Úvod do komplexní analýzy

lavicka@karlin.mff.cuni.cz

literatura: J. Veselý, KA, 2000
J. Kopáček, Př. matematika pro fyziky IV, kap. 2

Základy KA (19. stol) Cauchy, Riemann, Weierstrass

Komplexní čísla

- 16. stol (Cardano) kořeny kubic. rovnic

  $z^2+1=0$, $z=\pm i$, $i^2=-1$

- obecný tvar: $z = x+iy$, $x, y\in\mathbb{R}$
- 18./19. stol. (Gauss, Hamilton, ...)

  $z = x+iy = (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\boxed{\mathbb{R}^2}$ reálný vektorový prostor dim 2

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Def: Prostor $\mathbb{C}$ je prostor $\mathbb{R}^2$, v němž navíc definujeme: (i) násobení: $(x,y)(u,v) := (xu-yv,\ xv+yu)$

(ii) ztotožňujeme $(x,0)\cong x$, tzn. $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

(iii) značení: $i = (0,1)$.

Vlastnosti $\mathbb{C}$:

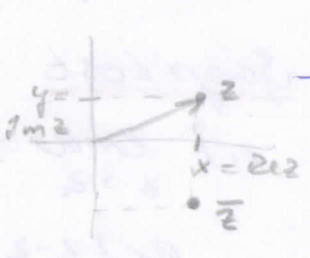
① $(x,y) = x+iy$, $(\pm i)^2 = 1$

Značení: $\bar{z} = x-iy$ kompl. sdružené

$\operatorname{Re} z = x$ reál. část

$\operatorname{Im} z = y$ imag. část

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ modul, abs. hodnota



② $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, $\forall z \neq 0$: $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$

$z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$

③ $\mathbb{C}$ je komutativní těleso

④ $\mathbb{C}$ je komplex. vekt. prostor dim 1.

Lineární zobrazení

① Obecné $\mathbb{R}$-lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ má tvar

$$(*) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$ kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

② Obecné $\mathbb{C}$-lineární zobrazení $L: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má tvar $Lz = wz$, $z \in \mathbb{C}$, kde $w \in \mathbb{C}$

Protože $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, máme $z = x + iy$
$w = a + ib$

$$Lz = (a+ib) \cdot (x+iy) = (ax - by) + i(ay + bx) = \begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Pozorování: $\mathbb{R}$-lineární zobrazení $(*)$ je $\mathbb{C}$-lineární, právě když $d = a$, $c = -b$

Úmluva: funkce = komplex. fce 1 komplex. proměnné.

Nechť f je funkce z $\underset{\mathbb{R}^2}{\mathbb{C}}$ do $\underset{\mathbb{R}^2}{\mathbb{C}}$

Spojitost

(i) $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$, právě když $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$

(ii) f je spojitá v z_0, je-li $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

diferencovatelnost

① R-diferenc.

Def: Fce f je v $z_0 \in \mathbb{R}^2$ je R-difer., pokud ex. R-lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - Lh}{|h|} = 0.$$

Píšeme $df(z_0) := L$ (totální diferenciál)

a platí, že $df(z_0)\, h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} h$, $h \in \mathbb{R}^2$ (Jacobiho matice)

kde $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

② C-diferenc.

Def: Řekneme, že f je v $z_0 \in \mathbb{C}$ C-diferencov., jestliže ex. (konečná) limita, tj.

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

Číslo $f'(z_0)$ se nazývá komplex. derivace f v z_0.

Pozn. Podobně jako v $\mathbb{R}$ platí:

$(f \pm g)'$, $(f \cdot g)'$, $(f/g)'$, $(f \circ g)'$, ...

Př.: $(z^3)' = 3 \cdot z^2$

Př.: $f(z) = \overline{z}$ není nikde C-diferenc.

