(\vec{x}) := h(\vec{x}, \vec{x})$.

Poznámka 4.2. Speciálně pro $T = \mathbb{R}$ můžeme u první vlastnosti hermitovské formy [23] vynechat komplexní sdružování, tedy požadujeme, aby pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platilo $h(\vec{x}, \vec{y}) = h(\vec{y}, \vec{x})$. Vlastnosti pak říkáme **symetrie**.

Věta 4.3 (Vlastnosti hermitovské formy a diagonály)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť h je hermitovská forma na V a Q její diagonála. Pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ platí:*

1. ***antilinearita*** [24] ***ve druhém argumentu**: $h(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \vec{z}) = \overline{\alpha} h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{x}, \vec{z})$,*
2. *$Q(\vec{x}) \in \mathbb{R}$,*
3. *$Q(\alpha\vec{x}) = |\alpha|^2 Q(\vec{x})$,*
4. *$Q(\vec{x} + \vec{y}) = Q(\vec{x}) + 2\mathrm{Re}(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y})$,*
5. ***rovnoběžníková rovnost**:*
$$Q(\vec{x} + \vec{y}) + Q(\vec{x} - \vec{y}) = 2\left(Q(\vec{x}) + Q(\vec{y})\right),$$
6. ***polarizační identity**:*
pro $T = \mathbb{R}$
$$h(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}\Big(Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x} - \vec{y})\Big),$$
pro $T = \mathbb{C}$
$$h(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}\Big(Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x} - \vec{y})\Big) + \frac{\mathrm{i}}{4}\Big(Q(\vec{x} + \mathrm{i}\vec{y}) - Q(\vec{x} - \mathrm{i}\vec{y})\Big).$$

Důkaz.

1. Z definice hermitovské formy a z vlastností komplexního sdružování plyne:
$$\begin{aligned} h(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \vec{z}) &= \overline{h(\alpha\vec{y} + \vec{z}, \vec{x})} &&= \overline{\alpha h(\vec{y}, \vec{x}) + h(\vec{z}, \vec{x})} \\ &= \overline{\alpha}\,\overline{h(\vec{y}, \vec{x})} + \overline{h(\vec{z}, \vec{x})} &&= \overline{\alpha} h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{x}, \vec{z}). \end{aligned}$$
2. Vlastnost plyne z hermitovskosti h:
$$Q(\vec{x}) = h(\vec{x}, \vec{x}) = \overline{h(\vec{x}, \vec{x})} = \overline{Q(\vec{x})},$$
proto $Q(\vec{x}) \in \mathbb{R}$.

[23] Charles Hermite [výslovnost „ermit“] (1822–1901), francouzský matematik

[24] Antilinearitu najdete také občas pod názvem semilinearita.

3. S využitím linearity a antilinearity h máme:

$$Q(\alpha\vec{x}) = h(\alpha\vec{x}, \alpha\vec{x}) = \alpha\overline{\alpha}h(\vec{x}, \vec{x}) = |\alpha|^2 Q(\vec{x}).$$

4. Opět s využitím linearity, antilinearity a hermitovskosti h dostáváme:

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}+\vec{y}) &= h(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) \\ &= h(\vec{x}, \vec{x}+\vec{y}) + h(\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) \\ &= Q(\vec{x}) + h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{y}, \vec{x}) + Q(\vec{y}) \\ &= Q(\vec{x}) + 2\mathrm{Re}(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y}). \end{aligned}$$

5. Jde o přímý důsledek předchozího bodu.

6. Dokažme tvrzení pro $T = \mathbb{C}$, pro $T = \mathbb{R}$ si čtenář obdobným způsobem poradí sám. S využitím čtvrtého bodu, antilinearity a posléze třetího bodu máme:

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}+\vec{y}) &= Q(\vec{x}) + 2\mathrm{Re}(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y}) \\ Q(\vec{x}-\vec{y}) &= Q(\vec{x}) + 2\mathrm{Re}(-h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(-\vec{y}) &&= Q(\vec{x}) - 2\mathrm{Re}(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y}) \\ Q(\vec{x}+\mathrm{i}\vec{y}) &= Q(\vec{x}) + 2\mathrm{Re}(-\mathrm{i}h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\mathrm{i}\vec{y}) &&= Q(\vec{x}) + 2\mathrm{Im}(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y}) \\ Q(\vec{x}-\mathrm{i}\vec{y}) &= Q(\vec{x}) + 2\mathrm{Re}(\mathrm{i}h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\mathrm{i}\vec{y}) &&= Q(\vec{x}) - 2\mathrm{Im}(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y}). \end{aligned}$$

Odtud plyne:

$$Q(\vec{x}+\vec{y}) - Q(\vec{x}-\vec{y}) + \mathrm{i}Q(\vec{x}+\mathrm{i}\vec{y}) - \mathrm{i}Q(\vec{x}-\mathrm{i}\vec{y}) = 4\mathrm{Re}(h(\vec{x}, \vec{y})) + \mathrm{i}4\mathrm{Im}(h(\vec{x}, \vec{y})) = 4h(\vec{x}, \vec{y}).$$

$\square$

Poznámka 4.4.

- Občas se pro označení linearity v prvním argumentu a antilinearity ve druhém argumentu používá pojem **sesquilineární** formy. [25]

- Pro $T = \mathbb{R}$ lze vynechat komplexní sdružování u vlastnosti antilinearity. Taková forma je tedy lineární v prvním i druhém argumentu, hovoříme pak někdy o **bilineárních** formách.

- Polarizační identity vyjadřují netriviální fakt, že hermitovská forma je jednoznačně určena svou diagonálou.

Definice 4.5. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť h je hermitovská forma na V. **Nulprostorem** hermitovské formy h nazveme množinu:

$$N_h = \{\vec{x} \in V \mid h(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \text{ pro každé } \vec{y} \in V\}.$$

Nulitou formy h pak rozumíme číslo $\dim N_h$. Hermitovskou formu h nazýváme **regulární**, pokud $\dim N_h = 0$. V opačném případě ji nazýváme **singulární**.

[25] Předpona sesqui- je z latiny a znamená „jeden a půl“.

Aby definice nulity byla korektní, potřebujeme vědět, že nulprostor je podprostorem V.

Věta 4.6 (O nulprostoru)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť h je hermitovská forma na V. Pak $N_h \subset\subset V$.*

Důkaz. Z definice plyne, že $N_h \subset V$. Jelikož platí $h(\vec{0}, \vec{y}) = 0$ pro každé $\vec{y} \in V$, patří $\vec{0}$ do N_h, tedy $N_h \neq \emptyset$. Pokud $\vec{x}, \vec{z} \in N_h$ a $\alpha \in T$, pak $h(\alpha\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}) = \alpha h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{z}, \vec{y}) = \alpha 0 + 0 = 0$ pro každé $\vec{y} \in V$, proto $\alpha\vec{x} + \vec{z} \in N_h$. $\square$

4.2 Polární báze

Uvažujme nyní vektorový prostor V_n konečné dimenze rovné $n \in \mathbb{N}$ a v něm bázi $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$. Najdeme podmínku, kterou musí splňovat báze $\mathcal{X}$, aby v ní hermitovská forma a její diagonála měly jednoduchý tvar. Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{y} = \sum_{j=1}^n \beta_j \vec{x}_j$, potom s využitím linearity v prvním a antilinearity ve druhém argumentu dostáváme:

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = h\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i, \sum_{j=1}^n \beta_j \vec{x}_j\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \overline{\beta_j} h(\vec{x}_i, \vec{x}_j),$$

$$Q(\vec{x}) = h(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} h(\vec{x}_i, \vec{x}_j).$$

Pokud báze splňuje podmínku $h(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0$ pro $i \neq j$, zjednoduší se předchozí výrazy následovně:

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i} h(\vec{x}_i, \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i} Q(\vec{x}_i),$$

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_i} h(\vec{x}_i, \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 Q(\vec{x}_i).$$

Jak uvidíme, taková báze prostoru V_n vždy existuje.

Definice 4.7. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a h je hermitovská forma na V_n a nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báze V_n. Pokud $h(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = 0$ pro každé $i, j \in \hat{n},\ i \neq j$, pak $\mathcal{A}$ nazveme **polární bází** hermitovské formy h.

Věta 4.8 (Existence polární báze)**.** *Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T. Pak existuje polární báze hermitovské formy h.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle n. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé.

(a) Když $h(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$, pak libovolná báze je polární.

(b) Nechť existují $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ takové, že $h(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$. Z polarizační identity pak plyne, že existuje vektor $\vec{a}$, pro který $Q(\vec{a}) \neq 0$. Definujeme $\varphi\colon V_n \to T$ předpisem $\varphi(\vec{x}) = h(\vec{x}, \vec{a})$. Potom díky linearitě h v prvním argumentu platí, že $\varphi \in {V_n}^{\#}$, a jelikož $\varphi(\vec{a}) \neq 0$, je $\varphi \neq \Theta$. Tudíž $d(\varphi) = n - 1$.

Označme $L = \ker\varphi$ a označme h_L zúžení h na L. Protože $\dim L = n-1$, existuje podle indukčního předpokladu polární báze $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1})$ prostoru L příslušná hermitovské formě h_L. Dokážeme, že pokud položíme $\vec{a}_n = \vec{a}$, pak soubor $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je hledanou polární bází V_n.

- Pro důkaz, že soubor je bází, stačí ověřit, že $L \cap [\vec{a}]_\lambda = \vec{0}$. Uvažujme $\vec{x} \in L \cap [\vec{a}]_\lambda$, tj. $\vec{x} = \alpha\vec{a}$ a současně $\varphi(\alpha\vec{a}) = h(\alpha\vec{a}, \vec{a}) = \alpha Q(\vec{a}) = 0$. Jelikož zároveň $Q(\vec{a}) \neq 0$, je nutně $\alpha = 0$, tudíž $\vec{x} = \vec{0}$.
- Fakt, že je báze polární, plyne přímo z definice φ. □

Úkol 4.9. * Rozmyslete si na základě předchozího důkazu, zda lze každý nenulový vektor $\vec{x} \in V_n$ doplnit na polární bázi.

Poznámka 4.10. Polární báze není jednoznačně daná. Snadno si například rozmyslíme, že pokud nahradíme v polární bázi libovolný vektor jeho nenulovým násobkem, pak báze zůstane polární. Na cvičení se naučíme báze konstruovat a uvidíme, že polární báze mohou být pro stejnou hermitovskou formu opravdu rozmanité.

Následující tvrzení se hodí pro praktické hledání polární báze.

Věta 4.11 (Hledání polární báze)**.** *Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a Q její diagonála. Nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báze V_n. Nechť existují $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}$ taková, že*

$$Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 q_j$$

pro každé $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$. Pak $q_\ell = Q(\vec{a}_\ell)$ pro každé $\ell \in \hat{n}$ a $\mathcal{A}$ je polární báze h.

Důkaz. Dosadíme-li $\vec{x} = \vec{a}_\ell$, pak $Q(\vec{a}_\ell) = |1|^2 q_\ell = q_\ell$. Pro důkaz, že báze je polární, uvažujme $T = \mathbb{C}$. Čtenář obdobným způsobem ošetří případ $T = \mathbb{R}$. Podle polarizační identity dostaneme pro $k \neq \ell$:

$$\begin{aligned} h(\vec{a}_k, \vec{a}_\ell) &= \tfrac{1}{4}\Big(Q(\vec{a}_k + \vec{a}_\ell) - Q(\vec{a}_k - \vec{a}_\ell)\Big) + \tfrac{\mathrm{i}}{4}\Big(Q(\vec{a}_k + \mathrm{i}\vec{a}_\ell) - Q(\vec{a}_k - \mathrm{i}\vec{a}_\ell)\Big) \\ &= \tfrac{1}{4}\Big(|1|^2 q_k + |1|^2 q_\ell - |1|^2 q_k - |-1|^2 q_\ell\Big) + \tfrac{\mathrm{i}}{4}\Big(|1|^2 q_k + |\mathrm{i}|^2 q_\ell - |1|^2 q_k - |-\mathrm{i}|^2 q_\ell\Big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Příklad 4.12. Nechť je hermitovská forma h na $\mathbb{R}^2$ definována pro každé $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$ a $\vec{y} = \binom{y_1}{y_2}$ jako $h(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 6x_2 y_2 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1$. Najděte polární bázi h.

Řešení: Není těžké ověřit, že h je hermitovská forma. Práci nám ulehčí, uvědomíme-li si, že $h(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x})^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \vec{y}$. Pro nalezení polární báze upravíme diagonálu **Lagrangeovou metodou** [26] na součet čtverců (hovoříme také o redukci nebo o upravení do kanonického tvaru):

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_1x_2 = (x_1 + 2x_2)^2 + 2x_2^2 = \alpha_1^2 + 2\alpha_2^2.$$

Pak postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1 + 2x_2, & \qquad x_1 &= \alpha_1 - 2\alpha_2, \\ \alpha_2 &= x_2, & x_2 &= \alpha_2. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že $\vec{x} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Proto pro souřadnice $\vec{x}$ v bázi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ má diagonála tvar lineární kombinace čtverců. Podle věty 4.11 je $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ polární báze h.

Podívejme se nyní na vztah mezi nulprostorem a polární bází. Bude se nám hodit následující lemma.

Lemma 4.13. *Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V_n a Q její diagonála. Nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je polární báze V_n. Pokud $Q(\vec{a}_i) = 0$, pak $\vec{a}_i \in N_h$.*

Důkaz. Nechť $\vec{y} \in V_n$ a $\vec{y} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{a}_j$. Pak s využitím faktu, že $\mathcal{A}$ je polární báze, máme $h(\vec{a}_i, \vec{y}) = \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} h(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = \overline{\alpha_i} Q(\vec{a}_i) = 0$. Proto $\vec{a}_i \in N_h$. □

Věta 4.14 (Nulprostor a polární báze)**.** *Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a Q její diagonála. Nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je polární báze V_n. Nechť existuje $k \in \hat{n}$ tak, že $Q(\vec{a}_j) = 0$ pro každé $j \leq k$ a $Q(\vec{a}_j) \neq 0$ pro $j > k$. Pak $N_h = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]_\lambda$.*

Důkaz.

- $N_h \supset [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]_\lambda$: Podle lemmatu 4.13 patří $\vec{a}_j$ do nulprostoru pro každé $j \in \widehat{k}$. Jelikož $N_h \subset\subset V_n$, obsahuje N_h i libovolnou LK svých vektorů.

- $N_h \subset [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]_\lambda$: Nechť $\vec{x} \in N_h$ a $\vec{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{a}_j$. Pak pro každé $\vec{y} \in V_n$ platí, že $h(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Dosazujeme-li postupně $\vec{y} = \vec{a}_i$ pro $i > k$, dostáváme:

$$0 = h(\vec{x}, \vec{a}_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j h(\vec{a}_j, \vec{a}_i) = \alpha_i Q(\vec{a}_i).$$

  Jelikož $Q(\vec{a}_i) \neq 0$, musí být $\alpha_i = 0$ pro $i > k$. Odtud plyne, že $\vec{x} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \vec{a}_j$, tedy $\vec{x} \in [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]_\lambda$. □

[26] Joseph Louis Lagrange [výslovnost „lagránž"] (1855–1938), francouzský matematik

Shrňme slovy tvrzení předchozí věty: „Nulprostor je roven LO generovanému těmi vektory z polární báze, které mají nulovou hodnotu diagonály (pokud nějaké takové existují).“

Důsledek 4.15. *Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a Q její diagonála. Nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ je polární báze V_n. Pak počet nul v posloupnosti $(Q(\vec{a}_1), \ldots, Q(\vec{a}_n))$ nezáleží na volbě báze $\mathcal{A}$ a je roven nulitě.*

Důkaz. Pokud existuje $j \in \hat{n}$ tak, že $Q(\vec{a}_j) = 0$, pak tvrzení plyne z věty 4.14. Jestliže $Q(\vec{a}_j) \neq 0$ pro každé $j \in \hat{n}$, pak $N_h = \{\vec{0}\}$. Pokud totiž $\vec{x} \in N_h$ a $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$, pak pro každé $i \in \hat{n}$ platí, že $0 = h(\vec{x}, \vec{a}_i) = \alpha_i Q(\vec{a}_i)$. Proto $\alpha_i = 0$, a tedy $\vec{x} = \vec{0}$. $\square$

4.3 Kvadratické formy

Definice 4.16. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Mějme zobrazení $Q\colon V \to \mathbb{R}$. Říkáme, že Q je **kvadratickou formou**,[27] pokud existuje hermitovská forma h, jejíž je Q diagonálou. Hermitovskou formu h pak nazýváme **polárou** kvadratické formy Q. Polární bází, nulprostorem a nulitou kvadratické formy Q rozumíme polární bázi, nulprostor a nulitu její poláry h. Dále Q považujeme za regulární, resp. singulární, pokud h je regulární, resp. singulární.

Poznámka 4.17. Podle polarizačních identit má každá kvadratická forma Q právě jednu poláru h.

Věta 4.18 (Zákon setrvačnosti kvadratických forem)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ je polární báze Q. Označme p, q, r postupně počet kladných čísel, záporných čísel a nul v posloupnosti $(Q(\vec{a}_1), \ldots, Q(\vec{a}_n))$. Pak (p, q, r) nezávisí na volbě polární báze.*

Důkaz. Podle důsledku 4.15 je r rovno nulitě, a nezávisí tudíž na volbě polární báze. Dokážeme-li, že ani p není závislé na volbě polární báze, bude důkaz hotový. Rozlišíme tři případy:

(a) Když $p = 0$, platí pro každé $j \in \hat{n}$, že $Q(\vec{a}_j) \leq 0$. Pro každé $\vec{x}$, kde $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$, pak máme:
$$Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 Q(\vec{a}_j) \leq 0,$$
proto i pro každý vektor $\vec{a}$ z jiné polární báze platí $Q(\vec{a}) \leq 0$.

(b) Je-li $p = n$, platí pro každé $j \in \hat{n}$, že $Q(\vec{a}_j) > 0$. Pro každé $\vec{x} \neq \vec{0}$, kde $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$ (některý z koeficientů α_j je jistě nenulový), potom máme:
$$Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 Q(\vec{a}_j) > 0,$$

[27] Kvadratická forma se velmi často značí také q.

proto i pro každý vektor $\vec{a}$ z jiné polární báze platí $Q(\vec{a}) > 0$.

(c) Když $0 < p < n$, předpokládejme BÚNO, že vektory polární báze $\mathcal{A}$ jsou seřazeny následovně:
$$Q(\vec{a}_j) > 0 \quad \text{pro } j \leq p \quad \text{a} \quad Q(\vec{a}_j) \leq 0 \quad \text{pro } j > p.$$
Označme $P = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p]_\lambda$. Pak pro každý nenulový vektor $\vec{x} \in P$ platí, že $\vec{x} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \vec{a}_j$, přičemž alespoň jedno $\alpha_j \neq 0$. Proto $Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{p} |\alpha_j|^2 Q(\vec{a}_j) > 0$.

Vezměme jinou polární bázi $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ a opět ji uspořádejme tak, že
$$Q(\vec{b}_j) > 0 \quad \text{pro } j \leq \tilde{p} \quad \text{a} \quad Q(\vec{b}_j) \leq 0 \quad \text{pro } j > \tilde{p}.$$
Lze nahlédnout, že opět platí $0 < \tilde{p} < n$. Označme $Q = [\vec{b}_{\tilde{p}+1}, \ldots, \vec{b}_n]_\lambda$. Pak podobným argumentem jako prve dostáváme, že $Q(\vec{x}) \leq 0$ pro každý vektor $\vec{x} \in Q$.

Jelikož $P \cap Q = \{\vec{0}\}$, plyne z první věty o dimenzi:
$$p + (n - \tilde{p}) = \dim P + \dim Q = \dim(P + Q) \leq \dim V_n = n.$$
Máme proto nerovnost $p \leq \tilde{p}$. Opačnou nerovnost dostaneme záměnou rolí bází $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ v předchozím postupu.

Počet bazických vektorů s kladnou hodnotou kvadratické formy tudíž nezávisí na volbě polární báze. □

Definice 4.19. Čísla p, resp. q z věty 4.18 nazýváme **kladným**, resp. **záporným indexem setrvačnosti**. **Signaturou** Q nazýváme trojici $\mathrm{sg}(Q) \coloneqq (p, q, r)$ a **hodností** Q rozumíme číslo $h(Q) \coloneqq p + q$. [28]

Definice 4.20. Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V nad T. Říkáme, že Q má **charakter** (zkráceně Q je):

1. **pozitivně definitní** (PD), pokud pro každé nenulové $\vec{x} \in V$ platí, že $Q(\vec{x}) > 0$,
2. **pozitivně semidefinitní** (PSD), když pro každé $\vec{x} \in V$ platí, že $Q(\vec{x}) \geq 0$, a existuje nenulové $\vec{x}_0 \in V$ takové, že $Q(\vec{x}_0) = 0$,
3. **negativně definitní** (ND), pokud pro každé nenulové $\vec{x} \in V$ platí, že $Q(\vec{x}) < 0$,
4. **negativně semidefinitní** (NSD), když pro každé $\vec{x} \in V$ platí, že $Q(\vec{x}) \leq 0$, a existuje nenulové $\vec{x}_0 \in V$ takové, že $Q(\vec{x}_0) = 0$,
5. **indefinitní**, pokud existují $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ taková, že $Q(\vec{x}_1) > 0$ a $Q(\vec{x}_2) < 0$.

[28] Místo (p, q, r) se rovněž setkáme se značením (p, q, n), (p, n, d) nebo (n_+, n_-, n_0).

O charakteru [29] kvadratické formy lze na prostoru konečné dimenze rozhodnout podle signatury.

Věta 4.21 (Charakter a signatura)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a* $\operatorname{sg}(Q) = (p, q, r)$*. Pak platí:*

1. *Q je PD, právě když $p = n$, $q = 0$, $r = 0$,*

2. *Q je PSD, právě když $q = 0$, $r \neq 0$,*

3. *Q je ND, právě když $q = n$, $p = 0$, $r = 0$,*

4. *Q je NSD, právě když $p = 0$, $r \neq 0$,*

5. *Q je indefinitní, právě když $p \neq 0$, $q \neq 0$.*

Důkaz. Ukážeme platnost prvních dvou bodů. Důkazy dalších bodů jsou analogické.

