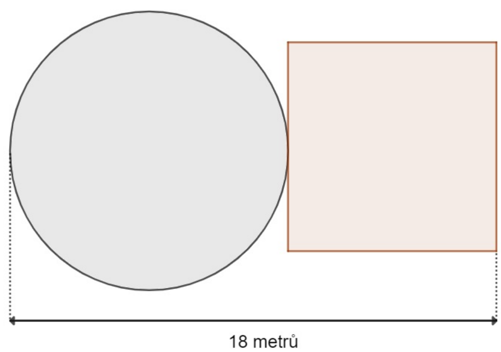
Optimalizační úlohy

Slovní úlohy na extrémy funkce jedné proměnné

1) Zahradní architekt navrhl záhon ve tvaru kruhu a čtverce na délce 18 metrů v bezprostřední blízkosti vedle sebe tak, že strana čtverce je tečnou dané kružnice (a jejich středy leží na téže kolmici ke straně čtverce). Jak má volit stranu čtverce a poloměr kružnice, aby takto navržený záhon měl minimální plošný obsah?



2*) Z 1 m^3 betonu máme odlít co nejvyšší těleso buď ve tvaru koule postavené na krychli. Určete jejich rozměry.

3) Určete rozměry obdélníku o obvodu 40 metrů tak, aby byla délka jeho úhlopříčky minimální.

4) Navrhněte rozměry otevřeného bazénu se čtvercovým dnem o objemu 32 m^3 tak, abychom na jeho vyzdění spotřebovali minimum materiálu.

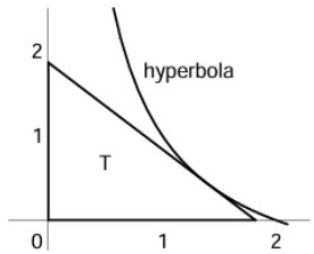
5*) Do elipsy $4x^2 + 9y^2 = 36$ vepište obdélník maximálního obsahu. Určete jeho rozměry.

6*) Rozsáhlý les je z jihu ohraničen přímou cestou vedoucí od západu k východu. Z výchozího místa na této cestě se máme dostat na místo, které je od nás vzdáleno 5 km východně a 2 km severně. Jistou dobu půjdeme po cestě rychlostí 5 km za hodinu, pak (šikmo) lesem rychlostí 3 km za hodinu. Jak dlouho máme jít po cestě, abychom se do cíle dostali co nejdříve? Kolik při tom ujdeme kilometrů a jak dlouho nám cesta bude trvat?

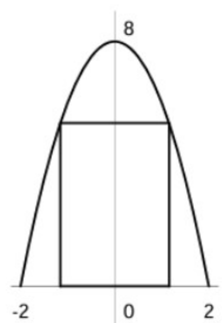
7) Na parabole $y = x^2 - 6x + 5$ najděte nejbližší bod od bodu $A = [3, 4]$.

8) Je některý bod paraboly, která leží v souřadnicové rovině xy trojrozměrného prostoru $\mathbb{R}^3$ a je popsána rovnicemi $y = x^2$, $z = 0$, nejblíže bodu $A = [1, 2, 2]$? Pokud ano, jak velká je příslušná vzdálenost?

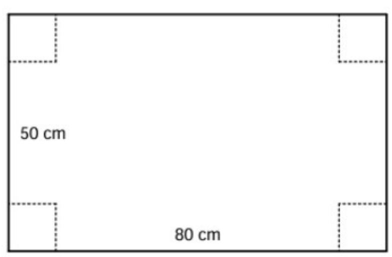
9) Mezi všemi pravoúhlými trojúhelníky T, které jsou ohraničeny osami souřadnicovými a tečnou oblouku hyperboly $y = \frac{2}{x} - 1$, $1 \leq x \leq 2$, najděte trojúhelníky s maximálním a minimálním obsahem a příslušné obsahy vypočtěte.



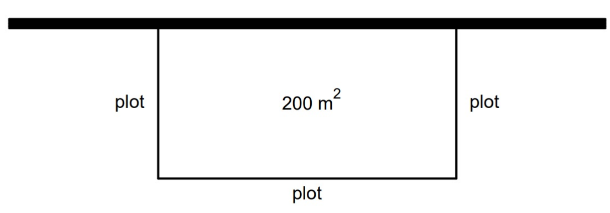
10) Mezi obdélníky, jejichž dva vrcholy leží na ose x a další dva na parabole $y = 8 - x^2$, najděte obdélník s maximálním obsahem. Určete tento obsah.



11) Z obdélníkového plechu o velikosti 80 cm x 50 cm se má po odstřižení stejně velkých čtverců v rozích plechu vyrobit krabice bez víka. Jak velké čtverce je třeba odstřihnout, aby vzniklá krabice měla maximální objem, a jak velký bude tento objem?



12) Chceme navrhnout obdélníkovou parcelu o rozloze 200 m^2, jejíž jedna strana bude ohraničena již hotovou zdí, zatímco ze zbývajících tří stran bude nutné parcelu oplotit. Jaké rozměry by měla obdélníková parcela mít, aby měl plot měl minimální délku?



Výsledky:

1) Obsah záhonu bude minimální v případě, když kruhový záhon bude mít poloměr $\frac{36}{4+\pi}$ metrů.

2) Hrana krychle je $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}+\sqrt{6}}} \doteq 0.748$ metrů a průměr koule $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{\pi(\sqrt{\pi}+\sqrt{6})}} \doteq 1.034$ metrů.

3) Délka úhlopříčky bude minimální pro čtverec o straně 10 metrů.

4) Bazén by měl mít hloubku 2 metry a čtvercové dno o straně 4 metry.

5) Obdélník maximálního obsahu má rozměry $a = 3\sqrt{2}$ a $b = 2\sqrt{2}$.

6) Po cestě půjdeme 3,5 km (a 42 minut), lesem 2,5 km (a 50 minut); celkem tedy ujdeme 6 km.

7) Na parabole leží právě dva body, které mají minimální vzdálenost od bodu $A = [3, 4]$. Jejich první souřadnice jsou $\frac{1}{2}(6-\sqrt{30}) = 0.261387$ a $\frac{1}{2}(6+\sqrt{30}) = 5.738613$, jejich druhé souřadnice se rovnají $\frac{7}{2}$. Hledaná vzdálenost je $d = \frac{1}{2}\sqrt{31}$.

8) Nejbližší bod je $[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 0]$ a jeho vzdálenost je přibližně $2,03$.

9) Obsah je klesající funkcí proměnné $x \in [1, 2]$, takže řešením jsou tečny v bodech 2 (minimum rovné 1) a 1 (maximum rovné $\frac{9}{4}$).

10) Maximální obsah $\frac{64}{3\sqrt{3}}$.

11) 10 cm

12) 20 metrů strana přiléhající ke zdi, 10 metrů strana k ní kolmá.