$f(x,y) = (x, -y)$ tř. C^∞ na $\mathbb{R}^2$

Věta (Cauchy-Riemann)

Funkce f je C-diferenc. v z_0, právě když f je R-diferenc. v z_0 a platí tzv. Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\text{(CR)} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} \quad \text{v bodě } z_0.$$

Exi-li $f'(z_0)$, potom $df(z_0)h = f'(z_0)h$, $h \in \mathbb{C}$

a $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$

Důkaz: platí $f'(z_0) = w$, právě tehdy když

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - wh}{h} = 0 \quad , / \cdot \frac{h}{|h|} \text{ má vel. } 1$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - wh}{\cancel{h}} \cdot \frac{\cancel{h}}{|h|} = 0,$$

~~neboli~~ neboli $df(z_0)h \overset{(*)}{=} wh$, $h \in \mathbb{C}$ je $\mathbb{C}$-lineární, ← jacob. matice

Spec. platí (CR).

navíc $f'(z_0) \overset{(*)}{=} df(z_0)1 = df(z_0)\underset{\in \mathbb{R}^2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) \end{pmatrix} =$

$= \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) \overset{\text{označ.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}$

konečně $f'(z_0) = (-i)\, df(z_0)\, i = (-i)\, df(z_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0)\right) \cdot (-i) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ ☒

Def: Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Potom fce $f: G \to \mathbb{C}$ nazveme holomorfní, pokud je f v každém bodě z G $\mathbb{C}$-diferencovatelná.

Př: polynomy: $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$

racionální fce: $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy nemající stejné kořeny, $Q \neq 0$

Elementární fce v $\mathbb{C}$

Exponenciála

Def: Definujme

$$\exp(z) := e^x \cdot (\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

(1) $\exp'(z) = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$

$f(z) = \exp(z)$

$f_1(x,y) = e^x \cdot \cos y = \frac{\partial f_1}{\partial x}$; $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -e^x \cdot \sin y$

$f_2(x,y) = e^x \cdot \sin y = \frac{\partial f_2}{\partial x}$; $\frac{\partial f_2}{\partial y} = e^x \cos y$

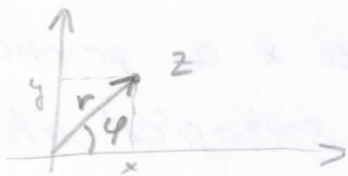
Protože f_1, f_2 jsou třídy C^∞ na $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ a platí (CR), máme $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \exp(z) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z)$.

(2) $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

(3) $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (později, cv.)

Goniometrický tvar

polární souřadnice:



$x = r \cdot \cos \varphi$

$y = r \cdot \sin \varphi$

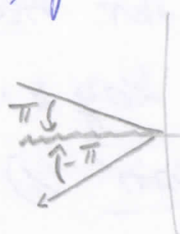
$z = x + iy = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi}$

modul z — argument z

Značení: je-li $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, položme $\operatorname{Arg} z := \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z| e^{i\varphi}\}$ a položme $\arg z := \varphi_0$, je-li $\operatorname{Arg} z \cap (-\pi, \pi] = \{\varphi_0\}$ hlavní hodnota argumentu z.

Platí: (1) $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(2) Fce $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{na} (-\pi, \pi]$ je konstantní na polopřímkách vycházejících z 0, je spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a není spojitá v žádném bodě $(-\infty, 0]$ (skok výšky 2π)