1. ($\Rightarrow$): Pokud Q je PD, pak pro každý vektor $\vec{a}$ z libovolné polární báze platí, že $Q(\vec{a}) > 0$, proto $p = n$, $q = 0 = r$.
   ($\Leftarrow$): Je-li $p = n$, $q = 0 = r$, pak pro libovolnou polární bázi $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ platí, že $Q(\vec{a}_j) > 0$ pro každé $j \in \hat{n}$. Uvažujme libovolné nenulové $\vec{x} \in V_n$ a $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$ (některý z koeficientů α_j je jistě nenulový), pak $Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 Q(\vec{a}_j) > 0$.

2. ($\Rightarrow$): Pokud Q je PSD, pak pro každý vektor $\vec{a}$ z libovolné polární báze platí, že $Q(\vec{a}) \geq 0$, proto $q = 0$. Kdyby bylo i $r = 0$, byla by Q podle prvního bodu PD, proto $r \neq 0$.
   ($\Leftarrow$): Je-li $r \neq 0$, pak v libovolné polární bázi $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ existuje vektor $\vec{a}_{i_0}$ tak, že $Q(\vec{a}_{i_0}) = 0$ (bazický vektor $\vec{a}_{i_0}$ je samozřejmě nenulový). Protože $q = 0$, platí, že $Q(\vec{a}_j) \geq 0$ pro každé $j \in \hat{n}$. Uvažujeme-li libovolný vektor $\vec{x} \in V_n$ a $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$, pak $Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 Q(\vec{a}_j) \geq 0$. $\square$

4.4 Matice kvadratické formy

Definice 4.22. Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T, h její polára a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ báze V_n. Pak **maticí kvadratické formy** Q, resp. hermitovské formy h **v bázi** $\mathcal{X}$ nazveme matici ${}^{\mathcal{X}}Q$ definovanou $[{}^{\mathcal{X}}Q]_{ij} := h(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$ pro každé $i, j \in \hat{n}$.

[29] Jak už to bývá, ani definice charakteru kvadratických forem není jednotná. Podle naší definice je nulová forma PSD i NSD, ale některé definice nulovou formu za PSD ani NSD nepovažují. Dále podle naší definice není PD forma zároveň PSD. Ovšem setkáme se i s definicí, kdy PD formy tvoří podmnožinu PSD a ND formy zase podmnožinu NSD.

Věta 4.23 (Vlastnosti matice kvadratické formy)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T, h její polára a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V_n. Pak platí:*

1. ${}^{\mathcal{X}}Q = ({}^{\mathcal{X}}Q)^H$.
2. $h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \, {}^{\mathcal{X}}Q \overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}$ *pro každé* $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$.
3. $Q(\vec{x}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \, {}^{\mathcal{X}}Q \overline{(\vec{x})_{\mathcal{X}}}$ *pro každé* $\vec{x} \in V_n$.
4. ${}^{\mathcal{Y}}Q = ({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})^T \, {}^{\mathcal{X}}Q \overline{({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})}$ *pro každou bázi $\mathcal{Y}$ prostoru V_n.*

Důkaz.

1. Připomeňme, že matice $\mathbb{A}^H$ se získá z $\mathbb{A}$ komplexním sdružením prvků a transponováním. Tvrzení plyne z hermitovskosti poláry h:
$$[{}^{\mathcal{X}}Q]_{ij} = h(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \overline{h(\vec{x}_j, \vec{x}_i)} = [({}^{\mathcal{X}}Q)^H]_{ij}.$$
2. Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{y} = \sum_{j=1}^n \beta_j \vec{x}_j$. Pak díky linearitě h v prvním a antilinearitě ve druhém argumentu a posléze z definice maticového násobení dostáváme:
$$h(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \overline{\beta_j} h(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \, {}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix} = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \, {}^{\mathcal{X}}Q \overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}.$$
3. Tvrzení získáme z předchozího bodu dosazením $\vec{y} = \vec{x}$.
4. Označme $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$. Pak z definice maticového násobení a z druhého bodu plyne:
$$[({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})^T \, {}^{\mathcal{X}}Q \overline{({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})}]_{ij} = ((\vec{y}_i)_{\mathcal{X}})^T \, {}^{\mathcal{X}}Q \overline{(\vec{y}_j)_{\mathcal{X}}} = h(\vec{y}_i, \vec{y}_j) = [{}^{\mathcal{Y}}Q]_{ij}.$$ □

Věta 4.24 (Hodnost kvadratické formy a její matice)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V_n. Pak $h(Q) = h({}^{\mathcal{X}}Q)$.*

Důkaz. Podle čtvrtého bodu věty 4.23 nezáleží $h({}^{\mathcal{X}}Q)$ na volbě báze $\mathcal{X}$ prostoru V_n, matice přechodu jsou totiž regulární (tedy i matice k nim transponované, resp. komplexně sdružené jsou regulární) a násobení regulární maticí nemění hodnost. Zvolme tedy za $\mathcal{X}$ polární bázi. Pak je ovšem matice ${}^{\mathcal{X}}Q$ diagonální, na diagonále se nachází posloupnost čísel $(Q(\vec{x}_1), \dots, Q(\vec{x}_n))$ a počet nenulových čísel v ní je roven právě $p + q$. Dostáváme tedy $h({}^{\mathcal{X}}Q) = p + q = h(Q)$. □

Poznámka 4.25. V této poznámce shrneme, jak vypadají všechny hermitovské formy na prostorech konečné dimenze.

(a) Čtenář si ověří, že je-li $\mathcal{X}$ báze V_n nad tělesem $\mathbb{C}$ a $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ splňuje $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$ (říkáme, že $\mathbb{A}$ je **hermitovskou maticí**), pak $h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \mathbb{A}\overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}$ je hermitovská forma. Na druhou stranu pro každou hermitovskou formu ve V_n nad $\mathbb{C}$ platí:

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T {}^{\mathcal{X}}Q\overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}},$$

kde ${}^{\mathcal{X}}Q$ je podle věty 4.23 hermitovská matice.

(b) Podobně čtenář ukáže, že je-li $\mathcal{X}$ báze V_n nad tělesem $\mathbb{R}$ a $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňuje $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$ (říkáme, že $\mathbb{A}$ je **symetrickou maticí**), pak $h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \mathbb{A}(\vec{y})_{\mathcal{X}}$ je hermitovská forma. Na druhou stranu pro každou hermitovskou formu ve V_n nad $\mathbb{R}$ platí:

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \, {}^{\mathcal{X}}Q(\vec{y})_{\mathcal{X}},$$

kde ${}^{\mathcal{X}}Q$ je podle věty 4.23 hermitovská a reálná, tedy symetrická matice.

Poznámka 4.26. Speciálně na prostoru T^n jsou všechny hermitovské formy následujícího tvaru:

(a) Je-li $T = \mathbb{C}$, platí $h(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x})^T \mathbb{A}\overline{(\vec{y})}$, kde $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}}Q$. Jde proto o hermitovskou matici.

(b) Je-li $T = \mathbb{R}$, platí $h(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x})^T \mathbb{A}\vec{y}$, kde $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}}Q$. Matice $\mathbb{A}$ je tedy symetrická.

Úkol 4.27. ** Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$. Za jaké podmínky lze $\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} \neq \vec{0}$, doplnit na polární bázi Q? Za jaké podmínky lze LN vektory $\vec{x}, \vec{y}$ z $\mathbb{R}^3$ doplnit na polární bázi Q?

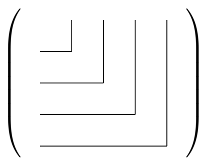
Úkol 4.28. Během studia se setkáte i s jinou definicí hermitovské formy, která vyžaduje její antilinearitu v prvním a linearitu ve druhém argumentu. Zejména se hermitovské formy (a hlavně pak skalární součin) takto zavádí v matematické fyzice. Rozmyslete si, jak se při takové definici změní tvrzení kapitoly Hermitovské formy. Některá z nich se zjednoduší. Například při značení z věty 4.23 bude platit:

- $h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^H \, {}^{\mathcal{X}}Q(\vec{y})_{\mathcal{X}}$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$,
- $Q(\vec{x}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^H \, {}^{\mathcal{X}}Q(\vec{x})_{\mathcal{X}}$ pro každé $\vec{x} \in V_n$,
- ${}^{\mathcal{Y}}Q = ({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})^H \, {}^{\mathcal{X}}Q({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})$ pro každou bázi $\mathcal{Y}$ prostoru V_n.

Přesto jsme se přidrželi zvyku, který u nás na fakultě mírně převládá, a definovali hermitovskou formu lineární v prvním a antilineární ve druhém argumentu.

4.5 Sylvesterovo kritérium pro kvadratické formy

Sylvesterovo kritérium [30] umožňuje rozhodnout o PD, resp. ND kvadratické formy pomocí výpočtu hlavních subdeterminantů její matice v libovolné bázi (ilustrace hlavních subdeterminantů viz obrázek 4). Mezi PSD, NSD a indefinitností ovšem rozlišit neumí. Silnější kritérium, které na základě vlastních čísel matice kvadratické formy rozhodne o jejím charakteru, si představíme později v kapitole Normální matice a normální operátory.



Obrázek 4: Hlavní subdeterminanty.

Ukažme nejprve v prostoru $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, do jakého tvaru lze každou kvadratickou formu převést.

Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^2$, označme $\Delta_1 = \mathbb{A}_{11}$ a $\Delta_2 = \det \mathbb{A}$ hlavní subdeterminanty matice $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}}Q$. Nechť platí, že $\Delta_1 \neq 0$. Potom pomocí Lagrangeovy metody dostaneme:

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) &= \mathbb{A}_{11}x_1^2 + 2\mathbb{A}_{12}x_1x_2 + \mathbb{A}_{22}x_2^2 \\ &= \mathbb{A}_{11}\left(x_1 + \tfrac{\mathbb{A}_{12}}{\mathbb{A}_{11}}x_2\right)^2 - \tfrac{\mathbb{A}_{12}^2}{\mathbb{A}_{11}}x_2^2 + \mathbb{A}_{22}x_2^2 \\ &= \mathbb{A}_{11}\left(x_1 + \tfrac{\mathbb{A}_{12}}{\mathbb{A}_{11}}x_2\right)^2 + \tfrac{\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22} - \mathbb{A}_{12}^2}{\mathbb{A}_{11}}x_2^2 \\ &= \Delta_1\alpha_1^2 + \tfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\alpha_2^2. \end{aligned}$$

Tedy existuje polární báze $\mathcal{A}$, v níž má matice kvadratické formy tvar ${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \end{pmatrix}$.

Nechť Q je kvadratická forma na $\mathbb{R}^3$, označme $\Delta_1 = \mathbb{A}_{11}, \Delta_2 = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22} - \mathbb{A}_{12}^2, \Delta_3 = \det \mathbb{A}$ hlavní subdeterminanty matice $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}}Q$. Nechť je splněno, že $\Delta_1 \neq 0$ a $\Delta_2 \neq 0$. Potom pomocí Lagrangeovy metody upravíme $Q(\vec{x})$ následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) &= \mathbb{A}_{11}x_1^2 + 2\mathbb{A}_{12}x_1x_2 + 2\mathbb{A}_{13}x_1x_3 + \mathbb{A}_{22}x_2^2 + 2\mathbb{A}_{23}x_2x_3 + \mathbb{A}_{33}x_3^2 \\ &= \mathbb{A}_{11}\left(x_1 + \tfrac{\mathbb{A}_{12}}{\mathbb{A}_{11}}x_2 + \tfrac{\mathbb{A}_{13}}{\mathbb{A}_{11}}x_3\right)^2 + \left(\mathbb{A}_{22} - \tfrac{\mathbb{A}_{12}^2}{\mathbb{A}_{11}}\right)x_2^2 + 2\left(\mathbb{A}_{23} - \tfrac{\mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{13}}{\mathbb{A}_{11}}\right)x_2x_3 + \left(\mathbb{A}_{33} - \tfrac{\mathbb{A}_{13}^2}{\mathbb{A}_{11}}\right)x_3^2 \\ &= \Delta_1\alpha_1^2 + \tfrac{\Delta_2}{\Delta_1}x_2^2 + 2\left(\tfrac{\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{23} - \mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{13}}{\Delta_1}\right)x_2x_3 + \left(\tfrac{\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{33} - \mathbb{A}_{13}^2}{\Delta_1}\right)x_3^2 \\ &= \Delta_1\alpha_1^2 + \tfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\left(x_2 + \tfrac{\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{23} - \mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{13}}{\Delta_2}x_3\right)^2 + \left(\tfrac{\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{33} - \mathbb{A}_{13}^2}{\Delta_1} - \tfrac{(\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{23} - \mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{13})^2}{\Delta_1\Delta_2}\right)x_3^2 \\ &= \Delta_1\alpha_1^2 + \tfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\alpha_2^2 + \tfrac{\Delta_3}{\Delta_2}x_3^2 \\ &= \Delta_1\alpha_1^2 + \tfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\alpha_2^2 + \tfrac{\Delta_3}{\Delta_2}\alpha_3^2. \end{aligned}$$

[30] James Joseph Sylvester (1814–1897), anglický matematik

Tudíž existuje polární báze $\mathcal{A}$, pro kterou platí, že ${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \end{pmatrix}$.

Předchozí úpravy se dají provést pro libovolnou kvadratickou formu. Dostáváme tak následující lemma.

Lemma 4.29. *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V_n. Nechť matice ${}^{\mathcal{X}}Q$ má všechny* ***hlavní subdeterminanty*** *řádu maximálně $n-1$ nenulové, tj. pro každé $k < n$ je splněno:*

$$\Delta_k := \det {}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & k \\ 1, & 2, & \dots, & k \end{pmatrix} \neq 0.$$

Potom existuje polární báze $\mathcal{A}$ prostoru V_n taková, že platí:

$${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Definujme soubor $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ vztahy:

$$\vec{a}_k = \sum_{j=1}^{k} \overline{\alpha_j^{(k)}} \vec{x}_j,$$

kde pro každé $k \in \hat{n}$ čísla $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \dots, \alpha_k^{(k)}$ řeší soustavu LAR:

$${}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & k \\ 1, & 2, & \dots, & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^{(k)} \\ \alpha_2^{(k)} \\ \vdots \\ \alpha_k^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} \end{pmatrix},$$

přičemž klademe $\Delta_0 = 1$. V případě $\Delta_n = 0$ navíc požadujeme, aby $\alpha_n^{(n)} = 1$. Ukážeme, že jde o hledanou polární bázi.

- Soubor $\mathcal{A}$ je LN:
  Případ $n = 1$ je triviální. Uvažujme $n > 1$. Jistě platí, že $\alpha_1^{(1)} = 1$, a pro každé $k \in \{2, \dots, n-1\}$ plyne z Cramerova pravidla, že $\alpha_k^{(k)} = 1$. (Při výpočtu determinantu v čitateli použijeme rozvoj podle posledního sloupce.) Pokud $\Delta_n \neq 0$, potom rovnost $\alpha_n^{(n)} = 1$ plyne také z Cramerova pravidla. Jestliže $\Delta_n = 0$, pak z nenulovosti Δ_{n-1} plyne, že n-tý sloupec matice ${}^{\mathcal{X}}Q$ je po úpravě na horní stupňovitý tvar vedlejší, a lze tudíž volit neznámou $\alpha_n^{(n)}$ libovolně, tudíž také $\alpha_n^{(n)} = 1$. Celkově tudíž platí, že $\alpha_k^{(k)} = 1$ pro každé $k \in \hat{n}$. Z definice $\vec{a}_k$ a z lineární nezávislosti $\mathcal{X}$ je pak jasná i lineární nezávislost $\mathcal{A}$.

- Báze $\mathcal{A}$ je polární:
  Nechť $j \leq k$ a h je polára Q, pak platí:
  $$h(\vec{a}_k, \vec{a}_j) = h\left(\vec{a}_k, \sum_{i=1}^{j} \overline{\alpha_i^{(j)}} \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i^{(j)} h(\vec{a}_k, \vec{x}_i).$$
  Rozepišme $h(\vec{a}_k, \vec{x}_i)$ pro $i \leq k$:
  $$\begin{aligned} h(\vec{a}_k, \vec{x}_i) &= h\left(\textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \overline{\alpha_\ell^{(k)}} \vec{x}_\ell, \vec{x}_i\right) && \text{(definice } \mathcal{A}\text{)} \\ &= \textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \overline{\alpha_\ell^{(k)}} h(\vec{x}_\ell, \vec{x}_i) && \text{(linearita } h \text{ v prvním argumentu)} \\ &= \textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \overline{\alpha_\ell^{(k)}} [{}^{\mathcal{X}}Q]_{\ell i} && \text{(definice } {}^{\mathcal{X}}Q\text{)} \\ &= \textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \overline{\alpha_\ell^{(k)}} \overline{[{}^{\mathcal{X}}Q]_{i\ell}} && \left({}^{\mathcal{X}}Q = ({}^{\mathcal{X}}Q)^H\right) \\ &= \overline{\textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell^{(k)} [{}^{\mathcal{X}}Q]_{i\ell}} && \text{(komplexní sdružování)} \\ &= \overline{\tfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}} \delta_{ik} && \text{(volba čísel } \alpha_\ell^{(k)} \text{ a maticové násobení).} \end{aligned}$$
  Celkově pak dostáváme:
  $$h(\vec{a}_k, \vec{a}_j) = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i^{(j)} \overline{\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}} \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{pro } j < k, \\ \overline{\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}} \alpha_k^{(k)} = \overline{\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}} & \text{pro } j = k, \end{cases}$$
  tudíž $\mathcal{A}$ je polární báze.

- Tvar ${}^{\mathcal{A}}Q$:
  Z předchozího bodu plyne, že $Q(\vec{a}_1) = \overline{\Delta_1}$ a $Q(\vec{a}_k) = \overline{\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}}$ pro $k \in \hat{n}$, $k \geq 2$. Jelikož kvadratická forma Q splňuje, že $Q(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ pro každé $\vec{x} \in V_n$, platí také, že $Q(\vec{a}_1) = \Delta_1$ a $Q(\vec{a}_k) = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ pro $k \geq 2$. $\square$

Úkol 4.30. Ověřte sami navázáním na příklady ze začátku kapitoly, že pro kvadratické formy na $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ při postupu podle důkazu lemmatu 4.29 dostaneme stejnou polární bázi, jako když použijeme Lagrangeovu metodu.

Věta 4.31 (Sylvesterovo kritérium)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Pak platí:*

1. *Q je pozitivně definitní, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ má všechny hlavní subdeterminanty kladné, tj. při zachování značení z lemmatu 4.29 je $\Delta_k > 0$ pro každé $k \in \hat{n}$.*

2. *Q je negativně definitní, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ splňuje pro každé $k \in \hat{n}$:*
   $$\begin{aligned} \Delta_k &> 0, \ \text{je-li } k \text{ sudé}, \\ \Delta_k &< 0, \ \text{je-li } k \text{ liché}. \end{aligned}$$

Důkaz. Vysvětlíme oba případy najednou.

- ($\Leftarrow$): Jde o důsledek lemmatu 4.29.
- ($\Rightarrow$): Pokud Q je PD, resp. ND, pak pro každé $k \in \hat{n}$ je kvadratická forma $Q^{(k)}$ definovaná pro každé $\vec{y} \in T^k$ jako

$$Q^{(k)}(\vec{y}) = (\vec{y})^T \ {}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} 1, \ 2, \ ..., \ k \\ 1, \ 2, \ ..., \ k \end{pmatrix} \overline{(\vec{y})}$$

také PD, resp. ND. Platí totiž:

$$Q^{(k)}(\vec{y}) = (y_1 \ \dots \ y_k \ 0 \ \dots \ 0)^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = Q(\vec{x}), \text{ kde } (\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud plyne, že ${}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} 1, \ 2, \ ..., \ k \\ 1, \ 2, \ ..., \ k \end{pmatrix}$ je regulární matice, proto je jasné, že $\Delta_k \neq 0$ pro každé $k \in \hat{n}$. Tvrzení je pak opět přímým důsledkem lemmatu 4.29. $\square$

Příklad 4.32. Nechť Q je kvadratická forma na $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi tvar:

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_2x_3.$$

Rozhodněte, zda Q je PD.

Řešení: Stačí spočítat hlavní subdeterminanty matice ${}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dostáváme $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = -3, \Delta_3 = -1$. Podle Sylvesterova kritéria není Q ani PD, ani ND. Vskutku, jde o indefinitní kvadratickou formu, protože pro vektory ze standardní báze je $Q(\vec{e}_1) = 1$ a $Q(\vec{e}_2) = -2$.

5 Skalární součin a ortogonalita

Motivace. Skalární součin nám umožňuje v „našem světě“ snadno počítat úhel mezi vektory, rozhodnout o kolmosti vektorů nebo určit velikost vektoru. Ovšem teorie skalárního součinu a ortogonality, se kterou se seznámíme, je daleko obecnější a bude stejně dobře fungovat i v abstraktních vektorových prostorech – prostorech posloupností, prostorech funkcí atd. Takové prostory budete více zkoumat ve funkcionální analýze. Hrají významnou roli v teorii parciálních diferenciálních rovnic, v kvantové mechanice, Fourierově analýze (matematický popis zpracování signálu) nebo v ergodické teorii (matematický základ termodynamiky).

5.1 Skalární součin

V celé kapitole si pod tělesem T představujeme pouze $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$ (podobně jako pro hermitovské formy by všechna tvrzení platila i pro ostatní číselná tělesa, která jsou uzavřená na komplexní sdružování).

Definice 5.1. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Zobrazení $\langle . | . \rangle \colon V \times V \to T$ nazveme **skalárním součinem**, pokud $\langle . | . \rangle$ je hermitovská forma s pozitivně definitní diagonálou, [31] tj. platí následující tři axiomy skalárního součinu:

1. **hermitovskost**: $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle}$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$,
2. **linearita v prvním argumentu**: $\langle \alpha\vec{x} + \vec{y} | \vec{z} \rangle = \alpha\langle \vec{x} | \vec{z} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{z} \rangle$ pro každé $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ a každé $\alpha \in T$,
3. **pozitivní definitnost**: $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \geq 0$ pro každé $\vec{x} \in V$ a $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$, právě když $\vec{x} = \vec{0}$.