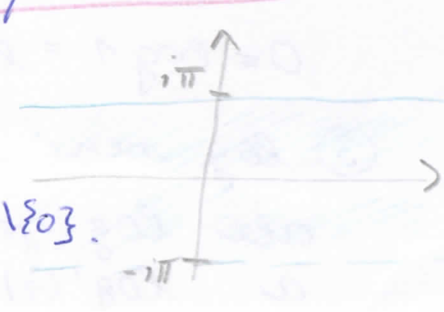


Vlastnosti

(4) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

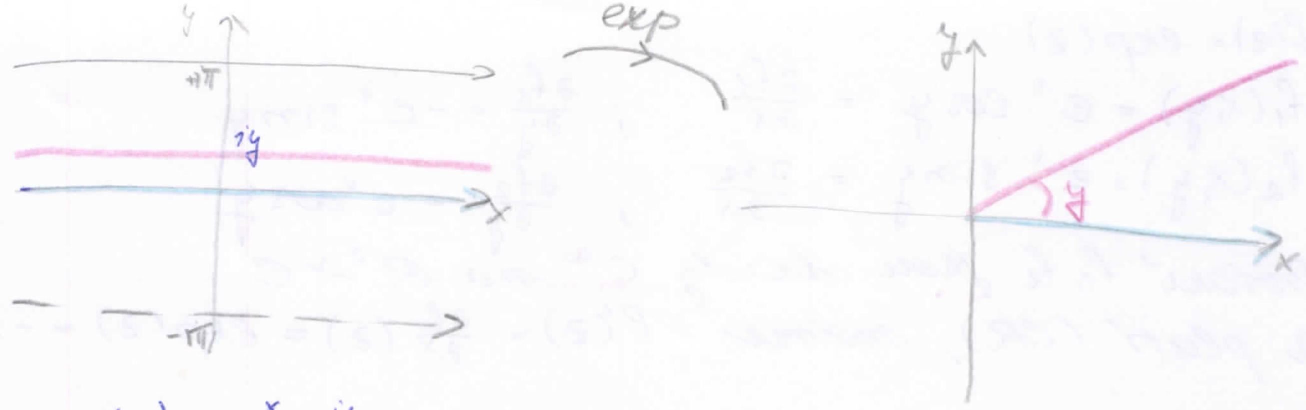
(5) exp není prostá na $\mathbb{C}$, je $2\pi i$-periodická a platí dokonce, že $\exp z = \exp w \iff \exists k \in \mathbb{Z}$: $w = z + 2k\pi i$

(6) je-li $P := \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi]\}$, pak $\exp|_P$ je prostá a $\exp(P) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.



ÚdKA3

Dk:



$$\exp(z) = e^x \cdot \underbrace{e^{iy}}_{\text{pevné pro body přímky}}$$

Pozorování: exp zobrazuje přímku rovnoběžnou s osou x a procházející bodem iy na polopřímku z 0 svírající úhel y s kladnou reálnou osou, a to prostě.

Logaritmus

Rovnice $e^w = z$ pro dané $z \in \mathbb{C}$. Pro $z = 0$: nemá řešení;

Pro $z \neq 0$: $z = |z| e^{i \arg z} = e^{\log|z| + i \arg z} = e^w$

$$w = \log|z| + i \arg z + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$$

Def: Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Položme $\log z := \log|z| + i \arg z$ (tzv. hlavní hodnota logaritmu z)

a $\operatorname{Log} z := \{ w \in \mathbb{C} \mid e^w = z \}$.

Platí: 1. $\operatorname{Log} z = \{ \log z + 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$$\log = (\exp|_P)^{-1}$$

2. $\exp(\log z) = z$

Pozor: $\log(\exp(z)) \neq z$
2πi-period.

$$0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) \neq 2 \cdot \log(-1) = 2\pi i$$

3. log není spojitý v žádném bodě z $(-\infty, 0]$, ale log je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a $\log'(z) = 1/z$; $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

④ $\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $|z|<1$.

Obecná mocnina

Def: Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Položme

$z^\alpha = \exp(\alpha \cdot \log z)$ (tzv. hlavní hodnota α-té mocniny z)

Položme $M_\alpha(z) := \{\exp(\alpha \cdot w) \mid w \in \operatorname{Log} z\}$.

Pozn: (i) $e^z = \exp(z \cdot \log e) = \exp(z)$ ($\in \mathbb{R}$)

(ii) je-li $z>0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom z^α je definováno stejně jako v $\mathbb{R}$.

(iii) $M_\alpha(z) = \{z^\alpha \cdot e^{2\alpha k \pi i} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Př: ① Nechť $\alpha \in \mathbb{Z}$. Potom $M_\alpha(z) = \{z^\alpha\}$

② nechť $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = p/q$, kde $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ a p, q jsou nesoudělná. Potom $M_{p/q}(z) = \{z^{p/q} e^{2 p/q \cdot k\pi i} \mid k = 0, \dots, q-1\}$ tvoří vrcholy pravidelného q-úhelníka se středem v 0.

③ Nechť $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$. Potom $M_\alpha(z)$ je nekonečná!

Př: (i) $\sqrt{-1} = (-1)^{1/2} = e^{\pi i/2} = i$,

$M_{1/2}(-1) = \{\pm i\}$

(ii) $\sqrt[3]{(-1)} = (-1)^{1/3} = e^{\pi i/3}$ (jinak než v $\mathbb{R}$!)