Normou [32] nazveme zobrazení $\|.\| : V \to T$ definované pro každé $\vec{x} \in V$ předpisem $\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$. Vektorový prostor V nad tělesem T se skalárním součinem $\langle . | . \rangle$ [33] značíme $\mathcal{H}$. (V prostoru $\mathcal{H}$ je tudíž definovaný jediný skalární součin.) Někdy mu říkáme **pre-Hilbertův prostor**. [34]

[31] Místo skalární součin se také říká vnitřní součin. A termín skalární součin se pak rezervuje pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ či $\mathbb{R}^3$.

[32] Slovo norma má původ v latině, kde označovalo úhelník, nástroj používaný tesaři k určování pravého úhlu. Normě podle naší definice se také říká norma indukovaná skalárním součinem. Jak se dozvíte v topologii, axiomatická definice normy je obecnější a „naše“ norma je pouze jejím konkrétním příkladem.

[33] Existuje spousta symbolů pro skalární součin vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$: $\vec{x} \cdot \vec{y}$, $(\vec{x}, \vec{y})$, $(\vec{x} | \vec{y})$, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, $g(\vec{x}, \vec{y})$, $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y})$. My jsme se přiklonili ke špičatým závorkám, aby se značení nepletlo se symbolem pro soubor – pro ten máme vyhrazeny kulaté závorky.

[34] David Hilbert (1862–1943), německý matematik, byl jeden ze zakladatelů funkcionální analýzy. Tato disciplína se zabývá studiem Hilbertových prostorů (vektorové prostory se skalárním součinem, které jsou navíc úplné). Symbol $\mathcal{H}$ byl zaveden na počest Hilbertovi.

Věta 5.2 (Vlastnosti skalárního součinu)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T. Pak pro každé $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{H}$ a každé $\alpha \in T$ platí:*

1. ***antilinearita ve druhém argumentu**: $\langle \vec{x} \,|\, \alpha\vec{y} + \vec{z} \rangle = \overline{\alpha}\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} \,|\, \vec{z} \rangle$,*

2. *$\|\vec{x}\| \geq 0$ a $\|\vec{x}\| = 0$, právě když $\vec{x} = \vec{0}$,*

3. *$\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$,*

4. ***rovnoběžníková rovnost**:*
$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2),$$

5. ***polarizační identity**:*
   pro $T = \mathbb{R}$
$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2\right),$$
   pro $T = \mathbb{C}$
$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2\right) + \frac{\mathrm{i}}{4}\left(\|\vec{x} + \mathrm{i}\vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \mathrm{i}\vec{y}\|^2\right).$$

Důkaz. Jde o důsledky věty 4.3 a definice skalárního součinu a normy. □

Poznámka 5.3. Je-li $\mathcal{H}$ reálný vektorový prostor, pak je skalární součin **symetrický**, tedy $\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} \,|\, \vec{x} \rangle$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$, a **bilineární**, tj. lineární v obou argumentech.

Příklad 5.4. Nejtypičtějším příkladem prostorů se skalárním součinem jsou:

- nad tělesem $\mathbb{C}$
  unitární prostor $\mathbb{C}^n$, [35] na němž je definován **standardní skalární součin** pro každé dva vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ jako
$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$
  Norma vektoru je pak rovna:
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}.$$

[35] Použití pojmu unitární prostor není jednotné. V literatuře tak často označuje libovolný komplexní pre-Hilbertův prostor, nebo se případně ještě připojí podmínka konečné dimenze.

- nad tělesem $\mathbb{R}$

  eukleidovský [36] **prostor** $\mathbb{R}^n$, [37] na němž je definován **standardní skalární součin** pro každé dva vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ jako

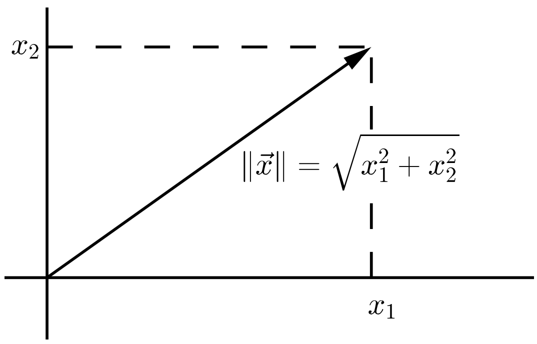
$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle \coloneqq \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

  Norma vektoru je rovna:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Čtenář sám ověří, že jsou splněny axiomy skalárního součinu.

Poznámka 5.5. Norma v eukleidovských prostorech $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ má význam velikosti vektoru. [38] Např. v $\mathbb{R}^2$ bychom velikost vektoru $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ počítali podle Pythagorovy věty jako $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, což je právě rovno $\|\vec{x}\|$, viz obrázek 5.



Obrázek 5: Norma vektoru v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$.

Poznámka 5.6. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ vyjadřuje rovnoběžníková rovnost fakt, že součet čtverců délek všech stran v rovnoběžníku je roven součtu čtverců délek úhlopříček, viz obrázek 6.

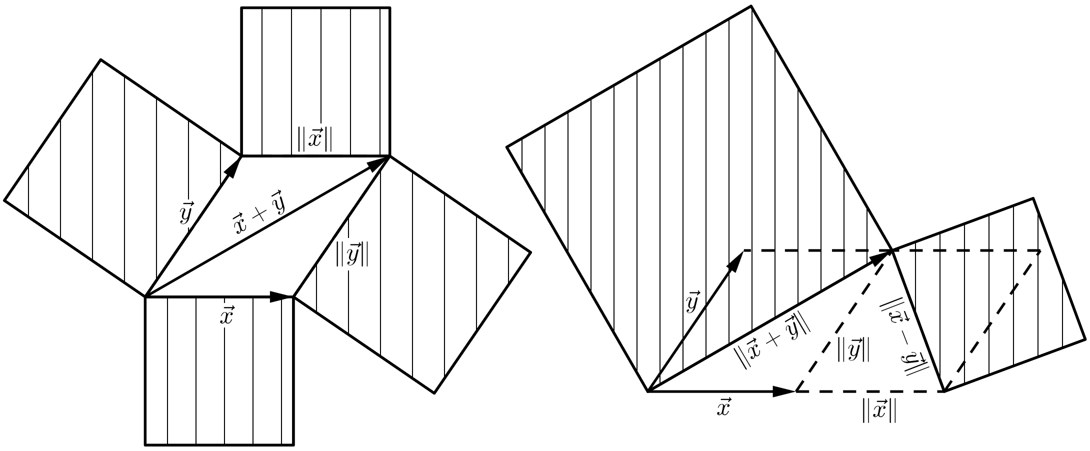
Definice 5.7. Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}, \vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$. Pak **úhlem** mezi $\vec{x}$ a $\vec{y}$ nazveme číslo

$$\varphi \coloneqq \arccos \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}.$$

[36] Eukleidés (325–260 př. n. l), řecký matematik a geometr

[37] Ke zdůraznění, že je prostor $\mathbb{R}^n$ vybaven standardním skalárním součinem, se používá značení E^n.

[38] Eukleidovský prostor $\mathbb{R}^3$ je nám nejbližší pre-Hilbertův prostor. Jde o ideální model „našeho světa“, kde řešíme geometrické úlohy a kde funguje klasická fyzika.



Obrázek 6: Rovnoběžníková rovnost.

Poznámka 5.8. Funkce arccos nabývá hodnot od 0 do π, proto $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$. Dále, jelikož je arccos definován na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, je pro korektnost definice třeba, aby $-1 \leq \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} \leq 1$. Platnost těchto nerovností vyplyne z Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti, kterou uvedeme vzápětí ve větě 5.11.

Poznámka 5.9. Vyšetřeme, kdy je úhel nulový, ostrý, pravý, tupý, a kdy přímý.

- $\varphi = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$.
- φ je ostrý, tj. $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle > 0$ a $\varphi \neq 0$.
- φ je pravý, tj. $\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = 0$.
- φ je tupý, tj. $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Leftrightarrow \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle < 0$ a $\varphi \neq \pi$.
- φ je přímý, tj. $\varphi = \pi \Leftrightarrow \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = -\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$.

Poznámka 5.10. Ověříme, že definice úhlu odpovídá v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ definici, kterou známe ze střední školy. Mějme dány vektory $\vec{x}, \vec{y}$. Pak z obrázku 7 vyčteme:

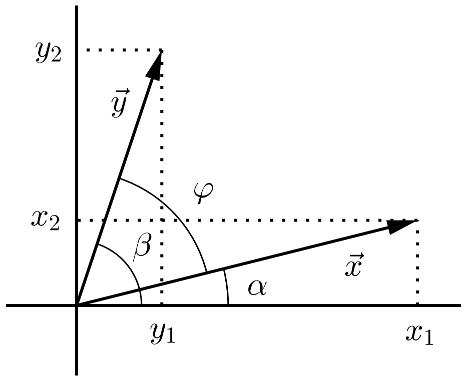
$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\|\vec{x}\|},\ \sin\alpha = \frac{x_2}{\|\vec{x}\|},\ \cos\beta = \frac{y_1}{\|\vec{y}\|},\ \sin\beta = \frac{y_2}{\|\vec{y}\|}.$$

Přímo z definice kosinu a sinu lze ověřit platnost součtového vzorce:

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha.$$

Po dosazení vyjádření pro sinus a kosinus dostáváme:

$$\cos\varphi = \cos(\beta - \alpha) = \frac{y_1 x_1 + y_2 x_2}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} = \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}.$$



Obrázek 7: Úhel mezi vektory v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$.

Věta 5.11 (Cauchyho–Schwarzova nerovnost)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. Pak platí:*

$$|\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|.$$

Rovnost nastává, právě když jsou vektory $\vec{x}, \vec{y}$ LZ.

Důkaz. Nejprve ověříme, že platí nerovnost. Poté se podíváme, kdy nastává rovnost.

(a) Pro $\vec{y} = \vec{0}$ nerovnost platí. Uvažujeme $\vec{y} \neq \vec{0}$. Pro libovolné $\alpha \in T$ máme:

$$0 \leq \langle \vec{x} - \alpha\vec{y} \,|\, \vec{x} - \alpha\vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 - \alpha\langle \vec{y} \,|\, \vec{x} \rangle - \overline{\alpha}\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle + |\alpha|^2 \|\vec{y}\|^2.$$

Položíme-li $\alpha = \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}$, pak z předchozího vztahu dostáváme:

$$0 \leq \|\vec{x}\|^2 - \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}\langle \vec{y} \,|\, \vec{x} \rangle - \frac{\langle \vec{y} \,|\, \vec{x} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle + \left| \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2} \right|^2 \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \frac{|\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle|^2}{\|\vec{y}\|^2}.$$

Odtud plyne nerovnost $|\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$, tedy také $|\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$.

(b)
- ($\Rightarrow$): Nastává-li rovnost v Cauchyho–Schwarzově nerovnosti, potom z předchozí části důkazu plyne, že buď $\vec{y} = \vec{0}$, nebo $\vec{x} = \alpha\vec{y}$, kde $\alpha = \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}$.
- ($\Leftarrow$): Jsou-li vektory $\vec{x}, \vec{y}$ LZ, pak buď $\vec{x} = \vec{0}$ a rovnost zřejmě platí, nebo $\vec{y} = \beta\vec{x}$ pro nějaké $\beta \in T$. Pak $|\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle| = |\langle \vec{x} \,|\, \beta\vec{x} \rangle| = |\beta| \|\vec{x}\|^2 = \|\beta\vec{x}\| \|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| \|\vec{x}\|$. $\square$

Poznámka 5.12. Podle definice úhlu a Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti [39] vidíme, že vektory svírají nulový nebo přímý úhel, právě když jsou lineárně závislé. To opět odpovídá naší představě z eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^2$ či $\mathbb{R}^3$.

[39] Francouzský matematik Augustin Louis Cauchy [výslovnost „kóši“] (1789–1857) dokázal Cauchyho–Schwarzovu nerovnost v roce 1821 pro vektory z eukleidovského prostoru. Jeho student Viktor Jakovlevič Bunjakovskij (1804–1889) v roce 1859 ukázal, že nerovnost platí i v integrální formě, tedy v jistých Hilbertových prostorech nekonečné dimenze. Německý matematik Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) pak tvrzení v plné obecnosti dokázal v roce 1885. Proto se někdy nerovnost v literatuře označuje i Cauchyho–Bunjakovského–Schwarzova.

Věta 5.13 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. Pak platí:*

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Rovnost nastává, právě když existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, takové, že $\vec{x} = \alpha\vec{y}$ nebo $\vec{y} = \alpha\vec{x}$.

Důkaz. Nejprve ověříme, že platí nerovnost, a potom zjistíme, kdy nastává rovnost.

(a)

$$\begin{aligned} \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle \vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2|\langle \vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle| \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \\ &= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2, \end{aligned}$$

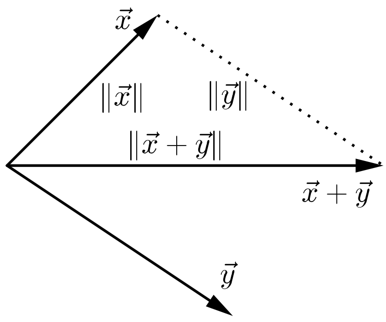
přičemž druhá nerovnost je Cauchyho–Schwarzova.

(b)

- ($\Rightarrow$): Nastává-li rovnost v trojúhelníkové nerovnosti, pak z předchozí části důkazu vyplývá, že nastává rovnost v Cauchyho–Schwarzově nerovnosti. Proto buď $\vec{x} = \vec{0}$ (pak $\vec{x} = 0\vec{y}$, neboli $\vec{x}$ je nezáporný násobek $\vec{y}$), nebo $\vec{x} \neq \vec{0}$ a $\vec{y} = \beta\vec{x}$ pro nějaké $\beta \in T$. Dále z předchozí části důkazu plyne, že platí $\mathrm{Re}\langle \vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle = |\langle \vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle|$, odkud máme $\mathrm{Re}\langle \vec{x} \,|\, \beta\vec{x}\rangle = |\langle \vec{x} \,|\, \beta\vec{x}\rangle|$, tedy $\mathrm{Re}(\overline{\beta}\|\vec{x}\|^2) = |\overline{\beta}|\|\vec{x}\|^2$, tj. $\mathrm{Re}\overline{\beta} = |\overline{\beta}|$. To splní pouze $\beta \in \mathbb{R}$ a $\beta \geq 0$.
- ($\Leftarrow$): Platí-li $\vec{y} = \alpha\vec{x}$ pro nějaké $\alpha \geq 0$, pak s využitím vlastností normy dostáváme:

$$\begin{aligned} \|\vec{x}+\vec{y}\| &= \|\vec{x}+\alpha\vec{x}\| &&= \|(1+\alpha)\vec{x}\| \\ &= (1+\alpha)\|\vec{x}\| &&= \|\vec{x}\| + \alpha\|\vec{x}\| \\ &= \|\vec{x}\| + \|\alpha\vec{x}\| &&= \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|. \end{aligned}$$

Podobně dostaneme, že rovnost platí, je-li $\vec{x} = \alpha\vec{y}$ pro nějaké $\alpha \geq 0$. □



Obrázek 8: Trojúhelníková nerovnost.

Poznámka 5.14. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ odpovídá trojúhelníková nerovnost známému faktu, že v trojúhelníku je součet délek dvou stran vždy větší než délka strany třetí, viz obrázek 8.

5.2 Ortogonalita

Definice 5.15. Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T.

1. Vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$ nazveme **kolmými (ortogonálními)**, [40] platí-li $\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = 0$. Značíme $\vec{x} \perp \vec{y}$.

2. Vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ z $\mathcal{H}$ nazveme:

   (a) **ortogonálními (OG)**, pokud $\langle \vec{x}_i \,|\, \vec{x}_j \rangle = 0$ pro každé $i, j \in \widehat{n}, i \neq j$,

   (b) **ortonormálními (ON)**, pokud $\langle \vec{x}_i \,|\, \vec{x}_j \rangle = \delta_{ij}$.

ON vektory jsou nutně nenulové, pro OG vektory to neplatí.

Poznámka 5.16. Pokud $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ jsou nenulové OG vektory, pak $\frac{1}{\|\vec{x}_1\|}\vec{x}_1, \ldots, \frac{1}{\|\vec{x}_n\|}\vec{x}_n$ jsou ON vektory.

Místo soubor OG, resp. ON vektorů budeme častěji říkat ortogonální, resp. ortonormální soubor.

Příklad 5.17. Nejjednodušším ON souborem v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ a v unitárním prostoru $\mathbb{C}^n$ je standardní báze.

Věta 5.18 (Lineární nezávislost OG vektorů)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ jsou nenulové OG vektory z $\mathcal{H}$. Potom $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ jsou LN.*

Důkaz. Nechť $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$. Provedeme skalární součin obou stran s vektorem $\vec{x}_j$ pro každé $j \in \widehat{n}$:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i \,\middle|\, \vec{x}_j \right\rangle = \langle \vec{0} \,|\, \vec{x}_j \rangle = 0.$$

Podle linearity skalárního součinu v prvním argumentu a ortogonality vektorů upravíme levou stranu rovnosti:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \vec{x}_i \,|\, \vec{x}_j \rangle = \alpha_j \langle \vec{x}_j \,|\, \vec{x}_j \rangle = \alpha_j \|\vec{x}_j\|^2 = 0.$$

Jelikož $\vec{x}_j \neq \vec{0}$, dostáváme $\alpha_j = 0$ pro každé $j \in \widehat{n}$, čímž je dokázána LN vektorů. □

Důsledek 5.19. *Jsou-li vektory ON, pak jsou LN.*

Věta 5.20 (Souřadnice v OG bázi)**.** *Nechť $\mathcal{H}_n$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je OG báze $\mathcal{H}_n$. Potom pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí:*

$$x_i^{\#}(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle}{\|\vec{x}_i\|^2}.$$

[40] Původ slova ortogonální je v řeckém orthos a gonia, přičemž druhé slovo znamená úhel, ale první slovo nejprve znamenalo přímý a až později se význam změnil na pravý.

Důkaz. Nechť $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k$. Provedeme skalární součin obou stran s vektorem $\vec{x}_i$.

$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k \,\middle|\, \vec{x}_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle \vec{x}_k \,|\, \vec{x}_i \rangle = \alpha_i \langle \vec{x}_i \,|\, \vec{x}_i \rangle,$$

kde jsme opět využili linearity skalárního součinu v prvním argumentu a ortogonality báze. Odtud dostáváme $\alpha_i = \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle}{\|\vec{x}_i\|^2}$ (dělíme nenulovým číslem, protože jde o bazické, tedy nenulové vektory). □

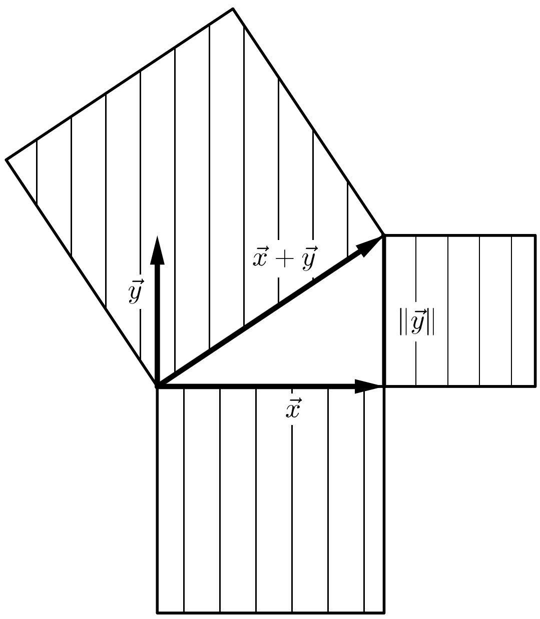
Důsledek 5.21 (Souřadnice v ON bázi)**.** *Nechť $\mathcal{H}_n$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je ON báze $\mathcal{H}_n$. Pak pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí:*

$$x_i^{\#}(\vec{x}) = \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle.$$

Definice 5.22. Nechť $\mathcal{H}_n$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je ON báze $\mathcal{H}_n$. Pak souřadnice vektorů v bázi $\mathcal{X}$ nazýváme **Fourierovými koeficienty** v bázi $\mathcal{X}$. [41]

Věta 5.23 (Pythagorova)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\vec{x}, \vec{y}$ jsou OG vektory z $\mathcal{H}$. Potom platí, že $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$.*

Důkaz. Je-li $\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = 0$, pak $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$. □



Obrázek 9: Pythagorova věta.

[41] Jean Baptiste Joseph Fourier [výslovnost „furié“] (1768–1830), francouzský matematik

Poznámka 5.24. V $\mathbb{R}^2$ odpovídá tvrzení „klasické“ Pythagorově větě, která říká, že součet obsahů čtverců nad odvěsnami v pravoúhlém trojúhelníku je roven obsahu čtverce nad přeponou. Viz obrázek 9.

Poznámka 5.25. Z důkazu je vidět, že v reálných prostorech platí i opačná implikace v Pythagorově větě. [42] V komplexních prostorech ale platit nemusí. Např. v unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$ splňují vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, že $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$, přesto $\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \mathrm{i} \neq 0$.

Věta 5.26 (Gramova–Schmidtova)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ jsou LN vektory v $\mathcal{H}$. Pak existují OG (i ON) vektory $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ takové, že $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$ pro každé $k \in \hat{n}$.*
Slovy: „LN vektory lze ortogonalizovat (i ortonormalizovat).“

Důkaz. Pomocí tzv. **Gramova–Schmidtova ortogonalizačního procesu** [43] vyrobíme nenulové OG vektory splňující podmínky věty. Na závěr každý z vektorů vynásobíme převrácenou hodnotou jeho normy. Tím se nezmění jejich lineární obal a podle poznámky 5.16 získáme ON vektory.

Položme $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$. Pak je splněno $[\vec{x}_1]_\lambda = [\vec{y}_1]_\lambda$ a $\vec{y}_1$ je jistě OG. Předpokládejme, že jsou zkonstruovány OG vektory $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ splňující $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$ pro nějaké $1 \leq k < n$. Další vektor hledáme ve tvaru:

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{y}_i.$$

Při takovém předpisu bude zřejmě platit, že $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}]_\lambda = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k, \vec{y}_{k+1}]_\lambda$. Zbývá tedy najít koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tak, aby $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k, \vec{y}_{k+1}$ byly OG vektory. Koeficienty najdeme z podmínek $\langle \vec{y}_{k+1} \,|\, \vec{y}_j \rangle = 0$ pro každé $j \in \hat{k}$. Dostáváme:

$$\langle \vec{y}_{k+1} \,|\, \vec{y}_j \rangle = 0 = \langle \vec{x}_{k+1} \,|\, \vec{y}_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle \vec{y}_i \,|\, \vec{y}_j \rangle = \langle \vec{x}_{k+1} \,|\, \vec{y}_j \rangle - \alpha_j \langle \vec{y}_j \,|\, \vec{y}_j \rangle,$$

kde jsme využili linearity skalárního součinu v prvním argumentu a ortogonality vektorů $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$. Koeficienty α_j jsme našli, mají tvar $\alpha_j = \frac{\langle \vec{x}_{k+1} \,|\, \vec{y}_j \rangle}{\|\vec{y}_j\|^2}$. Dělíme jistě nenulovým číslem, neboť díky rovnosti $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$ a lineární nezávislosti vektorů $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ jsou vektory $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ také LN. □

Poznámka 5.27. Můžeme si tedy zapamatovat vzorec:

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \vec{x}_{k+1} \,|\, \vec{y}_i \rangle}{\|\vec{y}_i\|^2} \vec{y}_i, \tag{5}$$

pomocí něhož lze vyrábět z LN vektorů OG vektory se stejným lineárním obalem.

[42] Pythagoras ze Samu (570–510 př. n. l.), legendární řecký filozof, matematik a astronom

[43] Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces nese jméno po dánském (pojistném) matematikovi Jørgenu Pedersenu Gramovi (1850–1916) a německém matematikovi Erhardu Schmidtovi (1876–1959). Ovšem autorem metody byl již Laplace a algoritmus hojně využíval také Cauchy.

Důsledek 5.28 (Existence ON báze)**.** *Každý vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T, kde $n \in \mathbb{N}$, má ON bázi.*

Důkaz. Skalární součin je hermitovskou formou na prostoru $\mathcal{H}_n$. Existuje tudíž jeho polární báze, což je jistě OG báze $\mathcal{H}_n$. Z ní pak vyrobíme ON bázi podle poznámky 5.16. □

Poznámka 5.29. K praktickému hledání ON báze prostorů konečné dimenze nám ovšem bude sloužit Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces. Najdeme jakoukoliv bázi a tu ortonormalizujeme.

Poznámka 5.30. Z důkazu Gramovy–Schmidtovy věty je vidět, že pro ON vektory $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ v $\mathcal{H}$ a pro $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí, že vektor $\vec{x} - \sum_{j=1}^{k} \langle \vec{x} \,|\, \vec{y}_j \rangle \vec{y}_j$ je kolmý na $\vec{y}_i$ pro každé $i \in \widehat{k}$.

Věta 5.31 (Besselova nerovnost)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ jsou ON vektory v $\mathcal{H}$. Pak pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí:*

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle|^2 \leq \|\vec{x}\|^2.$$

Důkaz. Rozepíšeme následující výraz podle vlastností skalárního součinu a využijeme poznámku 5.30:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle \vec{x} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \;\middle|\; \vec{x} - \textstyle\sum_{j=1}^{k} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_j \rangle \vec{x}_j \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{x} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \;\middle|\; \vec{x} \right\rangle - \textstyle\sum_{j=1}^{k} \overline{\langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_j \rangle} \left\langle \vec{x} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \;\middle|\; \vec{x}_j \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{x} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \;\middle|\; \vec{x} \right\rangle = \|\vec{x}\|^2 - \textstyle\sum_{i=1}^{k} |\langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle|^2.
\end{aligned}$$

□

Věta 5.32 (ON báze)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je ON soubor v $\mathcal{H}$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

1. *$\mathcal{X}$ je báze.*
2. *Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí:*
$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i.$$
3. *Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$ platí:*
$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \overline{\langle \vec{y} \,|\, \vec{x}_i \rangle}.$$

4. *Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ nastává* ***Parsevalova rovnost****:*

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle|^2.$$

Důkaz. Stačí dokázat cyklus implikací.

- 1. $\Rightarrow$ 2.: Plyne z důsledku 5.21.
- 2. $\Rightarrow$ 3.: Stačí předchozí rovnost vynásobit skalárně vektorem $\vec{y}$ a využít vlastností skalárního součinu.
- 3. $\Rightarrow$ 4.: Dostaneme dosazením $\vec{y} = \vec{x}$.
- 4. $\Rightarrow$ 1.: $\mathcal{X}$ je LN. Jelikož pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ nastává rovnost v Besselově nerovnosti, vidíme okamžitě z důkazu věty 5.31, že každé $\vec{x}$ lze napsat jako $\sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i$. Tudíž $\mathcal{X}$ je báze. $\square$

Poznámka 5.33. Parsevalova rovnost [44] je speciálním případem Besselovy nerovnosti. [45] Nastává pro každý vektor, právě když příslušný ON soubor tvoří bázi.

Úkol 5.34. Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. **Gramovou maticí** [46] vektorů $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ z $\mathcal{H}$ rozumíme čtvercovou matici $\mathbb{G}$ řádu n definovanou pro každé $i, j \in \hat{n}$ jako $\mathbb{G}_{ij} = \langle \vec{x}_i \,|\, \vec{x}_j \rangle$. Její determinant nazýváme **gramiánem**. Dokažte, že vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ jsou LN, právě když gramián je nenulový.

5.3 Ortogonální doplněk

Definice 5.35. Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $M \subset \mathcal{H}, M \neq \emptyset$. **Ortogonálním doplňkem** M do $\mathcal{H}$ nazveme množinu

$$M^\perp = \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = 0 \text{ pro každé } \vec{y} \in M\}.$$

Věta 5.36 (Vlastnosti OG doplňku)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T a $M \subset \mathcal{H}, M \neq \emptyset$. Pak platí:*

1. *$M^\perp \subset\subset \mathcal{H}$.*
2. *$M \subset (M^\perp)^\perp$.*

[44] Marc-Antoine Parseval des Chênes [výslovnost „parseval“] (1755–1836), francouzský matematik

[45] Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846), německý astronom, matematik a geodet

[46] Název matice nevyjadřuje její hmotnost, nýbrž odkazuje na matematika Grama, nám známého z Gramova–Schmidtova OG procesu.

Důkaz.

1. $M^\perp \neq \emptyset$, protože $\vec{0} \in M^\perp$. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in M^\perp$ a $\alpha \in T$, pak pro každé $\vec{y} \in M$ platí $\langle \vec{x}_1 | \vec{y} \rangle = 0$ a $\langle \vec{x}_2 | \vec{y} \rangle = 0$. Odtud $\langle \alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 | \vec{y} \rangle = \alpha\langle \vec{x}_1 | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2 | \vec{y} \rangle = 0$, tedy $\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in M^\perp$.

2. Platnost inkluze plyne přímo z definice ortogonálního doplňku. □

Čtenáři jistě už vrtá hlavou, jestli je slovo doplněk dobře zvolené. To jest, zda OG doplněk podprostoru je také jeho doplňkem. Odpověď dává následující věta. [47]

Věta 5.37 (OG rozklad)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $P \subset\subset \mathcal{H}$ a $\dim P < +\infty$. Pak platí:*

1. $\mathcal{H} = P \oplus P^\perp$.

2. $(P^\perp)^\perp = P$.

Důkaz.

1. Ošetříme dva případy.

   - Je-li $P = \{\vec{0}\}$, pak $P^\perp = \mathcal{H}$ a $\mathcal{H} = \{\vec{0}\} \oplus \mathcal{H}$.
   - Nechť $P \neq \{\vec{0}\}$, pak existuje ON báze P. Označme ji $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$. Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí, že $\vec{x} - \sum_{i=1}^n \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i$ je kolmý na $\vec{x}_j$ pro každé $j \in \hat{n}$ podle poznámky 5.30. Tudíž je kolmý i na všechny vektory z P. Odtud plyne, že

     $$\vec{x} - \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \in P^\perp.$$

     Jelikož $\sum_{i=1}^n \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \in P$, je tím dokázáno, že $\mathcal{H} = P + P^\perp$. Direktnost součtu plyne z faktu, že $P \cap P^\perp$ obsahuje vektory kolmé na sebe sama, tedy $P \cap P^\perp = \{\vec{0}\}$.

2. Už víme, že $P \subset (P^\perp)^\perp$.
   $(P^\perp)^\perp \subset P$: Podle již dokázaného prvního bodu pro každé $\vec{x} \in (P^\perp)^\perp \subset \mathcal{H}$ existují $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in P^\perp$ takové, že $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$. Dokážeme-li, že $\vec{q} = \vec{0}$, pak bude jasné, že $\vec{x} \in P$. Provedeme skalární součin s vektorem $\vec{q}$ a dostaneme:

   $$\langle \vec{x} | \vec{q} \rangle = \langle \vec{p} | \vec{q} \rangle + \langle \vec{q} | \vec{q} \rangle.$$

   Z definice OG doplňku je zřejmé, že $\langle \vec{x} | \vec{q} \rangle = 0$ a zároveň $\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = 0$, proto $\langle \vec{q} | \vec{q} \rangle = 0$, tedy $\vec{q} = \vec{0}$. □

[47] Zvídavý čtenář se možná také ptá, zda je předpoklad konečné dimenze podprostoru P ve větě 5.37 nezbytný. V tuto chvíli ano, protože bychom obecnější znění s aktuálními znalostmi ještě neuměli dokázat. Ale jak ukáže funkcionální analýza, v Hilbertových prostorech bude tvrzení platit i pro podprostory nekonečné dimenze, pokud budou ovšem tzv. uzavřené.

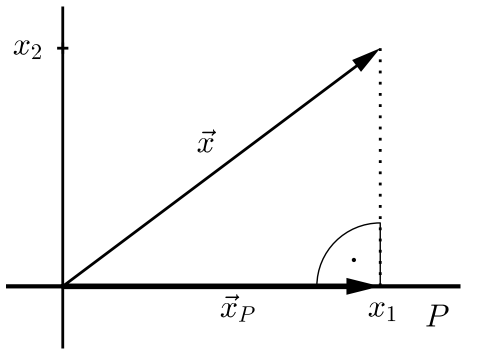
Definice 5.38. Nechť $P \subset\subset \mathcal{H}$ a nechť $\vec{x} \in \mathcal{H}$. Je-li $\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_{P^\perp}$, kde $\vec{x}_P \in P$ a $\vec{x}_{P^\perp} \in P^\perp$, pak vektor $\vec{x}_P$ se nazývá **ortogonálním průmětem** $\vec{x}$ do P.

Uvědomme si také souvislost s projektory: Zobrazení, které vektoru přiřazuje jeho OG průmět do P, je projektor na P podle $P^\perp$.

Poznámka 5.39. V důkazu prvního bodu věty 5.37 je uvedeno, jak lze OG průmět $\vec{x}$ do P konstruovat, známe-li ON bázi $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ prostoru P. Platí:

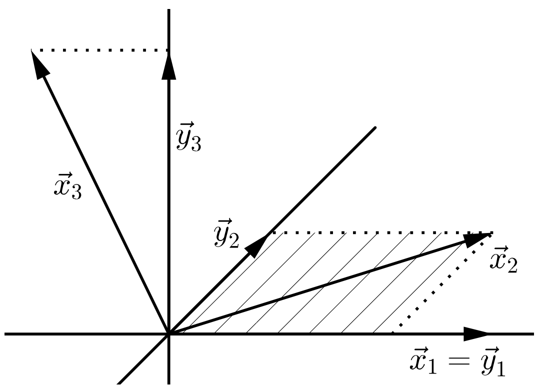
$$\vec{x}_P = \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_j \rangle \vec{x}_j. \tag{6}$$

V příkladech bude ovšem výhodnější konstruovat OG průměty jinými způsoby.



Obrázek 10: Ortogonální průmět vektoru na přímku.

Poznámka 5.40. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ odpovídá průmět vektoru naší představě kolmého promítání. Např. pro podprostor $P = [\vec{e}_1]_\lambda$, tedy přímku odpovídající ose x, je OG průmět $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$ podle poznámky 5.39 roven $\vec{x}_P = \langle \vec{x} \,|\, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 = x_1 \vec{e}_1$. Viz obrázek 10.



Obrázek 11: Ortogonalizace vektorů v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$.

Poznámka 5.41. Vraťme se ještě jednou ke Gramovu–Schmidtovu ortogonalizačnímu procesu a všimněme si, jak se dá proces popsat pomocí pojmu OG průmět.

Připomeňme, že úlohou je zkonstruovat k daným LN vektorům $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ OG vektory $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ takové, že $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k]_\lambda$ pro každé $k \in \hat{n}$. Odvodili jsme vzorec (5) pro výpočet $\vec{y}_{k+1}$, máme-li zkonstruované $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k$:

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \vec{x}_{k+1} \,|\, \vec{y}_j \rangle}{\|\vec{y}_j\|^2} \vec{y}_j = \vec{x}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \left\langle \vec{x}_{k+1} \,\middle|\, \tfrac{1}{\|\vec{y}_j\|} \vec{y}_j \right\rangle \tfrac{1}{\|\vec{y}_j\|} \vec{y}_j .$$

Jelikož $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k$ jsou OG vektory, $\frac{1}{\|\vec{y}_1\|}\vec{y}_1, \dots, \frac{1}{\|\vec{y}_k\|}\vec{y}_k$ jsou ON vektory. Můžeme proto psát $\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - (\vec{x}_{k+1})_P$, přičemž $P = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k]_\lambda$. Neboli $\vec{y}_{k+1}$ získáme tak, že si z $\vec{x}_{k+1}$ necháme pouze část, která je kolmá na P, a patří tedy do $P^\perp$.

Na obrázku 11 je ilustrace Gramova–Schmidtova OG procesu, kterým ortogonalizujeme vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$.

6 Metrická geometrie

Jedná se o lineární geometrii ve vektorových prostorech se skalárním součinem. V takových prostorech budeme navíc umět měřit vzdálenosti a úhly.

V celé kapitole uvažujeme pouze $T = \mathbb{C}$ nebo $T = \mathbb{R}$, pracujeme totiž se skalárním součinem.

6.1 Vzdálenosti

Definice 6.1. Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T a $M_1, M_2 \subset \mathcal{H}$, $M_1, M_2 \neq \emptyset$. Pak **vzdáleností** množin M_1 a M_2 nazveme číslo

$$\rho(M_1, M_2) := \inf\{\|\vec{x} - \vec{y}\| \mid \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2\}.$$

Poznámka 6.2. Díky neprázdnosti množin M_1 a M_2 je $\rho(M_1, M_2) \neq +\infty$ a díky nezápornosti normy je $\rho(M_1, M_2) \geq 0$. [48]

Příklad 6.3. I v případě, že $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, může být vzdálenost M_1 a M_2 nulová. Například v prostoru $\mathbb{R}^1$ indukuje standardní skalární součin normu $\|\vec{x}\| = \|(x_1)\| = |x_1|$. Čtenář si snadno rozmyslí, že pak vzdálenost otevřených intervalů $M_1 = (0, 1)$ a $M_2 = (1, 2)$ je rovna nule.

Popíšeme nyní několik případů, kdy lze vzdálenost počítat jednodušeji než přímo z definice.

Věta 6.4 (Vzdálenost bodu od podprostoru)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T. Nechť $\vec{a} \in \mathcal{H}$, $P \subset\subset \mathcal{H}$ a $\dim P < +\infty$. Pak $\rho(\vec{a}, P) = \|\vec{a}_{P^\perp}\|$.*

Důkaz. Podle definice je $\rho(\vec{a}, P) = \inf\{\|\vec{a} - \vec{x}\| \mid \vec{x} \in P\}$. Ukažme nejprve, že $\rho(\vec{a}, P) \geq \|\vec{a}_{P^\perp}\|$. Konečnou dimenzi potřebujeme, abychom mohli použít větu 5.37 o OG rozkladu. Pro každé $\vec{x} \in P$ platí podle Pythagorovy věty:

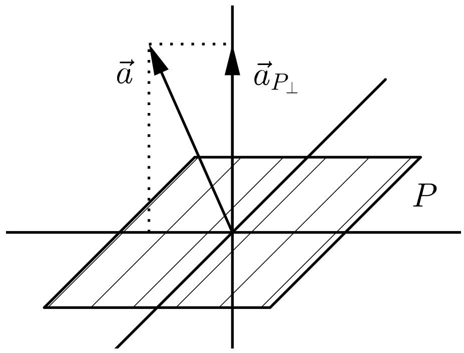
$$\|\vec{a} - \vec{x}\|^2 = \|\vec{a}_{P^\perp} + (\vec{a}_P - \vec{x})\|^2 = \|\vec{a}_{P^\perp}\|^2 + \|\vec{a}_P - \vec{x}\|^2 \geq \|\vec{a}_{P^\perp}\|^2.$$

Proto platí také nerovnost $\|\vec{a} - \vec{x}\| \geq \|\vec{a}_{P^\perp}\|$.

Při volbě $\vec{x} = \vec{a}_P$ dokonce nastává rovnost $\|\vec{a} - \vec{x}\| = \|\vec{a}_{P^\perp}\|$, proto je infimum rovno minimu, a to $\rho(\vec{a}, P) = \|\vec{a}_{P^\perp}\|$. □

Poznámka 6.5. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ (viz obrázek 12) odpovídá vzdálenost bodu od přímky či od roviny naší představě – z bodu se spustí kolmice na přímku či rovinu a její délka se změří.

[48] Vzdálenost množin M_1 a M_2 se značí někdy $d(M_1, M_2)$ podle anglického výrazu distance pro vzdálenost.



Obrázek 12: Vzdálenost bodu od podprostoru v $\mathbb{R}^3$.

Také vzdálenost dvou lineárních variet lze převést na vzdálenost bodu od podprostoru.

Věta 6.6 (Vzdálenost variet)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T. Nechť W_1 a W_2 jsou lineární variety v $\mathcal{H}$ a nechť $\vec{a}_1 \in W_1$ a $\vec{a}_2 \in W_2$. Pak platí:*

$$\rho(W_1, W_2) = \rho(\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)).$$

Důkaz. Jelikož $W_1 = \vec{a}_1 + \mathcal{Z}(W_1)$ a $W_2 = \vec{a}_2 + \mathcal{Z}(W_2)$, máme:

$$\rho(W_1, W_2) = \inf\{\|\vec{a}_1 + \vec{s}_1 - \vec{a}_2 - \vec{s}_2\| \mid \vec{s}_1 \in \mathcal{Z}(W_1), \vec{s}_2 \in \mathcal{Z}(W_2)\}.$$

Zřejmě platí také rovnost:

$$\{\|\vec{a}_1 + \vec{s}_1 - \vec{a}_2 - \vec{s}_2\| \mid \vec{s}_1 \in \mathcal{Z}(W_1), \vec{s}_2 \in \mathcal{Z}(W_2)\} = \{\|\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{s}\| \mid \vec{s} \in \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)\}.$$

Tím je důkaz hotov, neboť podle definice vzdálenosti množin platí:

$$\inf\{\|\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{s}\| \mid \vec{s} \in \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)\} = \rho(\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)). \qquad \square$$

Poznámka 6.7. Speciálním případem věty 6.6 je vzdálenost bodu $\vec{b}$ od lineární variety $W = \vec{a} + \mathcal{Z}(W)$. Platí, že $\rho(\vec{b}, W) = \rho(\vec{b} - \vec{a}, \mathcal{Z}(W))$. Slovy: „Posunutí celé konfigurace o vektor $\vec{a}$, to jest tak, aby se posunutý podprostor vrátil do počátku, vzdálenost nemění.“

Pro zjednodušení výpočtu vzdálenosti bodu od nadroviny potřebujeme zavést pojem normálový [49] vektor. Při té příležitosti také popíšeme nadroviny a posléze všechny lineární variety v prostorech se skalárním součinem pomocí tzv. normálových rovnic.

6.2 Popis nadrovin

Definice 6.8. Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T a nechť W je lineární varieta v $\mathcal{H}$. Pak každý nenulový vektor $\vec{n}_W \in \mathcal{Z}(W)^\perp$ nazveme **normálovým vektorem** variety W.

[49] Stejně jako norma pochází i slovo normálový z latiny. Normalis znamený vyrobený podle tesařského úhelníku nebo svírající pravý úhel.

Věta 6.9 (Nadrovina v $\mathcal{H}$)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T, $\alpha \in T$ a $\vec{n} \in \mathcal{H}, \vec{n} \neq \vec{0}$. Pak $\{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{n} \rangle = \alpha\}$ je nadrovina v $\mathcal{H}$.*

Důkaz. Definujme $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{n} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$. Z linearity skalárního součinu v prvním argumentu vidíme, že $\varphi \in \mathcal{H}^{\#}$. Z nenulovosti $\vec{n}$ plyne, že $\varphi \neq \Theta$. A nenulový funkcionál opravdu definuje nadrovinu, jak víme ze zimního semestru. □

Věta 6.10 (Varieta jako průnik nadrovin v $\mathcal{H}$)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T, kde* $\dim \mathcal{H} < +\infty$, *a nechť W je lineární varieta v $\mathcal{H}$ a* $\operatorname{codim} W = k \in \mathbb{N}$. *Pak existují LN vektory $\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_k$ z $\mathcal{H}$ a čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in T$ tak, že*

$$W = \bigcap_{i=1}^{k} \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{n}_i \rangle = \alpha_i\}.$$

Důkaz. Jelikož jsou splněny předpoklady věty 5.37, platí $\mathcal{Z}(W) \oplus \mathcal{Z}(W)^{\perp} = \mathcal{H}$. Protože dále $\operatorname{codim} W = k$, plyne odtud, že $\dim \mathcal{Z}(W)^{\perp} = k$. Uvažujme libovolnou bázi $\mathcal{Z}(W)^{\perp}$ a označme ji $(\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_k)$. Vezměme dále $\vec{a} \in W$ a pro každé $i \in \hat{k}$ položme $\alpha_i = \langle \vec{a} | \vec{n}_i \rangle$. Ověřme, že $\vec{a} + \mathcal{Z}(W) = \bigcap_{i=1}^{k} \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{n}_i \rangle = \alpha_i\}$.