$M_{1/3}(-1) = \{e^{\pi i/3}, e^{2\pi i/3}, -1\}$

(iii) $i^i = e^{i \log i} = e^{i \cdot \pi/2 i} = e^{-\pi/2}$

$M_i(i) = \{e^{-\pi/2 - 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

POZOR: $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)^2} \neq (\sqrt{-1})^2 = i^2 = -1$

Hyperbolické fce

$$e^z = \frac{e^z+e^{-z}}{2} + \frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

sudá č. lichá č.

Def: $\cosh z = \dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$

$\sinh z = \dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$

Platí: $\cosh' = \sinh$; $\cosh'' = \sinh'$, ...

Goniometrické fce

Euler : $e^{iz} = \cos z + \underbrace{i \sin z}_{\text{liché}}$

Def: $\cos(z) = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$\sin(z) = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

Platí: (1) $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$

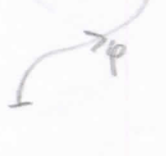
cos a sin jsou 2π-periodic.

(2) sin, cos nejsou omez. na $\mathbb{C}$,

$\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$

(3) součtové vzorce atd.

Křivkový integrál



$\int_\varphi f = ?$

Def: Nechť $\varphi: [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$. Potom

(i) φ je spojitá (spojitě diferencovatelná) křivka,

pokud φ je -||- (-||-).

POZOR: Grafem spoj. křivky může být i čtverec (Peanovy křivky).

(ii) φ je **regulární** křivka, pokud φ je spojitá na $[\alpha,\beta]$ a ex. dělení $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ takové, že $\varphi|_{[t_j, t_{j+1}]}$ je spoj. diferenc. $\forall j = 0,\dots,n-1$.

Úmluva: křivka = regulární křivka

Terminologie: (i) **Graf** φ: $\langle\varphi\rangle := \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha,\beta]\}$.

(ii) φ je **uzavřená**, je-li $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$

(iii) **Délka křivky**: $V(\varphi) = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\,dt$

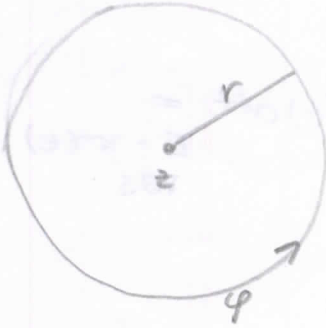
Def: Nechť φ je (regulární) křivka a $\varphi: [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$. Nechť f je komplexní fce, která je spojitá na $\langle\varphi\rangle$. Potom

$$\int_\varphi f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt. \quad (*)$$

$z = \varphi(t)$, $dz = \varphi'(t)\,dt$

Pozn: Integrál $(*)$ ex. vždy jako Riemann. nebo zobecněný Newtonův. Píšeme také $\int_\varphi f(z)\,dz$

Př:



Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a $\varphi(t) = z_0 + r\cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Potom
$$\int_\varphi (z - z_0)^n\,dz \overset{\substack{z=\varphi(t)\\ dz = \varphi'(t)dt = i r e^{it} dt}}{=} \int_0^{2\pi} r^n e^{int}\cdot i r e^{it}\,dt =$$

$$= i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt = 2\pi i, \quad n = -1$$
$$= 0, \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$$

protože $\left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right]_0^{2\pi} = 0$, $n \neq -1$

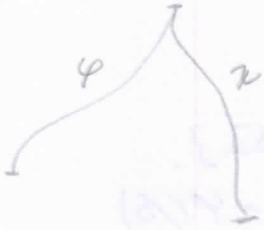
Základní vlastnosti: ① je-li φ křivka v $\mathbb{C}$, f, g jsou spoj. fce na $\langle\varphi\rangle$ a $A, B \in \mathbb{C}$, potom

$$\int_\varphi (Af + Bg) = A\int_\varphi f + B\int_\varphi g.$$

② je-li f spoj. fce na $\langle\varphi\rangle$, potom $\left|\int_\varphi f\right| \le \max_{\langle\varphi\rangle} |f| \cdot V(\varphi)$

$$\left[\; \left|\int_\varphi f\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta \underbrace{|f(\varphi(t))|}_{\le M := \max_{\langle\varphi\rangle}|f|}\cdot|\varphi'(t)|\,dt \;\right]$$

③ Nechť $\varphi: [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ a $\psi: [\gamma,\delta] \to \mathbb{C}$ jsou křivky. $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$



Potom jejich součet definujeme

$$(\varphi \dotplus \psi)(t) := \varphi(t),\ t\in[\alpha,\beta]$$
$$:= \psi(t-\beta+\gamma),\ t\in[\beta,\delta+\beta-\gamma]$$

Dále definujeme

$$\dot{-}\varphi(t) := \varphi(-t),\ t\in[-\beta,-\alpha]$$

Potom $\int_{\varphi\dotplus\psi} f = \int_\varphi f + \int_\psi f$ a $\int_{\dot{-}\varphi} f = -\int_\varphi f$.