- Inkluze $\vec{a} + \mathcal{Z}(W) \subset \bigcap_{i=1}^{k} \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{n}_i \rangle = \alpha_i\}$ platí evidentně.
- $\bigcap_{i=1}^{k} \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{n}_i \rangle = \alpha_i\} \subset \vec{a} + \mathcal{Z}(W)$: Nechť $\vec{x} \in \mathcal{H}$ splňuje $\langle \vec{x} | \vec{n}_i \rangle = \alpha_i$ pro každé $i \in \hat{k}$, potom $\vec{x} - \vec{a}$ splňuje $\langle \vec{x} - \vec{a} | \vec{n}_i \rangle = 0$ pro každé $i \in \hat{k}$. Jelikož je vektor $\vec{x} - \vec{a}$ kolmý na všechny bazické vektory $\mathcal{Z}(W)^{\perp}$, je kolmý také na každý vektor ze $\mathcal{Z}(W)^{\perp}$. Z faktu, že $\left(\mathcal{Z}(W)^{\perp}\right)^{\perp} = \mathcal{Z}(W)$ již plyne, že $\vec{x} - \vec{a} \in \mathcal{Z}(W)$, tudíž $\vec{x} \in \vec{a} + \mathcal{Z}(W)$. □

Definice 6.11. Rovnice $\langle \vec{x} | \vec{n}_i \rangle = \alpha_i$ pro každé $i \in \hat{k}$ z věty 6.10 rozepsané po souřadnicích nazýváme **normálovými rovnicemi** variety W v příslušné bázi.

Poznámka 6.12. Normálové rovnice jsou zároveň neparametrickými rovnicemi, které známe ze zimního semestru. (Platí totiž, že při daném vektoru $\vec{n} \neq \vec{0}$ je vztahem $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{n} \rangle$ definován lineární funkcionál.) Později uvidíme, že na prostorech konečné dimenze se skalárním součinem jsou také jakékoliv neparametrické rovnice variety zároveň normálovými rovnicemi. (V kapitole Rieszova věta a sdružený operátor vyslovíme totiž Rieszovu větu, podle které lze každý lineární funkcionál φ psát ve tvaru $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{n} \rangle$ pro nějaké $\vec{n} \neq \vec{0}$.)

Speciálně tedy platí, že normálové rovnice variety v dané bázi nejsou jednoznačně určené.

Příklad 6.13. Nechť je dána přímka $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_{\lambda}$ v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Najděte normálové rovnice W ve standardní bázi.

Řešení: Najdeme doplněk zaměření:

$$\mathcal{Z}(W)^{\perp} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

Normálové rovnice získáme ze skalárních součinů:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Normálové rovnice jsou tudíž např. $y = 2$ a $x + z = 4$.

Nyní se můžeme vrátit k poslední vzdálenosti, kterou se naučíme počítat jednodušším způsobem.

Věta 6.14 (Vzdálenost bodu od nadroviny)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T, kde $\dim \mathcal{H} < +\infty$, a W je nadrovina v $\mathcal{H}$ definovaná rovnicí $\langle \vec{x} \,|\, \vec{n}_W \rangle = \alpha$. Nechť $\vec{b} \in \mathcal{H}$. Pak platí:*

$$\rho(\vec{b}, W) = \frac{|\langle \vec{b} \,|\, \vec{n}_W \rangle - \alpha|}{\|\vec{n}_W\|}.$$

Důkaz. Nechť $\vec{a} \in W$. Pak s využitím poznámky 6.7 a věty 6.4 máme:

$$\rho(\vec{b}, W) = \rho(\vec{b} - \vec{a}, \mathcal{Z}(W)) = \|(\vec{b} - \vec{a})_{\mathcal{Z}(W)^{\perp}}\|.$$

Zdůrazněme, že $\vec{n}_W \neq \vec{0}$, jelikož W je nadrovina. Podle vzorce z poznámky 5.39 pro výpočet OG průmětu do $\mathcal{Z}(W)^{\perp}$ dostáváme při použití ON báze $\left(\frac{1}{\|\vec{n}_W\|}\vec{n}_W\right)$ vztah:

$$(\vec{b} - \vec{a})_{\mathcal{Z}(W)^{\perp}} = \left\langle \vec{b} - \vec{a} \,\middle|\, \frac{1}{\|\vec{n}_W\|}\vec{n}_W \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}_W\|}\vec{n}_W = \frac{\langle \vec{b} \,|\, \vec{n}_W \rangle - \langle \vec{a} \,|\, \vec{n}_W \rangle}{\|\vec{n}_W\|^2}\vec{n}_W = \frac{\langle \vec{b} \,|\, \vec{n}_W \rangle - \alpha}{\|\vec{n}_W\|^2}\vec{n}_W.$$

Norma OG průmětu je tudíž rovna:

$$\frac{|\langle \vec{b} \,|\, \vec{n}_W \rangle - \alpha|}{\|\vec{n}_W\|^2}\|\vec{n}_W\| = \frac{|\langle \vec{b} \,|\, \vec{n}_W \rangle - \alpha|}{\|\vec{n}_W\|}.$$ □

6.3 Úhly

Už známe úhly mezi vektory v $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$. Nyní zavedeme pojem úhlu ještě pro několik speciálních typů množin. [50]

[50] Definice úhlu mezi přímkami, přímkou a nadrovinou a nadrovinami by bylo možné zobecnit i pro $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$. Jelikož ale v takových prostorech nemáme definovaný úhel mezi vektory, nemělo by takové zobecnění dobrý smysl.

Definice 6.15. Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$, kde $\dim \mathcal{H} < +\infty$, a nechť p, q jsou přímky v $\mathcal{H}$ a W, W_1 a W_2 jsou nadroviny v $\mathcal{H}$.

- **Úhlem mezi přímkami** p a q nazveme číslo
$$\arccos \frac{|\langle \vec{s}_p \,|\, \vec{s}_q \rangle|}{\|\vec{s}_p\| \|\vec{s}_q\|},$$
kde $\vec{s}_p$, respektive $\vec{s}_q$ je směrový vektor přímky p, respektive q.

- **Úhlem mezi přímkou** p **a nadrovinou** W nazveme číslo
$$\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\langle \vec{s}_p \,|\, \vec{n}_W \rangle|}{\|\vec{s}_p\| \|\vec{n}_W\|} = \arcsin \frac{|\langle \vec{s}_p \,|\, \vec{n}_W \rangle|}{\|\vec{s}_p\| \|\vec{n}_W\|},$$
kde $\vec{s}_p$ je směrový vektor přímky p a $\vec{n}_W$ je normálový vektor nadroviny W.

- **Úhlem mezi nadrovinami** W_1 a W_2 nazveme číslo
$$\arccos \frac{|\langle \vec{n}_{W_1} \,|\, \vec{n}_{W_2} \rangle|}{\|\vec{n}_{W_1}\| \|\vec{n}_{W_2}\|},$$
kde $\vec{n}_{W_1}$, respektive $\vec{n}_{W_2}$ je normálový vektor nadroviny W_1, respektive W_2.

Poznámka 6.16. Čtenář si rozmyslí, že definice je korektní, tedy že při různých volbách směrových a normálových vektorů vychází stále stejný úhel.

Úkol 6.17. V prostorech dimenze dva, kde nadrovinami jsou přímky, ověřte, že výpočtem podle všech tří definic vyjde stejný úhel.

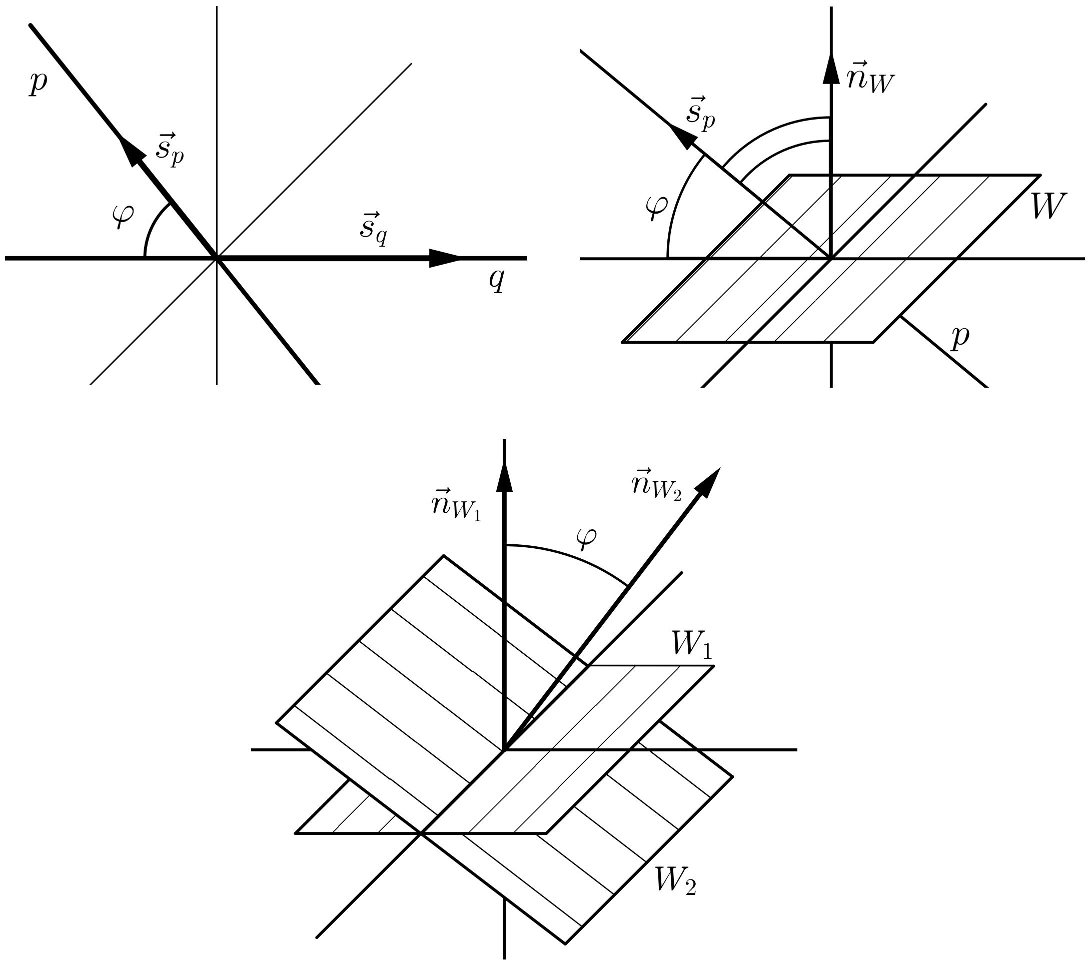
Poznámka 6.18. Výše definované úhly nabývají hodnot mezi nulou a $\frac{\pi}{2}$. To odpovídá v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ faktu, že např. za úhel mezi přímkami považujeme vždy nulový, ostrý nebo pravý úhel. Při různých volbách směrových vektorů přímek dostáváme totiž pro úhel mezi těmito vektory dvě různé hodnoty (pokud nejsou vektory kolmé): φ a $\pi - \varphi$. Úhlem mezi uvažovanými přímkami je potom podle definice menší z těchto čísel. Viz obrázek 13.

6.4 Vektorový součin

Motivace. V geometrii nám vektorový součin [51] umožňuje snadno hledat normály k rovinám (to se hodí např. v počítačové grafice) a poskytuje v kombinaci se skalárním součinem jednoduchý vzorec pro výpočet objemu rovnoběžnostěnu. S oběma součiny se lze setkat v teorii kvaternionů. [52] Právě kvaterniony se staly inspirací pro Maxwellovy

[51] Název vektorový součin je odvozen z faktu, že výstupem je vektor, zatímco u skalárního součinu je výstupem skalár, tedy číslo.

[52] William Rowan Hamilton (1805–1865), irský matematik, fyzik a astronom, zavedl v roce 1843 kvaterniony, což je nekomutativní rozšíření oboru komplexních čísel. Lze je definovat jako uspořádané čtveřice reálných čísel se speciálně definovanými operacemi sčítání a násobení. Jsou-li x a y kvaterniony s první složkou nulovou (zbylé složky označme $\vec{x}$, resp. $\vec{y}$), potom jejich součin má první složku rovnou záporně vzatému skalárnímu součinu $-\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$ a zbylé složky vektorovému součinu $\vec{x} \times \vec{y}$.



Obrázek 13: Úhel mezi přímkami, přímkou a rovinou a rovinami v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$.

rovnice elektřiny a magnetismu. [53] Tyto rovnice zjednodušili do dnešní podoby Gibbs [54] a Heaviside. [55] Jimi zavedená vektorová analýza, která pracuje s diferenciálními operátory divergence (využívající skalárního součinu) a rotace (využívající vektorového součinu), se používá v mnoha oblastech fyziky k vyjádření zákonů zachování hmoty, hybnosti a energie.

Definice 6.19. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle . | . \rangle$. **Vektorovým součinem** $\vec{x} \times \vec{y}$ nazveme vektor $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ splňující:

1. $\vec{z} \perp \vec{x}$, $\vec{z} \perp \vec{y}$,

2. $\|\vec{z}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle^2$,

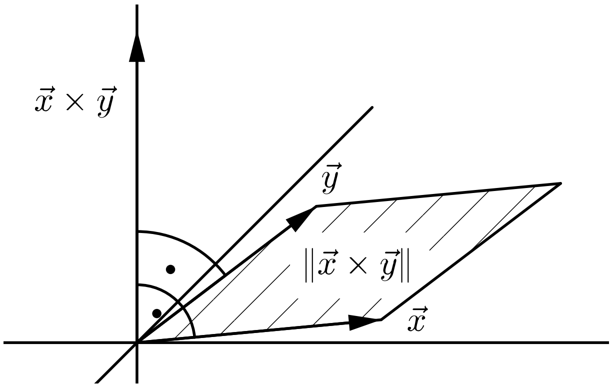
[53] James Clerk Maxwell (1831–1879), britský fyzik
[54] Josiah Willard Gibbs (1839–1903), americký matematik, fyzik a chemik
[55] Oliver Heaviside (1850–1925), britský matematik a fyzik samouk

3. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \geq 0$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

Poznámka 6.20.

- Vektorový součin $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$, právě když $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou LZ vektory. Z druhé podmínky totiž plyne, že nulovou normu má $\vec{x} \times \vec{y}$, právě když nastává rovnost v Cauchyho–Schwarzově nerovnosti.

- Jsou-li $\vec{x}$ a $\vec{y}$ LN vektory, pak je opět vektorový součin $\vec{x} \times \vec{y}$ určen třemi podmínkami z definice jednoznačně. První určuje přímku, na níž leží. Druhá určuje velikost. Třetí určuje směr. Viz obrázek 14.



Obrázek 14: Vektorový součin $\vec{x} \times \vec{y}$ v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$.

Úkol 6.21. ** Soubor $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, který splňuje třetí podmínku z definice vektorového součinu, nazýváme **pravotočivým**. Dokažte, že třetí podmínka opravdu odpovídá naší představě pravotočivosti, tedy faktu, že pokud pravou rukou otáčíme ve směru úhlu od $\vec{x}$ k $\vec{y}$ (uvědomme si, že úhel nabývá hodnot jen od nuly do π), pak palec směřuje do poloprostoru, který obsahuje vektor $\vec{z}$. K pravdivosti tvrzení je ještě třeba předpokládat, že standardní bázi malujeme pravotočivě, což opravdu důsledně děláme.

Důsledek 6.22. *Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem, $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$. Označme φ úhel mezi $\vec{x}$ a $\vec{y}$, pak platí:*

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \sin \varphi.$$

Důkaz. Podle druhého bodu definice vektorového součinu víme, že

$$\begin{aligned} \|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle^2 &&= \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \left(1 - \tfrac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2}\right) \\ &= \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2(1 - \cos^2 \varphi) &&= \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Jelikož $0 \leq \varphi \leq \pi$, je $\sin \varphi \geq 0$. Proto odmocněním výše uvedené rovnosti dostáváme dokazované tvrzení. $\square$

Poznámka 6.23. Číslo $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ tedy v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ odpovídá obsahu rovnoběžníka daného vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$. Viz obrázek 14.

Věta 6.24 (Výpočet vektorového součinu)**.** *Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je pravotočivá ON báze $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ a $(\vec{y})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$. Potom platí:*

$$(\vec{x} \times \vec{y})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Označme $\vec{z}$ vektor splňující:

$$(\vec{z})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

K důkazu, že $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$, je třeba ověřit tři axiomy vektorového součinu.

1. Podle věty 5.32 platí:
$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{z} \rangle = \sum_{i=1}^{3} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \langle \vec{z} \,|\, \vec{x}_i \rangle.$$
Ze znalosti Fourierových koeficientů (souřadnic v ON bázi) dostáváme:
$$\sum_{i=1}^{3} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \langle \vec{z} \,|\, \vec{x}_i \rangle = \alpha_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$
Tento výraz ovšem vznikne rozvojem determinantu určité singulární matice podle posledního sloupce:
$$\alpha_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$
Tím je dokázáno, že $\vec{x} \perp \vec{z}$. Podobně se ukáže, že $\vec{y} \perp \vec{z}$.

2. Opět s využitím věty 5.32 a znalosti Fourierových koeficientů odvodíme:
$$\|\vec{z}\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \langle \vec{z} \,|\, \vec{x}_i \rangle^2 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2,$$

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

$$\|\vec{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \langle \vec{y} \,|\, \vec{x}_i \rangle^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2,$$

$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{3} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \langle \vec{y} \,|\, \vec{x}_i \rangle = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \beta_i.$$

Roznásobením pak dostaneme kýženou rovnost:

$$\|\vec{z}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle^2.$$

3. Označme $\mathbb{X}$ matici, jejíž sloupce jsou popořadě vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$, a $\mathbb{A}$ matici, jejíž sloupce jsou popořadě vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Pak platí:

$$\mathbb{A} = \mathbb{X} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \alpha_2 & \beta_2 & \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ \alpha_3 & \beta_3 & \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Dle předpokladu věty je $\det \mathbb{X} > 0$. Dále rozvojem determinantu dle třetího sloupce získáme:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \alpha_2 & \beta_2 & \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ \alpha_3 & \beta_3 & \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 \geq 0.$$

Odtud podle vztahu pro determinant součinu matic plyne, že $\det \mathbb{A} \geq 0$, což jsme chtěli dokázat. □

Věta 6.25 (Vlastnosti vektorového součinu)**.** *Nechť* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ *se skalárním součinem,* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Pak platí, že vektorový součin je:*

1. **antisymetrický***, tj.* $\vec{y} \times \vec{x} = -(\vec{x} \times \vec{y})$*,*

2. **lineární v obou argumentech***, tj.*

$$(\alpha\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \alpha(\vec{x} \times \vec{z}) + (\vec{y} \times \vec{z}),$$

$$\vec{x} \times (\alpha\vec{y} + \vec{z}) = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + (\vec{x} \times \vec{z}).$$

Důkaz.

1. Plyne z věty 6.24 a ze změny znaménka při záměně sloupců v determinantu.

2. Nechť $\mathcal{X}$ je pravotočivá ON báze $\mathbb{R}^3$ a $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, $(\vec{z})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$.

   S využitím n-linearity determinantů máme:
$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha\alpha_2 + \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha\alpha_3 + \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha\alpha_3 + \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha\alpha_1 + \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha\alpha_1 + \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha\alpha_2 + \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \beta_3 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

   To ale podle věty 6.24 znamená právě identitu $((\alpha\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z})_{\mathcal{X}} = \alpha(\vec{x}\times\vec{z})_{\mathcal{X}} + (\vec{y}\times\vec{z})_{\mathcal{X}}$. Odtud již je zřejmá linearita v prvním argumentu. Podobně se ukáže linearita ve druhém argumentu. □

Příklad 6.26. Je dán rovnoběžnostěn určený vrcholy $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ a $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, tj. množina $\{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1\rangle\}$. Ilustrace je na obrázku 2. Dokažte, že potom pro jeho objem platí:
$$V = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right|.$$

Tato úloha byla zadána již v kapitole o determinantech. Ovšem až nyní se znalostí skalárního a vektorového součinu se stává triviální.

Řešení: Objem rovnoběžnostěnu je dán vzorcem $V = Sv$, kde S je obsah podstavy a v je výška. Obsah podstavy dané vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je podle poznámky 6.23 roven $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$. Výška je rovna normě OG průmětu $\vec{c}$ na normálu (přímku danou normálovým vektorem) roviny podstavy $P = [\vec{a}, \vec{b}]_\lambda$. Jelikož $\frac{1}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}(\vec{a} \times \vec{b})$ je ON báze $P^\perp$, dostaneme OG průmět podle vzorce v poznámce 5.39:
$$\vec{c}_{P^\perp} = \left\langle \vec{c} \,\middle|\, \frac{1}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}(\vec{a} \times \vec{b}) \right\rangle \frac{1}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Proto $v = \|\vec{c}_{P^\perp}\| = \frac{|\langle \vec{c} \,|\, \vec{a}\times\vec{b}\rangle|}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}$. Celkem tedy $V = |\langle \vec{c} \,|\, \vec{a} \times \vec{b}\rangle|$. Podle věty 6.24 platí:
$$|\langle \vec{c} \,|\, \vec{a} \times \vec{b}\rangle| = \left| c_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} + c_2 \det \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} + c_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right|,$$

přičemž v poslední rovnosti jsme využili rozvoj determinantu podle posledního sloupce.

7 Rieszova věta a sdružený operátor

Motivace. Rieszova věta (někdy nazývaná Rieszova věta o reprezentaci) je důležité matematické tvrzení z oboru funkcionální analýzy. Tato věta umožňuje reprezentovat lineární funkcionály na prostoru se skalárním součinem jistým prvkem tohoto prostoru, odhaluje tedy jedno-jednoznačný vztah mezi prostory se skalárním součinem a prostory k nim duálními. Dále dává tato věta dobrý smysl hojně užívané braketové symbolice, protože každému lineárnímu funkcionálu (značenému $\langle\varphi|$ a nazývanému též bra-vektor) odpovídá jediný vektor (značený $|\varphi\rangle$ a nazývaný ket-vektor). [56] Rieszova věta je také nezbytná pro zavedení sdružených operátorů.

V celé kapitole uvažujeme pouze $T = \mathbb{C}$ nebo $T = \mathbb{R}$, pracujeme totiž se skalárním součinem.

7.1 Rieszova věta

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T a nechť $\vec{y} \in \mathcal{H}$. Definujme funkcionál φ předpisem $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$. Pak je φ díky linearitě skalárního součinu v prvním argumentu lineární funkcionál. Na otázku, zda lze naopak každý lineární funkcionál na $\mathcal{H}$ zapsat pomocí skalárního součinu, dává na prostorech konečné dimenze odpověď Rieszova věta. [57]

Věta 7.1 (Rieszova)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T. Je-li $\varphi \in (\mathcal{H}_n)^\#$, pak existuje právě jeden vektor $\vec{y} \in \mathcal{H}_n$ takový, že $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$.*

Důkaz. Dokážeme jednoznačnost a existenci. Důkaz rozdělíme na dva případy – pro nulový a nenulový funkcionál.

- Je-li $\varphi = \Theta$, pak evidentně existuje jediný takový vektor $\vec{y} = \vec{0}$.
- Je-li $\varphi \neq \Theta$, pak $h(\varphi) = 1 = \operatorname{codim} \ker \varphi$. Podle věty 5.37 máme $\dim(\ker \varphi)^\perp = 1$. Nechť $\vec{u}$ je bazický vektor $(\ker \varphi)^\perp$ a $\|\vec{u}\| = 1$. Pokud $\vec{y}$ má splňovat $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$, pak speciálně pro $\vec{x} \in \ker \varphi$ platí $0 = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$. Tudíž $\vec{y} \in (\ker \varphi)^\perp$, tj. $\vec{y} = \alpha \vec{u}$ pro nějaké $\alpha \in T$. Najděme α dosazením $\vec{x} = \vec{u}$:

$$\varphi(\vec{u}) = \langle \vec{u} \,|\, \alpha \vec{u} \rangle = \overline{\alpha} \|\vec{u}\|^2 = \overline{\alpha}.$$

[56] Braketová notace se rozšířila zejména v kvantové mechanice. Symboliku představil v roce 1939 Paul Dirac, proto se jí také říká Diracova. Termín braketová pochází ze slova bracket, což je anglicky závorka. Levé straně reprezentující funkcionály se proto říká bra $\langle . |$ a pravé straně symbolizující vektory ket $| . \rangle$. S tímto značením také souvisí námi zvolený zápis skalárního součinu $\langle . \,|\, . \rangle$.

[57] Frigyes Riesz [výslovnost „rís“] (1880–1956) byl maďarský matematik s významným přínosem v oblasti funkcionální analýzy. Upozorňujeme čtenáře zejména na správnou výslovnost jeho jména. Studentům se stává, že autorství věty připisují Ríšovi místo Rieszovi.

Jediným kandidátem na $\vec{y}$ je proto $\overline{\varphi(\vec{u})}\vec{u}$. Ověřme, že splňuje $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$. Berme libovolné $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$, pak existuje jediný rozklad $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, kde $\vec{a} \in \ker \varphi$ a $\vec{b} \in (\ker \varphi)^\perp$, tedy $\vec{b} = \beta \vec{u}$. Odtud máme:

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\beta\vec{u}) = 0 + \beta\varphi(\vec{u}).$$

Zároveň platí:

$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \left\langle \vec{a} + \beta\vec{u} \,\middle|\, \overline{\varphi(\vec{u})}\vec{u} \right\rangle = \varphi(\vec{u})\langle \vec{a} \,|\, \vec{u} \rangle + \beta\varphi(\vec{u})\langle \vec{u} \,|\, \vec{u} \rangle = 0 + \beta\varphi(\vec{u}). \qquad \square$$

Poznámka 7.2. Již v poznámce 6.11 jsme avizovali, že normálové a neparametrické rovnice lineárních variet jsou stejné na prostorech se skalárním součinem konečné dimenze. Rieszova věta dokazuje, že tomu tak opravdu je. [58]

7.2 Sdružený operátor

Definice 7.3. Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pokud $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a B splňuje pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ vztah:

$$\langle A\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, B\vec{y} \rangle,$$

pak B nazveme **sdruženým operátorem** k A a značíme A^*.

Jak uvidíme v následující větě, sdružený operátor k A je vždy právě jeden, proto má smysl zavést pro něj speciální symbol A^*. [59] Než větu vyslovíme, uveďme ještě pomocné lemma, které opakovaně využijeme v jejím důkazu.

Lemma 7.4. *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T a $\vec{y} \in \mathcal{H}$. Pokud $\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = 0$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$, pak $\vec{y} = \vec{0}$.*

Důkaz. Dosadíme-li $\vec{x} = \vec{y}$, potom máme $\|\vec{y}\|^2 = 0$, tudíž $\vec{y} = \vec{0}$. $\square$

Věta 7.5 (Existence a jednoznačnost sdruženého operátoru)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak existuje právě jeden sdružený operátor k A.*

Důkaz.

- Existence: Definujme pro každé $\vec{y} \in \mathcal{H}_n$ funkcionál

$$\varphi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \langle A\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle \quad \text{pro každé } \vec{x} \in \mathcal{H}_n.$$

[58] Přemýšlivý čtenář možná hloubá, zda neplatí Rieszova věta i na prostorech nekonečné dimenze. Ve funkcionální analýze se dozvíte, že v Hilbertových prostorech nekonečné dimenze opravdu platí.

[59] V kvantové mechanice se často užívá značení $A^\dagger$, zejména při práci s braketovou symbolikou. Objevuje se ale třeba i značení A_{ad}.

Z linearity skalárního součinu v prvním argumentu a linearity A plyne, že $\varphi_{\vec{y}} \in (\mathcal{H}_n)^{\#}$. Podle Rieszovy věty existuje právě jeden vektor $\vec{z}$ splňující $\varphi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \langle \vec{x} \,|\, \vec{z} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$. Položíme-li $A^*\vec{y} = \vec{z}$, pak A^* bude zobrazení a bude splňovat $\langle A\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, A^*\vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$.

Zbývá ověřit linearitu A^*. Nechť $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathcal{H}_n$ a $\alpha \in T$, potom pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ plyne z antilinearity skalárního součinu ve druhém argumentu a z definice A^*:

$$\begin{aligned} \langle A\vec{x} \,|\, \alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle &= \overline{\alpha}\langle A\vec{x} \,|\, \vec{y}_1 \rangle + \langle A\vec{x} \,|\, \vec{y}_2 \rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle \vec{x} \,|\, A^*\vec{y}_1 \rangle + \langle \vec{x} \,|\, A^*\vec{y}_2 \rangle \\ &= \langle \vec{x} \,|\, \alpha A^*\vec{y}_1 + A^*\vec{y}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Zároveň $\langle A\vec{x} \,|\, \alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{x} \,|\, A^*(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2) \rangle$. Odečtením výrazů dostáváme:

$$\langle \vec{x} \,|\, \alpha A^*\vec{y}_1 + A^*\vec{y}_2 - A^*(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2) \rangle = 0.$$

Jelikož vztah platí pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$, plyne z lemmatu 7.4 kýžená rovnost:

$$A^*(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \alpha A^*\vec{y}_1 + A^*\vec{y}_2.$$

- Jednoznačnost: Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ platí, že $\langle A\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, B\vec{y} \rangle$. Uvažujme zároveň zobrazení A^* definované v předchozím bodě. Pak odečtením získáme pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ rovnost:

$$\langle \vec{x} \,|\, B\vec{y} - A^*\vec{y} \rangle = 0.$$

Podle lemmatu 7.4 platí $B\vec{y} = A^*\vec{y}$ pro každé $\vec{y} \in \mathcal{H}_n$, tedy $B = A^*$. □

Věta 7.6 (Vlastnosti sdruženého operátoru)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T. Nechť dále $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a $\alpha \in T$. Pak platí:*

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
2. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.
3. $(AB)^* = B^* A^*$.
4. $(A^*)^* = A$.
5. $I^* = I$.
6. $\Theta^* = \Theta$.
7. *Je-li A regulární, potom A^* je také regulární a splňuje:*

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Důkaz. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$, pak platí:

1. $$\begin{aligned}\langle (A+B)\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle &= \langle A\vec{x} + B\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle = \langle A\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle + \langle B\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x} \,|\, A^*\vec{y}\rangle + \langle \vec{x} \,|\, B^*\vec{y}\rangle \\ &= \langle \vec{x} \,|\, A^*\vec{y} + B^*\vec{y}\rangle = \langle \vec{x} \,|\, (A^* + B^*)\vec{y}\rangle.\end{aligned}$$
   Jelikož sdružený operátor je jediný, je tímto dokázána rovnost $(A+B)^* = A^* + B^*$.
2. $\langle (\alpha A)\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle = \langle \alpha(A\vec{x}) \,|\, \vec{y}\rangle = \alpha\langle A\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle = \alpha\langle \vec{x} \,|\, A^*\vec{y}\rangle = \langle \vec{x} \,|\, \overline{\alpha}(A^*\vec{y})\rangle = \langle \vec{x} \,|\, (\overline{\alpha}A^*)\vec{y}\rangle$.
3. $\langle (AB)\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle = \langle A(B\vec{x}) \,|\, \vec{y}\rangle = \langle B\vec{x} \,|\, A^*\vec{y}\rangle = \langle \vec{x} \,|\, B^*(A^*\vec{y})\rangle = \langle \vec{x} \,|\, (B^*A^*)\vec{y}\rangle$.
4. $\langle A^*\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle = \overline{\langle \vec{y} | A^*\vec{x}\rangle} = \overline{\langle A\vec{y} | \vec{x}\rangle} = \langle \vec{x} \,|\, A\vec{y}\rangle$.
5. $\langle I\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x} \,|\, I\vec{y}\rangle$.
6. $\langle \Theta\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle = 0 = \langle \vec{x} \,|\, \Theta\vec{y}\rangle$.
7. Použitím již dokázaného třetího a pátého bodu máme $A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I$. Odtud již plyne $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, tedy i regularita A^*. □

Nyní objasníme, jak souvisejí matice operátoru A^* a operátoru A, a následně prozkoumáme vztah determinantů a spekter A^* a A.

Věta 7.7 (Matice sdruženého operátoru)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_n$. Pak platí:*

$$^{\mathcal{X}}(A^*) = (^{\mathcal{X}}A)^H.$$

Důkaz. Označme $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$. S využitím ortonormality báze (i-tá souřadnice je rovna i-tému Fourierovu koeficientu) a vlastností skalárního součinu dostáváme pro $i, j \in \hat{n}$:

$$\begin{aligned}[^{\mathcal{X}}(A^*)]_{ij} &= x_i^{\#}(A^*\vec{x}_j) &&= \langle A^*\vec{x}_j \,|\, \vec{x}_i\rangle &&= \langle \vec{x}_j \,|\, A\vec{x}_i\rangle \\ &= \overline{\langle A\vec{x}_i \,|\, \vec{x}_j\rangle} &&= \overline{x_j^{\#}(A\vec{x}_i)} &&= \overline{[^{\mathcal{X}}A]_{ji}} &&= [(^{\mathcal{X}}A)^H]_{ij}.\end{aligned}$$
□

Důsledek 7.8 (Determinant sdruženého operátoru)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Potom* $\det A^* = \overline{\det A}$.

Důkaz. Uvažujme ON bázi $\mathcal{X}$ prostoru $\mathcal{H}_n$. Podle definice determinantu operátoru platí rovnost $\det A = \det(^{\mathcal{X}}A)$. Dále máme s použitím věty 7.7 a faktu, že determinant se transponováním matice nemění, následující vztah:

$$\det A^* = \det(^{\mathcal{X}}(A^*)) = \det\left((^{\mathcal{X}}A)^H\right) = \overline{\det\left((^{\mathcal{X}}A)^T\right)} = \overline{\det(^{\mathcal{X}}A)}.$$
□

Příklad 7.9. Nechť $\mathbb{C}^3$ je unitární prostor a $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ splňuje pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}x_1 - 2x_2 \\ -\mathrm{i}x_2 + x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte předpis pro $A^*\vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$.

Řešení: Jelikož ${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dostáváme podle věty 7.7, že ${}^{\mathcal{E}}(A^*) = ({}^{\mathcal{E}}A)^H = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ -2 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proto pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ platí, že $A^*\vec{x} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}x_1 \\ -2x_1 + \mathrm{i}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Věta 7.10 (Spektrum sdruženého operátoru)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Potom $\lambda \in \sigma(A)$, právě když $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_n$. Označme $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{X}}A$, potom podle věty 7.7 platí $\mathbb{A}^H = {}^{\mathcal{X}}(A^*)$. Jelikož se transponováním nemění determinant matice, je jistě pro každé $t \in \mathbb{C}$ pravda:

$$\det(\mathbb{A} - t\mathbb{I}) = \det(\mathbb{A}^T - t\mathbb{I}) = \overline{\det(\mathbb{A}^H - \overline{t}\,\mathbb{I})}.$$

Odtud pro charakteristické polynomy operátorů A a A^* plyne, že $p_A(t) = \overline{p_{A^*}(\overline{t})}$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Pokud je $T = \mathbb{C}$, dostáváme, že $\lambda \in p_A^{-1}(0) = \sigma(A)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in p_{A^*}^{-1}(0) = \sigma(A^*)$. Pokud je $T = \mathbb{R}$, pak zřejmě platí, že $\lambda \in p_A^{-1}(0) \cap \mathbb{R} = \sigma(A)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in p_{A^*}^{-1}(0) \cap \mathbb{R} = \sigma(A^*)$. $\square$

Poznámka 7.11. Speciálně nad tělesem $\mathbb{R}$ lze komplexní sdružování vynechat, tj. platí, že $\sigma(A) = \sigma(A^*)$.

7.3 Normální operátory a normální matice

Motivace. Podtřídy normálních operátorů – hermitovské a unitární operátory – hrají zásadní roli v matematické formulaci kvantové mechaniky. Fyzikálním stavům odpovídají vektory v komplexním Hilbertově prostoru. Pozorovatelné – veličiny, které jsou měřitelné fyzikálním experimentem – jsou reprezentovány hermitovskými operátory. Jako výsledky měření získáváme vlastní čísla pozorovatelných. Ta jsou díky hermitovskosti reálná. Časový vývoj systému zase popisují evoluční operátory, což jsou unitární operátory. Díky unitaritě zachovávají velikost vektorů.

S normálními operátory a normálními maticemi se ale setkáte i jinde. My už jsme viděli souvislost mezi hermitovskými maticemi a hermitovskými formami. Bližším studiem hermitovských matic se nám teď navíc podaří odvodit spektrální kritérium, na jehož základě lze rozhodnout o charakteru kvadratické formy.

Věty v této kapitole budou vysloveny pro prostory $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. V poznámkách, které pro zvýraznění nazveme „reálné poznámky“, uvedeme, jak by příslušná tvrzení vypadala nad tělesem $\mathbb{R}$. Proto ještě než výklad začneme, máme pro čtenáře úkol.

Úkol 7.12. * Dokažte všechna tvrzení z „reálných poznámek“.

Další zvláštností této kapitoly je fakt, že se nejprve budeme zabývat normálními operátory, až poté normálními maticemi, zatímco v ostatních kapitolách jsme vždy pojmy nejprve definovali a zkoumali pro matice, a až poté pro operátory. Důvod je ten, že Rieszova věta dává přirozeně vzniknout sdruženému operátoru, zatímco konstrukce sdružených operátorů pomocí hermitovsky sdružených matic by souvislost s Rieszovou větou neodhalila.

Definice 7.13. Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a nechť je dán operátor $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$.

(a) Pokud $AA^* = A^*A$, pak A nazveme **normálním**.

(b) Pokud $A = A^*$, pak A nazveme **hermitovským**.

(c) Pokud $AA^* = I$, pak A nazveme **unitárním**.

Z definice je zřejmé, že každý hermitovský operátor je normální a také každý unitární operátor je normální.

Reálná poznámka 7.14. Nad tělesem $\mathbb{R}$ říkáme, že A je **symetrický** místo hermitovský a také **ortogonální** místo unitární.

Definice 7.15. Nechť je dána matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$.

(a) Pokud $\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{A}^H\mathbb{A}$, pak $\mathbb{A}$ nazveme **normální**.

(b) Pokud $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$, pak $\mathbb{A}$ nazveme **hermitovskou**.

(c) Pokud $\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{A}$ nazveme **unitární**.

Reálná poznámka 7.16. Stejnou terminologii jako u operátorů nad tělesem $\mathbb{R}$ zavádíme i pro reálné matice. Je-li matice $\mathbb{A}$ reálná a $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, pak ji nazveme **symetrickou**. Je-li $\mathbb{A}$ reálná a $\mathbb{A}\mathbb{A}^T = \mathbb{I}$, nazveme ji **ortogonální** maticí.

Věta 7.17 (Normální operátory a normální matice)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_n$.*

1. *A je normální operátor, právě když ${}^{\mathcal{X}}A$ je normální matice.*
2. *A je hermitovský operátor, právě když ${}^{\mathcal{X}}A$ je hermitovská matice.*
3. *A je unitární operátor, právě když ${}^{\mathcal{X}}A$ je unitární matice.*

Důkaz. Dokážeme pouze první tvrzení. Důkazy pro hermitovskost a unitaritu jsou analogické. A je normální operátor $\Leftrightarrow AA^* = A^*A \Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}(AA^*) = {}^{\mathcal{X}}(A^*A) \Leftrightarrow ({}^{\mathcal{X}}A)\left({}^{\mathcal{X}}(A^*)\right) = \left({}^{\mathcal{X}}(A^*)\right)({}^{\mathcal{X}}A) \Leftrightarrow ({}^{\mathcal{X}}A)\left(({}^{\mathcal{X}}A)^H\right) = \left(({}^{\mathcal{X}}A)^H\right)\left({}^{\mathcal{X}}A\right) \Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}A$ je normální matice. V předposlední ekvivalenci jsme využili větu 7.7. $\square$

Reálná poznámka 7.18. Abychom dostali analogickou větu nad tělesem $\mathbb{R}$, stačí ve větě 7.17 nahradit hermitovskost symetrií a unitaritu ortogonalitou.

Příklad 7.19. Uveďme příklady normálních operátorů na unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$. Standardní bázi značíme jako vždy $\mathcal{E}$.

(a) Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$,

$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \quad ^{\mathcal{E}}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operátory A, B jsou normální podle věty 7.17. Nejsou ovšem ani unitární, ani hermitovské.

(b) Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$,

$$^{\mathcal{E}}A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \quad ^{\mathcal{E}}B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ pro } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Operátory A, B jsou unitární podle věty 7.17. (Bystrý čtenář si rozmyslí, že pro kontrolu unitarity matice stačí hlídat, aby sloupce tvořily ON soubor při standardním skalárním součinu.)

(c) Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$,

$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & 2\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \quad ^{\mathcal{E}}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operátory A, B jsou hermitovské podle věty 7.17.

Reálná poznámka 7.20. Pokud v příkladu 7.19 předpokládáme, že $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ a $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^2$, pak v prvním bodě je B příkladem normálního operátoru, který není symetrický, ani ortogonální, ve druhém bodě je B příkladem ortogonálního a ve třetím bodě symetrického operátoru.

Uvedeme důležité vlastnosti normálních operátorů. K jejich důkazu potřebujeme následující lemma.

Lemma 7.21. *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je hermitovský operátor. Jestliže $\langle A\vec{x} \,|\, \vec{x}\rangle = 0$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$, pak $A = \Theta$.*

Důkaz. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ platí:

$$0 = \langle A(\vec{x}+\vec{y}) \,|\, (\vec{x}+\vec{y})\rangle = \langle A\vec{x} \,|\, \vec{x}\rangle + \langle A\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle + \langle A\vec{y} \,|\, \vec{x}\rangle + \langle A\vec{y} \,|\, \vec{y}\rangle = \langle A\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle + \langle \vec{y} \,|\, A\vec{x}\rangle,$$

přičemž v poslední rovnosti jsme mimo jiné využili hermitovskosti. Vidíme tudíž, že $0 = 2\mathrm{Re}\langle A\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle$. Dosadíme-li $\vec{y} = A\vec{x}$, dostáváme:

$$0 = 2\mathrm{Re}\langle A\vec{x} \,|\, A\vec{x}\rangle = 2\|A\vec{x}\|^2,$$

proto $A\vec{x} = \vec{0}$. □

Reálná poznámka 7.22. Stejné lemma můžeme využít v důkazech, pokud bude $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{R}$ a A symetrický operátor.

Věta 7.23 (Charakterizace normálních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak A je normální, právě když $\|A\vec{x}\| = \|A^*\vec{x}\|$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$.*

Důkaz.

- ($\Rightarrow$): Je-li A normální, pak máme:
$$\langle A\vec{x} \,|\, A\vec{x}\rangle = \langle \vec{x} \,|\, A^*A\vec{x}\rangle = \langle \vec{x} \,|\, AA^*\vec{x}\rangle = \langle A^*\vec{x} \,|\, A^*\vec{x}\rangle.$$
- ($\Leftarrow$): Ukažme nejprve s využitím věty 7.6, že $AA^* - A^*A$ je hermitovský operátor.
$$(AA^* - A^*A)^* = (A^*)^*A^* - A^*(A^*)^* = AA^* - A^*A.$$
Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí:
$$\langle (AA^* - A^*A)\vec{x} \,|\, \vec{x}\rangle = \langle AA^*\vec{x} \,|\, \vec{x}\rangle - \langle A^*A\vec{x} \,|\, \vec{x}\rangle = \langle A^*\vec{x} \,|\, A^*\vec{x}\rangle - \langle A\vec{x} \,|\, A\vec{x}\rangle = 0.$$
Podle lemmatu 7.21 je $AA^* - A^*A = \Theta$, tudíž A je normální. □

Reálná poznámka 7.24. Pro prostory $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{R}$ platí zcela obdobná charakterizace normálních operátorů.

Normální operátory mají zajímavé spektrální vlastnosti. Popíšeme je v následujících třech větách.

Věta 7.25 (Vlastní vektory normálních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je normální. Pak platí:*

1. *$\lambda \in \sigma(A)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ, právě když $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A^* příslušný $\overline{\lambda}$.*
2. *Vlastní vektory příslušné vzájemně různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.*

Důkaz.