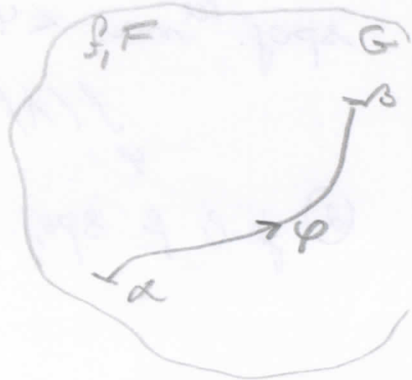
④ Křivkový integrál nezávisí na parametrizaci křivky. Nechť $\varphi: [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ je křivka a $w: [\gamma,\delta] \xrightarrow{\text{na}} [\alpha,\beta]$ je spoj. diferencovatelná s $w'>0$.
Nechť $\psi = \varphi\circ w$. Potom $\int_\varphi f = \int_\psi f$.

$$\left[\; \int_\psi f = \int_\gamma^\delta f(\varphi(w(t)))\cdot\varphi'(w(t))\,w'(t)\,dt \underset{\substack{\tau = w(t)\\ \text{VOS}}}{=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))\cdot\varphi'(\tau)\,d\tau = \int_\varphi f \;\right]$$

Def: Řekneme, že fce f na ot. množině $G\subset\mathbb{C}$ má primitivní fci F, pokud $F' = f$ na G.

Věta: (o výpočtu kř. integrálu pomocí prim. fce) Nechť f má na ot. množině $G\subset\mathbb{C}$ primit. fci F. Nechť f je spoj. na grafu křivky φ v G. Potom $(\varphi: [\alpha,\beta]\to G)$

$$\int_\varphi f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$



Je-li φ uzavřená, potom $\int_\varphi f = 0$.

Dk: máme $\int_\varphi f = \int_\alpha^\beta \underbrace{f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)}_{\frac{d}{dt}F(\varphi(t))} dt \overset{\text{Leibnitz}}{=} F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$,

$\frac{d}{dt}F(\varphi(t))$ … zobecněná prim. fce k integrandu

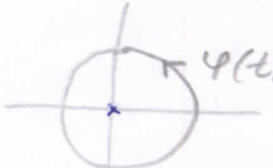
protože $\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{= F' \text{ (komplex. derivace)}} \varphi_1'(t) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}}_{= i F'} \cdot \varphi_2'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$,

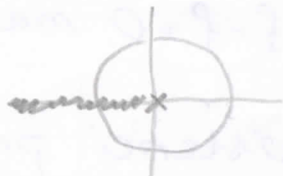
kde $\varphi'(t) = \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t)$. ∎

Př.: (i) z^n má prim. fci $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ pro $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

(ii) $\frac{1}{z}$ je holom. fce na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ale nemá prim. fci na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Skutečně máme, že $\int_\varphi \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$.





iii) Na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ fce $1/z$ má prim. fci $\log z$. (hl. hod)

Značení: Řekneme, že křivka φ je úsečka z $a \in \mathbb{C}$ do $b \in \mathbb{C}$, pokud $\varphi(t) := a + t(b-a)$, $t \in [0,1]$.

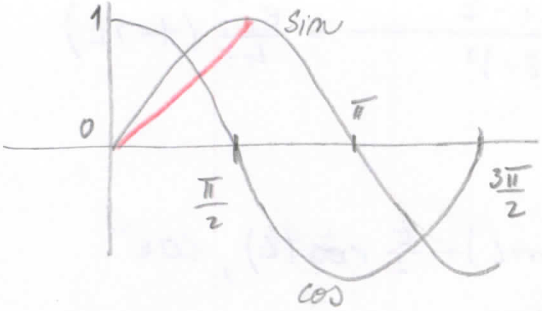
Označení $[a; b]$.