1. Snadno nahlédneme, že $A - tI$ je normální operátor pro každé $t \in \mathbb{C}$. Podle věty 7.23 dostaneme:
$$\|(A - tI)\vec{x}\| = \|(A^* - \bar{t}I)\vec{x}\|,$$
čímž je ekvivalence dokázaná.

2. Nechť $\lambda, \nu \in \sigma(A)$, $\lambda \neq \nu$. Nechť $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ a $\vec{y}$ je vlastní vektor A příslušný ν. Pak platí:

$$\lambda\langle\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle = \langle\lambda\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle = \langle A\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle = \langle\vec{x}\,|\,A^*\vec{y}\rangle = \langle\vec{x}\,|\,\overline{\nu}\vec{y}\rangle = \nu\langle\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle.$$

Odtud plyne, že $(\lambda - \nu)\langle\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle = 0$. Jelikož $\lambda \neq \nu$, je dokázáno, že $\langle\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle = 0$. □

Reálná poznámka 7.26. Normální operátory mají stejné vlastnosti nad tělesem $\mathbb{R}$. Navíc lze pak v prvním bodě vynechat komplexní sdružování.

Věta 7.27 (Diagonalizovatelnost normálních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Je-li A normální, pak A je diagonalizovatelný.*

Důkaz. Jelikož těleso je rovno $\mathbb{C}$, platí automaticky, že $\sigma(A) = p_A^{-1}(0)$. Zbývá tedy ověřit, že $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$. Uvažujme libovolné $\lambda \in \sigma(A)$. Víme, že vlastní podprostor A příslušný λ splňuje, že $A(P_\lambda) \subset P_\lambda$. Ukažme, že také $A(P_\lambda^\perp) \subset P_\lambda^\perp$. K tomu stačí ověřit, že pro každé $\vec{x} \in P_\lambda^\perp$ a pro každé $\vec{z} \in P_\lambda$ platí, že $\langle A\vec{x}\,|\,\vec{z}\rangle = 0$. S využitím věty 7.25 máme:

$$\langle A\vec{x}\,|\,\vec{z}\rangle = \langle\vec{x}\,|\,A^*\vec{z}\rangle = \langle\vec{x}\,|\,\overline{\lambda}\vec{z}\rangle = \lambda\langle\vec{x}\,|\,\vec{z}\rangle = 0.$$

Označme $k = \nu_g(\lambda)$, $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ bázi P_λ a $\widehat{\mathcal{X}} = (\vec{x}_{k+1}, \ldots, \vec{x}_n)$ bázi $P_\lambda^\perp$. Potom $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze $\mathcal{H}_n$, v níž má A blokově diagonální tvar:

$${}^{\mathcal{X}}\!A = \begin{pmatrix} \lambda\mathbb{I}_k & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & {}^{\widehat{\mathcal{X}}}\!B \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{I}_k$ je jednotková matice řádu k a B je zúžení operátoru A na $P_\lambda^\perp$, neboli $B \in \mathcal{L}(P_\lambda^\perp)$ je definovaný jako $B\vec{x} = A\vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in P_\lambda^\perp$. Vidíme pak, že $p_A(t) = (\lambda - t)^k p_B(t)$. Ukažme, že $p_B(\lambda) \neq 0$. Potom bude jasné, že $\nu_a(\lambda)$ se také rovná k.

Kdyby $p_B(\lambda) = 0$, pak $\lambda \in \sigma(B)$, tj. existoval by nenulový vektor $\vec{x} \in P_\lambda^\perp$ takový, že $\lambda\vec{x} = B\vec{x} = A\vec{x}$. Zároveň by tudíž platilo, že $\vec{x} \in P_\lambda$. Protože $P_\lambda \cap P_\lambda^\perp = \{\vec{0}\}$, měli bychom spor s nenulovostí $\vec{x}$. □

Poznámka 7.28. Opačná implikace ve větě 7.27 neplatí. Například na unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$ pro operátor $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, kde ${}^{\mathcal{E}}\!A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, platí, že je diagonalizovatelný, ale není normální.

Reálná poznámka 7.29. Nad tělesem $\mathbb{R}$ lze obdobným způsobem dokázat pro normální operátor A, že $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$. Ovšem diagonalizovatelný být normální operátor nad $\mathbb{R}$ nemusí. Např. operátor B z příkladu 7.19 část (a) není diagonalizovatelný, protože $\sigma(B) = p_B^{-1}(0) \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

Následující spektrální vlastnost normální operátory dokonce charakterizuje.

Věta 7.30 (Normální operátory a ON báze z vlastních vektorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak A je normální, právě když v $\mathcal{H}_n$ existuje ON báze z vlastních vektorů.*

Důkaz.

- ($\Rightarrow$): Z věty 7.27 plyne, že pro normální operátor existuje báze prostoru $\mathcal{H}_n$ z vlastních vektorů. Z ní vyrobíme OG bázi z vlastních vektorů tak, že bazické vektory příslušející stejnému vlastnímu číslu, a náležející tudíž stejnému vlastnímu podprostoru, ortogonalizujeme Gramovým–Schmidtovým ortogonalizačním procesem. Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé podle věty 7.25. Na závěr každý vektor vynásobíme převrácenou hodnotou jeho normy, čímž získáme hledanou ON bázi z vlastních vektorů.

- ($\Leftarrow$): Nechť $\mathcal{X}$ je báze z vlastních vektorů. Pak ${}^{\mathcal{X}}A = \mathbb{D}$, kde $\mathbb{D}$ je diagonální matice. Jak se čtenář bez obtíží přesvědčí, platí $\mathbb{D}\mathbb{D}^H = \mathbb{D}^H\mathbb{D}$. Je-li $\mathcal{X}$ navíc ON, potom podle věty 7.17 je A normální operátor. □

Reálná poznámka 7.31. Pro platnost věty 7.30 nad tělesem $\mathbb{R}$ je potřeba pozměnit tvrzení do podoby: „A je normální a $p_A^{-1}(0) \subset \mathbb{R}$, právě když v $\mathcal{H}_n$ existuje ON báze z vlastních vektorů.“

Na závěr kapitoly se podíváme ještě blíže na podtřídy normálních operátorů. Unitární a hermitovské operátory mají totiž některé specifické vlastnosti.

Věta 7.32 (Charakterizace unitárních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.*

1. *A je unitární.*

2. *$A^{-1} = A^*$.*

3. *Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ platí:*
$$\langle A\vec{x} \,|\, A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle.$$
Slovy: „Unitární operátor zachovává skalární součin.“

4. *Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí:*
$$\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|.$$
Slovy: „Unitární operátor zachovává normu.“

Důkaz. Stačí dokázat cyklus implikací.

- 1. $\Rightarrow$ 2.: Plyne přímo z definice unitárního operátoru, jelikož A je operátor na prostoru konečné dimenze.
- 2. $\Rightarrow$ 3.: Pokud $A^{-1} = A^*$, pak $\langle A\vec{x} \,|\, A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, A^* A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$.
- 3. $\Rightarrow$ 4.: Rovnost získáme dosazením $\vec{y} = \vec{x}$ ve třetím bodě.
- 4. $\Rightarrow$ 1.: Uvědomme si, že $A^*A - I$ je hermitovský operátor. Jelikož pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí, že $\langle (A^*A - I)\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle = \langle A^*A\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle - \langle \vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle = \langle A\vec{x} \,|\, A\vec{x} \rangle - \langle \vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle = 0$, máme podle lemmatu 7.21 rovnost $A^*A - I = \Theta$. Protože jsme na prostoru konečné dimenze, platí automaticky také $AA^* = I$. $\square$

Reálná poznámka 7.33. Charakterizace zůstává v platnosti i nad tělesem $\mathbb{R}$. Stačí nahradit slovo unitární za ortogonální.

Věta 7.34 (Vlastnosti unitárních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A, B jsou unitární. Pak platí:*

1. *Pro každé $\lambda \in \sigma(A)$ je $|\lambda| = 1$.*
2. *$|\det A| = 1$.*
3. *AB je unitární.*

Důkaz.

1. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ. Pak podle čtvrtého bodu věty 7.32 platí:
$$\|\vec{x}\| = \|A\vec{x}\| = \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|.$$
Jelikož $\vec{x} \neq \vec{0}$, máme $|\lambda| = 1$.

2. Z důsledku 7.8 plyne, že $\det A^* = \overline{\det A}$. Podle věty 7.32 zase platí rovnost $A^* = A^{-1}$. Máme tudíž:
$$\frac{1}{\det A} = \det A^{-1} = \det A^* = \overline{\det A}.$$
Celkově tedy dostáváme, že $|\det A|^2 = 1$, tj. $|\det A| = 1$. (Jiná možnost důkazu je uvědomit si, že $p_A^{-1}(0) = \sigma(A)$, proto je determinant operátoru součinem vlastních čísel.)

3. Zkontrolujme unitaritu užitím věty 7.6:
$$(AB)(AB)^* = (AB)(B^*A^*) = A(BB^*)A^* = AA^* = I. \qquad \square$$

Reálná poznámka 7.35. Vlastnosti z věty 7.34 mají i ortogonální operátory. Pro ně dokonce vlastní čísla a determinant mohou nabývat pouze hodnot ± 1.

Věta 7.36 (Vlastnosti hermitovských operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je hermitovský. Pak platí:*

1. *Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ je $\langle A\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}$.*
2. *$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*
3. *$\det A \in \mathbb{R}$.*
4. *$A(\mathcal{H}_n) \oplus \ker A = \mathcal{H}_n$.*

Důkaz.

1. Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí:
$$\langle A\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, A^*\vec{x} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, A\vec{x} \rangle = \overline{\langle A\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle}.$$
Tudíž $\langle A\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}$.
2. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ. Pak máme:
$$\langle A\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle = \langle \lambda\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle = \lambda \|\vec{x}\|^2.$$
Podle předchozího bodu je $\lambda \|\vec{x}\|^2 \in \mathbb{R}$ a díky nenulovosti $\vec{x}$ musí platit, že $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Z definice hermitovského operátoru a z důsledku 7.8 plyne, že $\det A = \det A^* = \overline{\det A}$. Proto $\det A$ musí být reálný. (Jiná možnost důkazu je uvědomit si, že $p_A^{-1}(0) = \sigma(A)$, proto je determinant operátoru součinem vlastních čísel.)
4. Ukažme, že $A(\mathcal{H}_n) \subset (\ker A)^\perp$. Pro libovolné $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ a $\vec{y} \in \ker A$ plyne z hermitovskosti A, že $\langle A\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, \vec{0} \rangle = 0$.
Jelikož $\operatorname{codim} \ker A = h(A)$, dostáváme, že $A(\mathcal{H}_n) = (\ker A)^\perp$. Tvrzení potom plyne z věty 5.37. □

Reálná poznámka 7.37. Nad tělesem $\mathbb{R}$ je jediným zajímavým tvrzením věty 7.36 čtvrtý bod, který zůstává v platnosti. Lze ale navíc ukázat, že pro symetrické operátory jsou kořeny charakteristického polynomu reálné. Kombinací s reálnou poznámkou 7.29 potom dostáváme, že každý symetrický operátor je diagonalizovatelný.

Úkol 7.38. ** Dokažte tvrzení této kapitoly přeformulovaná pro matice. Vyjmenujme, jaká tvrzení máte dokázat.

- Normální matice:

  1. Matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je normální, právě když $\|\mathbb{A}\vec{x}\| = \|\mathbb{A}^H\vec{x}\|$, kde $\|.\|$ značí normu v unitárním prostoru $\mathbb{C}^n$.
  2. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je normální matice. Potom $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor $\mathbb{A}$ příslušný λ, právě když $\overline{\lambda} \in \sigma(\mathbb{A}^H)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor $\mathbb{A}$ příslušný $\overline{\lambda}$.
  3. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je normální matice. Potom vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé (v unitárním prostoru $\mathbb{C}^n$).
  4. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je normální matice. Potom $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná.
  5. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak $\mathbb{A}$ je normální matice, právě když existuje ON báze unitárního prostoru $\mathbb{C}^n$ sestavená z vlastních vektorů $\mathbb{A}$.

     Tvrzení lze zformulovat ekvivalentně v následujícím tvaru (pro důkaz je dobré znát ekvivalentní charakterizace unitárních matic, tj. speciálně fakt, že unitární matice $\mathbb{U}$ splňuje $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^H$).

     Věta 7.39. *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak $\mathbb{A}$ je normální matice, právě když existují diagonální matice $\mathbb{D}$ a unitární matice $\mathbb{U}$ takové, že $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^H$.*

- Unitární matice:

  1. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, uvažujme unitární prostor $\mathbb{C}^n$. Potom $\mathbb{A}$ je unitární $\Leftrightarrow$ $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^H$ $\Leftrightarrow$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ platí, že $\langle \mathbb{A}\vec{x} \,|\, \mathbb{A}\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$ $\Leftrightarrow$ pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ platí, že $\|\mathbb{A}\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$.
  2. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je unitární matice. Pak pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ je $|\lambda| = 1$. (Pro ortogonální matice nemusí platit rovnost $\lambda = \pm 1$, mohou mít i nereálná vlastní čísla, např. matice $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.)
  3. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je unitární matice. Potom $|\det \mathbb{A}| = 1$. (Pro OG matici platí rovnost $\det \mathbb{A} = \pm 1$.)

- Hermitovské matice:

  1. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je hermitovská matice. Potom pro každé $\vec{x}$ z unitárního prostoru $\mathbb{C}^n$ platí, že $\langle \mathbb{A}\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}$.
  2. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je hermitovská matice. Potom $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R}$.
  3. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je hermitovská matice. Pak $\det \mathbb{A} \in \mathbb{R}$. (Pro symetrické matice jde o nezajímavé tvrzení, protože všechny reálné matice mají reálný determinant.)
  4. Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice řádu n. Potom existuje ON báze eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ sestavená z vlastních vektorů $\mathbb{A}$.

S hermitovskými maticemi úzce souvisí kvadratické formy. Při praktickém počítání s kvadratickými formami se většinou pracuje právě s jejich maticemi. Převedeme proto pojmy odpovídající charakteru kvadratických forem do maticové řeči.

Definice 7.40. Nechť $\mathbb{A}$ je hermitovská matice z $\mathbb{C}^{n,n}$. Dále nechť Q je kvadratická forma na $\mathbb{C}^n$ definovaná vztahem ${}^{\mathcal{E}}Q = \mathbb{A}$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ má **charakter** (zkráceně $\mathbb{A}$ je):

1. **pozitivně definitní** (PD), pokud Q je PD,
2. **pozitivně semidefinitní** (PSD), pokud Q je PSD,
3. **negativně definitní** (ND), pokud Q je ND,
4. **negativně semidefinitní** (NSD), pokud Q je NSD,
5. **indefinitní**, pokud Q je indefinitní.

Poznámka 7.41. Uvědomme si, že zápis ${}^{\mathcal{E}}Q = \mathbb{A}$ znamená pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, že $Q(\vec{x}) = (\vec{x})^T \mathbb{A}\overline{(\vec{x})} = \langle \mathbb{A}\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle$, přičemž skalární součin je standardní.

Úkol 7.42. Pro symetrické matice lze ověřování jejich charakteru zjednodušit. Stačí totiž uvažovat příslušnou kvadratickou formu jen na $\mathbb{R}^n$. Platí tedy, že $\mathbb{A}$ je PD, právě když $(\vec{x})^T \mathbb{A}\vec{x} > 0$ pro každý nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Analogicky pro PSD, ND, NSD a indefinitnost. Dokažte.

Úkol 7.43. Přeformulujte Sylvesterovo kritérium pro matice a dokažte.

Úkol 7.44. Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathbb{G}$ je Gramova matice vektorů $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ z $\mathcal{H}$, tj. čtvercová matice řádu n definovaná pro každé $i, j \in \hat{n}$ jako $\mathbb{G}_{ij} = \langle \vec{x}_i \,|\, \vec{x}_j \rangle$. Dokažte následující tvrzení:

(a) Jsou-li vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ LZ, potom $\mathbb{G}$ je PSD.

(b) Jsou-li vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ LN, potom $\mathbb{G}$ je PD.

7.4 Spektrální kritérium pro kvadratické formy

V kapitole Sylvesterovo kritérium jsme slíbili, že představíme ještě jedno kritérium, které umožní rozhodnout o charakteru kvadratické formy. Dokonce na rozdíl od Sylvesterova kritéria umí rozlišit i mezi pozitivní a negativní semidefinitností a indefinitností forem. Nyní již máme v ruce potřebný aparát k tomu, abychom takové kritérium mohli vyslovit a dokázat. Využijeme totiž znalostí o normálních maticích a jejich podtřídách.

Lemma 7.45. *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Pak ${}^{\mathcal{X}}Q$ má pouze reálná vlastní čísla. Označme je $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. (Hodnoty mohou opakovat – každé vlastní číslo je ve výčtu tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost.) Potom existuje polární báze $\mathcal{A}$ prostoru V_n taková, že platí:*

$$
{}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.
$$

Důkaz. Matice ${}^{\mathcal{X}}Q$ je podle věty 4.23 hermitovská pro $T = \mathbb{C}$ (resp. symetrická pro $T = \mathbb{R}$). Podle úkolu 7.38 má reálná vlastní čísla a existuje ON báze $\mathcal{U}$ unitárního prostoru $\mathbb{C}^n$ (resp. eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$) složená z vlastních vektorů ${}^{\mathcal{X}}Q$ (příslušných popořadě vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$).

Označíme-li $\mathbb{U}$ matici, jejíž sloupce jsou vektory z báze $\mathcal{U}$, pak je $\mathbb{U}$ unitární matice (resp. ortogonální), tedy $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^H$. Proto platí:

$$
{}^{\mathcal{X}}Q = \mathbb{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbb{U}^H.
$$

Samozřejmě také máme:

$$
\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbb{U}^H\, {}^{\mathcal{X}}Q\mathbb{U}. \tag{7}
$$

Podle čtvrtého bodu věty 4.23 platí pro libovolnou bázi $\mathcal{A}$:

$$
{}^{\mathcal{A}}Q = ({}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{X}})^T\, {}^{\mathcal{X}}Q\overline{({}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{X}})}.
$$

Definujeme-li nyní bázi $\mathcal{A}$ rovností $\overline{({}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{X}})} = \mathbb{U}$, potom ze vztahu (7) plyne, že jsme nalezli bázi s vlastností:

$$
{}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.
$$

□

Věta 7.46 (Spektrální kritérium)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Potom signatura (p, q, r) formy Q splňuje:*

- *$p =$ počet kladných vlastních čísel ${}^{\mathcal{X}}Q$ (včetně algebraických násobností),*
- *$q =$ počet záporných vlastních čísel ${}^{\mathcal{X}}Q$ (včetně algebraických násobností),*

- *r = algebraická násobnost nuly jakožto vlastního čísla ${}^{\mathcal{X}}Q$.*

Důkaz. Tvrzení je důsledkem lemmatu 7.45 a faktu, že signatura nezávisí na volbě polární báze. □

Spektrální kritérium můžeme vyslovit také v následujícím tvaru.

Důsledek 7.47. *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Pak platí:*

1. *Q je PD, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ má pouze kladná vlastní čísla.*
2. *Q je PSD, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ má vlastní číslo nula a nemá záporná vlastní čísla.*
3. *Q je ND, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ má pouze záporná vlastní čísla.*
4. *Q je NSD, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ má vlastní číslo nula a nemá kladná vlastní čísla.*
5. *Q je indefinitní, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ má alespoň jedno kladné a alespoň jedno záporné vlastní číslo.*

Příklad 7.48. Vyšetřete charakter kvadratické formy Q na $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi tvar:

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

Řešení: Stačí určit vlastní čísla ${}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Charakteristický polynom je roven:

$$p(t) = -(t-1)\left(t-\sqrt{3}\right)\left(t+\sqrt{3}\right),$$

proto $\sigma({}^{\mathcal{E}}Q) = \{-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}\}$. Tudíž podle spektrálního kritéria je Q indefinitní.

Úkol 7.49. Přeformulujte spektrální kritérium pro matice a dokažte.

8 Dodatek 2: Historie řešení soustav rovnic

Vyřešit soustavu lineárních algebraických rovnic (LAR) znamená najít všechny n-tice čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z příslušného tělesa, které vyhovují rovnicím:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m,
\end{array}
$$

kde a_{ij} a b_i pro $i \in \widehat{m}$ a $j \in \hat{n}$ jsou předem daná čísla. Dovednost řešit soustavu LAR je studentům technických vysokých škol vštěpována od začátku studia: bez zbytečného otálení je jim naservírován maticový zápis soustavy a prozrazen algoritmus Gaussovy eliminační metody. Ovšem ani Gaussova eliminace, ani pojem matice nejsou známy odjakživa. Pojďme tedy poodhalit, jak křivolaká byla cesta vývoje metod řešení soustav a částečně i lineární algebry obecně. Informace v tomto textu čerpáme zejména z prací [6, 2]. Jak už jsme zmiňovali v dodatku skript Lineární algebra 1 týkajícím se historie vektorových prostorů a jak nyní popíšeme podrobně, sylabus lineární algebry představuje pojmy vektorový prostor, matice a determinant v opačném pořadí, než jak přicházely na svět.

Nesmělé počátky

Již před čtyřmi tisíci lety věděli Babyloňané, jak řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Ovšem jako řešení připouštěli jen přirozená čísla, případně jednoduché kladné zlomky. Na přelomu letopočtu dali čínští matematici ve slavných *Devíti traktátech o matematickém umění* návod k řešení soustavy tří rovnic pro tři neznámé, a to v oboru přirozených čísel a jednoduchých zlomků, navíc s nesmělým pokusem připustit v mezivýpočtech i záporná čísla (kladná zapisovali černou a záporná červenou tuší). V jejich postupu můžeme vystopovat podobnost s maticovými metodami (sestavují tabulky koeficientů) nepříliš odlišnými od dnešní Gaussovy eliminace. Jde vlastně o sloupcovou variantu eliminační metody. Řekové už pracovali s kladnými racionálními čísly a indická nula, kterou objevil a počty s ní rozvinul Brahmagupta [60] v 7. století, umožnila vstup záporných celých čísel a operací s nimi na pole matematiky, a tedy i do soustav LAR. Zmiňme ještě arabskou matematiku, která stála u zrodu termínu **algebra**. Slovo „al-džabr“ použil v 9. století učenec al-Chórezmí [61] ve svém pojednání o řešení rovnic. Termín označoval sečtení dvou rovnic s cílem zbavit se neznámé.