Řekneme, že φ je lomená čára v $\mathbb{C}$, pokud exis. $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ tak, že

$\varphi = [z_1; z_2] \dotplus [z_2; z_3] \dotplus \dots \dotplus [z_{k-1}; z_k]$.

Tvrzení: Fce f na oblasti $G \subset \mathbb{C}$ je konstantní, právě když $f' = 0$ na G.

Pozn: $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, pokud je G otevř. a souvislá.



$$I \underset{\theta=\varphi+\pi/2}{=} \int_0^{\pi} e^{-tr\sin\varphi}\,d\varphi = 2\cdot\int_0^{\pi/2} e^{-tr\sin\varphi}\,d\varphi \leq 2\cdot\int_0^{\infty} e^{-tr\frac{2}{\pi}\varphi}\,d\varphi$$

$$= \pi\cdot\left[\frac{e^{-tr\frac{2}{\pi}\varphi}}{tr}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\infty} = \frac{\pi}{t\cdot r}$$

$\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi\ ;\ \varphi\in[0,\pi/2]$

z konkavity sinu

(ii) $\left|\int_{\text{oblouk } AB} F(s)e^{st}\,ds\right| \leq \underbrace{V(AB)}_{\text{délka oblouku}}\cdot e^{\alpha t}\underbrace{\sup_{|s|=r}|F(s)|}_{\downarrow\, 0} \longrightarrow 0$ pro $r\to+\infty$

$\downarrow r\to+\infty$

$\times$

oblouk se narovnává
→ blíží se přímce

Podobně máme, že

$$\int_{\text{oblouk } DE} F(s)e^{st}\,ds \to 0 \text{ pro } r\to+\infty.$$

∎

Př: Řešte $y''+y=\sin t\ ;\ y(0)=y'(0)=0$ (R)

Užijeme LT na (R). Označíme-li $Y=\mathcal{L}y$, máme $\mathcal{L}(y'')(s) = s\cdot\mathcal{L}(y')-y'(0) =$

$$= s^2\mathcal{L}(y)-s\,y(0)-y'(0)$$

$$\mathcal{L}(\sin)(s) \overset{\text{minule}}{=} \frac{1}{1+s^2},\ \text{a tudíž dostaneme}$$

$$s^2Y(s)+Y(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(1+s^2)^2}\quad,\ \text{izol. sing. } \pm i = s,\ Y(s)\underset{s\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Potom $y(t) \overset{?}{=} (\mathcal{L}^{-1}Y)(t) \overset{\text{věta}}{=} \operatorname{res}_{s=i}(Y(s)e^{st}) + \operatorname{res}_{s=-i}(Y(s)e^{st})$

$$\operatorname{res}_{s=i}(Y(s)e^{st}) = \operatorname{res}_{s=i}\left(\frac{1}{(s-i)^2}\cdot(a_0+a_1(s-i)+\dots)\right) =$$

$$= a_1 = \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{st}}{(s+i)^2}\right)\Bigg|_{s=i} =$$

$Y(s) = \frac{1}{(s-i)^2(s+i)^2}$

Dk: ① $\Rightarrow$ ② víme

② $\Rightarrow$ ③ zřejmě $\tau := \varphi \dotplus (\dot{-}\psi)$ je uzavřená

a $\int_\tau f \overset{(2)}{=} 0$

$= \int_\varphi f - \int_\psi f$

③ $\Rightarrow$ ①:

Nechť $z_0 \in G$. Pro každé $z \in G$ najdu lomenou čáru φ_z v G, která začíná v z_0 a končí v z.

Položme $F(z) := \int_{\varphi_z} f, \ z \in G$

(podle (3.) F nezávisí na volbě φ_z)

Nechť $z_1 \in G$. Potom ukážeme, že

$F'(z_1) = f(z_1)$.

Označení: je-li $z_1 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, potom $U\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_1| < r\}$

Zvolme $r > 0$, aby $U(z_1, r) \subset G$.