[60] Brahmagupta (598–668), indický matematik a astronom

[61] Abú Abd Alláh Muhammad Ibn Músá al-Chórezmí Abú Dža'far, také psaný al-Chwárizmí (780–850) byl perský matematik a astronom. Jméno al-Chórezmí bylo ve středověku latinizované na al-Gorizmí, později na Algoritmí a stalo se základem slova algoritmus. Samotný princip algoritmizace byl však známý již dříve.

Řešení jakýchkoliv úloh navíc znesnadňoval fakt, že ve starověku neexistovala téměř žádná matematická symbolika. Obvyklé byly jen více či méně šikovné zápisy čísel. Příklady měly podobu slovních úloh, jejichž košaté zadání dnešní matematik pochopí až po opakovaném čtení. Jeden z mála pokusů o symbolický zápis podnikli Indové – neznámým dávali jména barev. Rozvoj matematické symboliky nastává v 16. století. Francouzský matematik Viète [62] pracuje se symboly jako s čísly, zavádí pojem **koeficient** a jako první vyjadřuje tvar řešení malých soustav LAR v závislosti na koeficientech.

Determinanty a matice

Čilým tvůrcem matematické symboliky byl také Leibniz. [63] Ten zahájil podrobné studium soustav LAR. Soustavu tří rovnic pro tři neznámé značil následujícím trochu matoucím způsobem:

$$\begin{array}{ccccccccc} 10 & + & 11x & + & 12y & + & 13z & = & 0 \\ 20 & + & 21x & + & 22y & + & 23z & = & 0 \\ 30 & + & 31x & + & 32y & + & 33z & = & 0, \end{array}$$

tj. koeficient a_{ij} značil ij, pravou stranu zapisoval na stejnou stranu jako neznámé a její i-tou složku značil $i0$. V roce 1693 zavádí pro účel řešení soustav determinant, který ale ještě tímto termínem neoznačuje. Zmiňuje se o něm v dopisu markýzi L'Hospitalovi. [64] Jeho výsledky týkající se soustav LAR však nezaznamenaly ve své době žádný ohlas.

V díle *Introduction à l'analyse des courbes algébriques* (Úvod do analýzy algebraických křivek) z roku 1750 Cramer [65] publikuje (bez důkazu) pravidlo pro řešení n LAR pro n neznámých. Autorství připsal Cramerovi zejména Euler, [66] který zmiňuje Cramerovo prvenství ve svém slavném díle *Vollständige Anleitung zur Algebra* (překládáno jako Základy algebry). Otázkou a sporem historiků zůstává, zda by se pravidlo nemělo jmenovat Maclaurinovo, jelikož při studiu pozůstalosti skotského matematika Maclaurina [67] se v jeho zápiscích z roku 1729 našla popsaná analogická metoda. Cramerovo pravidlo spočívá ve výpočtu jistých determinantů, přesto ale Cramer pojem determinant nedefinuje. Jeho pravidlo získalo velkou oblibu, a dokonce se v 18. století stalo součástí přijímacích zkoušek na nejprestižnější francouzskou technickou vysokou školu Ecole Polytechnique. Koncem 18. století se determinanty objevují v řadě oblastí: algebraické křivky, mechanika, pohyb planet, lineární diferenciální rovnice, integrální počet. Bézout [68] říká determinantům

[62] François Viète [výslovnost „viet“] (1540–1603), francouzský matematik a advokát

[63] Gottfried Wilhelm Leibniz [výslovnost „lajbnyc“] (1646–1716), německý filozof, matematik a teolog

[64] Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital, též psaný L'Hospital [výslovnost „d lopital“] (1661–1704), francouzský matematik

[65] Gabriel Cramer (1704–1752), švýcarský matematik

[66] Leonhard Euler [výslovnost „ojler“] (1707–1783), švýcarský matematik a fyzik

[67] Colin Maclaurin (1698–1746), skotský matematik

[68] Etienne Bézout [výslovnost „bézú“] (1730–1783), francouzský matematik

rezultanty a konstruuje je rekurentním způsobem. Pro zajímavost popišme jeho konstrukci determinantu matice soustavy řádu tři, podobně bychom získali determinanty řádů vyšších.

Nechť a_1, b_1, c_1 jsou koeficienty neznámých v první rovnici, a_2, b_2, c_2 v druhé rovnici a a_3, b_3, c_3 ve třetí rovnici.

- K a přidejte z obou stran b:

$$ab - ba.$$

- K vzniklému výrazu přidejte c při pravidelném střídání znaménka:

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba.$$

- Nakonec připojte indexy:

$$a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3.$$

Laplace [69] si všímá změny znaménka determinantu při záměně sloupců a odvozuje vzorec pro rozvoj determinantu podle sloupce. Teorie determinantů (bez přímé vazby na řešení soustav LAR) byla shrnuta Vandermondem [70] v *Mémoire sur l'élimination* (Pojednání o eliminaci) roku 1772. Slovo **determinant** použil poprvé Gauss [71] v roce 1801. Náleží mu autorství vzorce pro determinant součinu matic a pro determinant matice adjungované řádu dva a tři. Systematickým studiem determinantů se jako první zabýval Cauchy. [72] Citujme vyjádření matematika Smitha [73] o Cauchym: „Before him there were determinants, with him begins their theory in its generality.“ Cauchy zapisuje prvky determinantu do tabulky (ještě jí neříká matice). Dokazuje obecně větu o determinantu součinu matic a o determinantu matice adjungované. Dále jako první poskytuje důkaz Cramerova pravidla.

Euler si všímá, že soustava n LAR pro n neznámých nemusí mít řešení, přičemž existencí řešení se v té době rozuměla existence jediného řešení. Uvědomuje si, že některé rovnice mohou být „závislé“ na jiných, a že je tedy potřeba klást na rovnice jisté další podmínky, aby byla existence řešení soustavy zaručena. Pojem závislosti Euler však formuluje jen vágně. Nezájem 18. století zabývat se soustavami obsahujícími jiný počet neznámých než rovnic pramení z obliby Cramerova pravidla a determinantů obecně. Koncem 19. století pronikají determinanty i do středních škol v Dánsku, Rusku a německých zemích. U nás prosazují výuku teorie determinantů Studnička [74] a Strnad: [75] „I nejslabšímu žáku zamlouvá

[69] Pierre-Simon de Laplace [výslovnost „d laplas“] (1749–1827), francouzský matematik, fyzik, astronom a politik

[70] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796), francouzský matematik, chemik a hudebník

[71] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), německý matematik a fyzik

[72] Augustin Louis Cauchy [výslovnost „kóši“] (1789–1857), francouzský matematik

[73] Henry John Stephen Smith (1826–1883), irský matematik

[74] František Josef Studnička (1836–1903), český matematik, učitel a spisovatel

[75] Alois Strnad (1852–1911), český středoškolský profesor, matematik a geometr

se např. vzorec pro obsah trojúhelníka určeného souřadnicemi vrcholů snadněji a lépe ve formě determinantu než v kterékoli jiné.“

Na začátku 19. století se soustavy LAR dostávají do popředí zájmu v souvislosti s Gaussovým a Legendreovým [76] objevem metody nejmenších čtverců. Gauss se proslavil, když na základě malého množství dat spočítal orbitu ztracené planetky Ceres. Ač Gauss nebyl první, kdo s eliminační metodou přišel (popsal ji například již Newton [77] kolem roku 1670), byla pojmenována právě na jeho počest. Při eliminaci Gauss ještě nepoužívá maticový zápis, i když v jedné ze svých prací o kvadratických formách reprezentuje lineární operátory čtvercovými tabulkami čísel (dokonce definuje i jejich součin – skládání operátorů).

Pro dnešního matematika je již nepochopitelné, že trvalo sto let, než byly výsledky pro determinanty přeformulovány do maticové řeči. Caley [78] si ve svém díle *A Memoir on the Theory of Matrices* z roku 1858 jako první všímá, že je přirozené definovat nejprve matici a teprve pak determinant. Zabývá se většinou pouze maticemi řádu dva a tři. Definuje čtvercové i obdélníkové matice, operace s nimi (sčítání, násobení číslem a násobení matic). Zavádí inverzní, transponovanou a adjungovanou matici. Uvádí vzorec pro výpočet inverzní matice pomocí adjungované. K určení matice adjungované dokonce využívá parciálních derivací:

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\nabla} \begin{pmatrix} \frac{\partial \nabla}{\partial a_1} & \frac{\partial \nabla}{\partial a_2} & \frac{\partial \nabla}{\partial a_3} \\ \frac{\partial \nabla}{\partial b_1} & \frac{\partial \nabla}{\partial b_2} & \frac{\partial \nabla}{\partial b_3} \\ \frac{\partial \nabla}{\partial c_1} & \frac{\partial \nabla}{\partial c_2} & \frac{\partial \nabla}{\partial c_3} \end{pmatrix},$$

kde ∇ značí determinant $\mathbb{A}$. Skutečně: algebraický doplněk prvku a_1, tj. $b_2c_3 - b_3c_2$, získáme parciální derivací determinantu $\nabla = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$ podle a_1. Hamiltonovu–Caleyho větu, [79] která říká, že každá čtvercová matice je kořenem svého charakteristického polynomu, dokazuje Cayley jen pro matice řádu dva a tři. Říká: „I have not thought it necessary to undertake the labour of a formal proof of the theorem in the general case of a matrix of any degree.“ Vidíme, že potřeba matematiků vše formálně dokazovat tu nebyla odjakživa, nýbrž že se rodila se krok za krokem. (První precizní důkazy v lineární algebře patří zejména Cauchymu.) Významným tvůrcem symboliky a terminologie byl Sylvester. [80] V roce 1850 zavádí termín **matice** a dvojí indexování prvků matic. Caley a Sylvester byli blízcí přátelé, ač se velmi lišili. Například se říká, že zatímco Caley velmi dobře znal výsledky všech matematiků tehdejší doby, Sylvester

[76] Adrien-Marie Legendre [výslovnost „lžándr“] (1752–1833), francouzský matematik

[77] Isaac Newton (1643–1727), anglický fyzik, matematik, astronom a teolog

[78] Arthur Cayley (1821–1895), anglický matematik a právník

[79] William Rowan Hamilton (1805–1865), irský matematik, fyzik a astronom

[80] James Joseph Sylvester (1814–1897), anglický matematik

nikoliv, a proto se mu stávalo, že cizí, ale i své vlastní výsledky dokazoval znovu a znovu. Na rozdíl od klidného Cayleyho byl Sylvester proslulý výbušností i vtipem. Rád skládal básně a s hrdostí je recitoval. Za svůj podpis připojoval informaci, že je autorem sbírky Zákony verše.

Frobeniova věta

Kvalitativní vlastnosti soustav LAR (existence a počet řešení) jsou zkoumány ve druhé polovině 19. století v souvislosti s hledáním kanonického tvaru bilineárních a kvadratických forem. Jak víme ze zimního semestru, kompletní popis množiny řešení soustav LAR přináší Frobeniova věta. [81] Podívejme se ovšem do historie, zda je její název vhodně zvolený.

Věta 8.1 (Frobeniova? Dodgsonova? Kroneckerova? Capelliova?)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ *a* $\vec{b} \in T^m$*. Pak pro soustavu LAR*

$$\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \tag{8}$$

platí:

1. *Soustava* (8) *má řešení právě tehdy, když* $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$*, tj. právě tehdy, když hodnost matice soustavy je stejná jako hodnost rozšířené matice soustavy.*

2. *Označme* S_0 *množinu řešení homogenní soustavy s maticí* $\mathbb{A}$*, tj.*

$$S_0 = \{\vec{x} \in T^n \mid \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}.$$

   Pak LK řešení homogenní soustavy je opět řešením homogenní soustavy, tj. LK vektorů z S_0 *je opět vektor z* S_0*. Navíc počet LN řešení je roven* $n - h(\mathbb{A})$*.*

3. *Nechť* $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$*. Pak množina všech řešení soustavy* (8)*, tj.*

$$S = \{\vec{x} \in T^n \mid \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}\},$$

   má tvar $S = \vec{a} + S_0$*, kde* $\mathbb{A} \cdot \vec{a} = \vec{b}$*.*

Dimenze i podprostor jsou pojmy, které Frobenius neznal, proto jsme je ve větě nahradili ekvivalentním opisem. Ve formulaci podmínky řešitelnosti soustavy (první bod věty) hraje klíčovou roli pojem hodnost. Ten však byl zformulován až v 70. letech 19. století, a navíc ne pro matice. Ekvivalentní podmínku lze vyjádřit pomocí nulovosti a nenulovosti subdeterminantů.

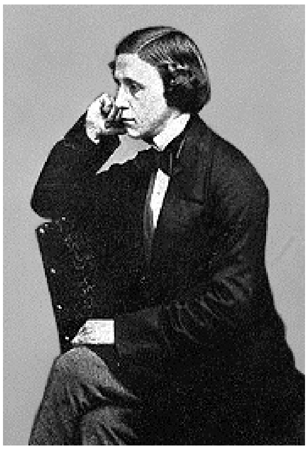
Dodgson vydává v roce 1867 pojednání *An Elementary Treatise on Determinants*. Podmínku řešitelnosti soustavy formuluje pomocí subdeterminantů, viz věta 2.50 o souvislosti

[81] Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917), německý matematik

hodnosti matice a subdeterminantů. Dále dává návody pro řešení soustav různých rozměrů, a ty pak ilustruje na příkladech. Proto je asi nejsprávnější označit za autora podmínky řešitelnosti (první bod Frobeniovy věty) Dodgsona.

Pozornost si zaslouží i jeho nematematická tvorba. Pojďme se proto s jeho osobností blíže seznámit. Čerpáme převážně z článku [3].

Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898, Anglie)



Obrázek 15: Charles Lutwidge Dodgson

Charles Lutwidge Dodgson [výslovnost „dódsn"] se narodil v malé vesnici v jižní Anglii v rodině kněze anglikánské církve. Jeho otec však studoval kromě teologie a klasických jazyků také matematiku. Po něm Charles zdědil matematický talent. Kromě něj měl ovšem chlapec i umělecké sklony: pro svých deset sourozenců vymýšlel loutkové hry, maloval kulisy, kouzlil. Nakonec šel v otcových šlépějích studovat matematiku na kolej Christ Church v Oxfordu, kde se v roce 1855 stal profesorem. Navzdory uměleckým vlohám byl Charles plachý, zadrhával se v řeči, přednášel prý monotónně a nevýrazně a byl velký pedant. O pečlivosti svědčí jeho deník a také fakt, že si od svých 29 let až do smrti vedl podrobnou evidenci dopisů se složitým systémem odkazů. Korespodence má 98 721 položek.

Dodgson zůstal svobodný, ač měl velmi rád děti. Chodil s nimi na procházky, do divadel, v jejich společnosti se zbavoval ostychu a koktání. Sám říkal: „Děti tvoří tři čtvrtiny mého života." Pokoušel se prorazit s kresbami, ale bez úspěchu. Naopak slávu sklidil se svým fotoaparátem. Fotil řadu známých osobností a samozřejmě děti. V roce 1854 byly čtyři jeho snímky přijaty na výstavu Londýnské fotografické společnosti. Je považován za jednoho z nejlepších fotografů své doby. [82]

V roce 1862 vyráží na piknik se třemi dcerami svého kolegy Lidella, děkana Christ Church. Nejbystřejší z nich je Alice (Alenka). Právě tehdy začíná vyprávět a psát příběh

[82] U nás se objevila jedna z jeho fotek, na níž figuruje Alice Lidell, na výstavě Kontroverze – právní a etická historie fotografie v Rudolfinu v roce 2011. Jak už to bývá u lidí, kteří nezaloží rodinu, i Dodgsonův případ budí zvědavost. Fotka Alenky prý vyvolává pocit, že jeho vztah k dětem nebyl zcela nevinný.

plný fantazie a absurdity o Alence v říši divů. Hotový rukopis sám ilustruje a dává číst přátelům. Ti jej přesvědčí, aby knihu publikoval. Vychází v roce 1865 s ilustracemi Johna Tenniela nakreslenými podle Dodgsonových předloh.

Pseudonym Lewis Carroll použil poprvé v roce 1856 (podepsal jím báseň Samota). Vznikl překladem jména Charles Lutwidge do latiny jako Carolus Ludovicus, obrácením pořadí a překladem zpět do angličtiny. Veřejně se Dodgson ke své literární tvorbě nehlásí.

Královně Viktorii se prý Alenčina dobrodružství tak líbila, že Carrollovi slíbila proplacení jakékoliv další publikace. A když se podíváme na rok vydání Pojednání o determinantech, je to právě toto dílo, jež Dodgson vzápětí napsal.

V roce 1871 vychází pokračování Alenky: Za zrcadlem a co tam Alenka našla. Dodgson také dětem hravou formou vysvětluje základy logiky v knížce Logika hrou z roku 1887. Vydává ještě další knihy, ale popularity Alenky už nedosahují.

Frobenius je nejčastěji citován jako autor pojmu **hodnost matice** z roku 1879. Ve skutečnosti pracuje s maticemi až od roku 1896. I on ještě formuluje hodnost pomocí subdeterminantů.

Definice 8.2 (Hodnost systému)**.** Nechť $\mathbb{A}$ je systém hodnot $a_{\alpha\beta}$, kde $\alpha \in \widehat{m}$ a $\beta \in \hat{n}$, uspořádáných do řádků a sloupců. Pokud všechny subdeterminanty řádu $\ell + 1$ jsou nulové a alespoň jeden subdeterminant řádu ℓ je nenulový, pak hodnost systému je ℓ.

Sylvester nezávisle na Frobeniovi definuje **nulitu** v roce 1882, a to pouze pro čtvercové matice.

Definice 8.3 (Nulita matice)**.** Nulitou matice řádu n je číslo nula, pokud má nenulový determinant, číslo jedna, pokud pouze její determinant je nula, číslo dva, pokud i všechny subdeterminanty řádu $n - 1$ jsou nuly atd.

V řeči nulit pak Sylvester dokazuje nerovnosti pro hodnost $h(\mathbb{AB}) \leq \min\{h(\mathbb{A}), h(\mathbb{B})\}$. Konečně pak v roce 1875 v *Über das Pfaffsche Problem* (O Pfaffově problému) definuje Frobenius lineární nezávislost rovnic a řešení a ukazuje, že lineární kombinace řešení homogenní soustavy je opět řešením a že existuje $n - m$ LN řešení pro homogenní soustavu m LN rovnic pro n neznámých, kde $m < n$. (Tehdy je tudíž precizně vysloven druhý bod Frobeniovy věty o řešení homogenní soustavy.) Konečně v roce 1905 Frobenius publikuje v *Zur Theorie der linearen Gleichungen* (O teorii lineárních rovnic) dnešní formulaci Frobeniovy věty, včetně definice hodnosti matice jako počtu LN sloupců.

Pokud hledáme matematiky, kteří vyslovili podmínku řešitelnosti s použitím pojmu hodnost, ačkoliv nepoužili dnešní definici hodnosti, nýbrž definici pomocí subdeterminantů, pak jich ještě několik před rokem 1905 najdeme. V roce 1892 uvádí Capelli [83] moderní formulaci podmínky řešitelnosti soustavy LAR. Hodnost sice zavádí stále ještě pomocí subdeterminantů, ale ukazuje, že ekvivalentní řádkové úpravy matice hodnost nemění, a všímá si důležitosti LZ řádků. V roce 1903 v publikaci Kroneckerových [84] přednášek z 80. let na berlínské univerzitě je taktéž moderní formulace podmínky řešitelnosti soustav LAR. Rovněž v roce 1903 Giudice [85] uvádí, že součtem partikulárního řešení a řešení homogenní soustavy dostáváme řešení soustavy s pravou stranou. (Jemu je tudíž možno připsat autorství třetího bodu Frobeniovy věty.)

Závěrem lze říci, že pokud nás zajímá Frobeniova věta s elegantním pojmem hodnost matice definovaným „naším“ způsobem, pak je na místě nazývat ji opravdu Frobeniova. Pokud ovšem pátráme po celkovém prvenství v nalezení podmínek řešitelnosti a popisu množiny řešení soustavy LAR, pak je třeba vedle Frobenia zmínit také jména Dodgson, Capelli, Kronecker a Giudice.

[83] Alfredo Capelli (1855–1910), italský matematik

[84] Leopold Kronecker (1823–1891), německý matematik a logik

[85] Francesco Giudice [výslovnost „džudyče“] (1855–1936), italský matematik

Rejstřík

Reference

[1] Bečvář J., *Lineární algebra*, Matfyzpress, Praha, 2005

[2] Bečvář J., *Z historie lineární algebry*, Dějiny matematiky, svazek 35, Matfyzpress, Praha, 2007

[3] Bečvář J., *Matematik Charles Lutwidge Dodgson, spisovatel a fotograf Lewis Carroll a Císařova staronová Alenka*, Učitel matematiky, ročník 5, číslo 1(21) (1996–97), 58–64

[4] Bican L., *Lineární algebra a geometrie*, Academia, Praha, 2009

[5] Dĕmidov S. S., *On the history of the theory of linear differential equations*, Archive for History of Exact Sciences 28 (1983), 369–387

[6] Dorier J.-L., *Contribution a l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique*, thèse, 1990

[7] Fiedler M., *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*, SNTL, Praha, 1981

[8] Humhal E., *Algebra 1*, http://tjn.fjfi.cvut.cz/∼humhal/ 2013

[9] Motl L., Zahradník M., *Pěstujeme lineární algebru*, Karolinum, Praha, 2003

[10] Pytlíček J., *Lineární algebra a geometrie*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2005

[11] Ulrychová E., *Zrod vektorového počtu a vektorových prostorů*, sborník 29. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 22. 8. – 26. 8. 2008, Matfyzpress, editoři J. a M. Bečvářovi (2008), 179–184

[12] Ulrychová E., *Lineární algebra na školách netechnického směru*, disertační práce, Matematický ústav UK, Praha, 2013

[13] Výborný K., Zahradník M., *Používáme lineární algebru*, Karolinum, Praha, 2002