Nechť $h \in \mathbb{C}$, $|h| < r$. Potom $F(z_1 + h) - F(z_1) \overset{(*)}{=}$

$= \int_{\varphi_{z_1} \dotplus u} f - \int_{\varphi_{z_1}} f = \int_u f = \int_0^1 f(z_1 + th) \cdot h \, dt,$

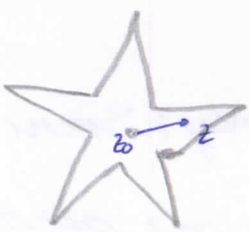
kde $u = z_1 + th$, $t \in [0,1]$, tj. $[z_1; z_1 + h]$.

Z (*) dostaneme, že $\left| \frac{F(z_1+h) - F(z_1)}{h} - f(z_1) \right| =$

$= \left| \int_0^1 (f(z_1 + th) - f(z_1)) \, dt \right| \leq \max_{w \in [z_1, z_1+h]} |f(w) - f(z_1)| \xrightarrow{h \to 0} 0$

protože f je spoj. v z_1. ∎

Označení: (i) Řekneme, že $M \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitě konvexní, pokud ex. $z_0 \in M$ takový, že $[z_0; z] \subset M$ $\forall z \in M$. Bod z_0 se nazývá střed hvězdovitosti M.

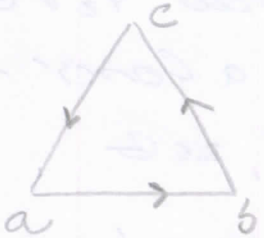


ÚdKA7

Pozn. Pro konvexní množ. je každý bod středem hvězdov.

(iii) Říkáme, že $\Delta \subset \mathbb{C}$ je trojúhelník s vrcholy $a, b, c \in \mathbb{C}$, pokud $\Delta = \{\alpha a + \beta b + \gamma c \mid \alpha + \beta + \gamma = 1,$
$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0\}$

Značíme $\partial\Delta := [a;b] \dot{+} [b;c] \dot{+} [c;a]$.



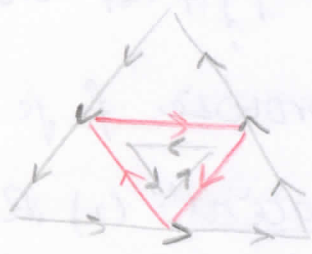
Připouštíme i degenerované trojúh.

Věta2
= dodatek: nechť f je spojitá fce na hvězdovitě konvexní oblasti. Potom f má prim. fci na G, pokud $\int_{\partial\Delta} f = 0$. pro každý trojúhelník $\Delta \subset G$.

Dk: nechť z_0 je bod hvězdovitosti G. Potom polož $F(z) := \int_{[z_0;z]} f$, $z \in G$. Dokaž, že F je prim. fce k f na G je stejný jako v předch. větě (3.).

Otázka: kdy je $\int_\varphi f = 0$? φ... uzavřená, f holomorf.
(Cauchyho věty)

Goursatovo lemma: nechť f je holomorfní fce na ot. množ. $G \subset \mathbb{C}$ a nechť Δ je trojúhelník v G (tzn. $\Delta \subset G$). Potom $\int_{\partial\Delta} f = 0$.



Důkaz: Sporem
nechť $K = \left|\int_{\partial\Delta} f\right| > 0$. Zřejmě Δ nedegenerovaný! Rozděl Δ podle středních příček a označme okrajy čtyř vzniklých trojúhelníků $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ (orientaci volím viz obráz.)

Zřejmě $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\psi_1} f + \int_{\psi_2} f + \int_{\psi_3} f + \int_{\psi_4} f$

Ex. $j_0 = 1,2,3,4$ tak, že $\left|\int_{\psi_{j_0}} f\right| \geq \frac{K}{4}$ a $V(\psi_{j_0}) = \frac{V(\partial\Delta)}{2}$.
obvod

Označ $\varphi_0 = \partial\Delta$, $\varphi_1 = \psi_{j_0}$ a dále indukcí sestrojíme
„zvrácených" posloupnost uzavř. trojúhelníků $\Delta_0 = \Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$
s obvody $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ tak, že $\left|\int_{\varphi_j} f\right| \geq \frac{K}{4^j}$ a $V(\varphi_j) = \frac{V(\partial\Delta)}{2^j}$

Dále $\bigcap_{j=0}^{\infty} \Delta_j = \{z_0\} \subset G$.

Položme $\varepsilon(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)$, $z \in G \setminus \{z_0\}$; (*)

$:= 0$, $z = z_0$

Zřejmě ε je spojitá na G a máme

$$\int_{\varphi_j} f \overset{(*)}{=} \underbrace{\underbrace{\int_{\varphi_j} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))\,dz}_{\text{má prim. fci na } \mathbb{C} \text{ - polynom st. 1}}}_{=0 \text{ dle věty o výpočtu křiv. } \int \text{ pomocí prim. fce}} + \int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z - z_0)\,dz$$

Tedy $\frac{K}{4^j} \leq \left|\int_{\varphi_j} f\right| = \left|\int_{\varphi_j} \varepsilon(z)(z-z_0)\,dz\right| \leq V^2(\varphi_j) \max_{\langle\varphi_j\rangle} |\varepsilon|$

$|z - z_0| \leq V(\varphi_j)$ pro $z \in \varphi_j$

tudíž $\frac{K}{4^j} \leq \frac{V^2(\partial\Delta)}{4^j} \cdot \max_{\langle\varphi_j\rangle} |\varepsilon|$

$0 < K \leq V^2(\partial\Delta) \cdot \underbrace{\max_{\langle\varphi_j\rangle} |\varepsilon|}_{\to 0 \text{ pro } j \to \infty} \to 0$, což je spor. ∎

Z Goursatova lemmatu a Věty 2 plyne

<u>Věta 3 (Cauchyho na hvězdovitě konvex. oblastech)</u>
Nechť f je <u>holomorfní</u> fce na <u>hvězd. konvexní</u> oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Potom f má na G primit. fci.
Ekvivalentně platí, že $\int_\varphi f = 0$ $\forall$ uzavř. křivku φ v G.

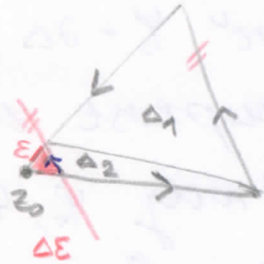
ÚDKAZ

Pozn.: Goursatovo lemma a Věta 3 platí, i pokud fce f je jen spoj. na G a holomorfní na $G\setminus\{z_0\}$.

Dk: Skutečně, nechť Δ je troj. v G. Potom

i) $z_0 \notin \Delta$: $\int_{\partial\Delta} f = 0$ z Gours. lemmatu

ii) z_0 je vrchol Δ: $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta\varepsilon} f + \underbrace{\int_{\partial\Delta_1} f}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial\Delta_2} f}_{=0}$ (z bodu i)

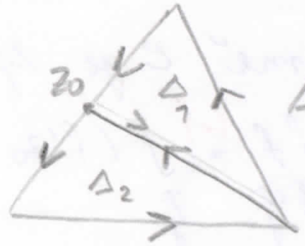


$$\left|\int_{\partial\Delta} f\right| = \left|\int_{\partial\Delta_\varepsilon} f\right| \le \underbrace{V(\partial\Delta_\varepsilon)}_{\to 0} \cdot \max_{\Delta}|f|$$

pro $\varepsilon \to 0_+$

$\Rightarrow \left|\int_{\partial\Delta} f\right| = 0.$

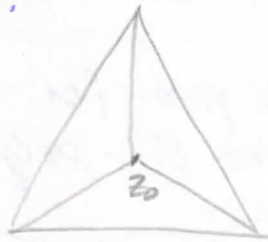
(iii) z_0 leží na straně Δ:



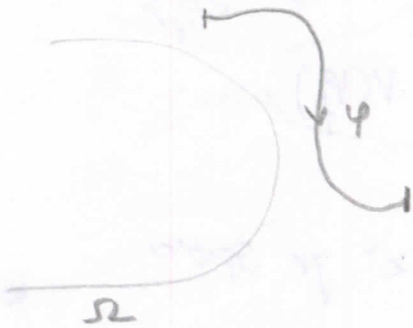
$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$

(iv) z_0 leží uvnitř Δ:

„shodně" zvolíme orientace jako v bodě iii)"



Věta (o derivování int. podle komplex. parametru)



Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je ot. množ. a φ je křivka v $\mathbb{C}$. Nechť $F(z,\xi)$ a $\frac{\partial F}{\partial \xi}(z,\xi)$ jsou spojité na $\langle\varphi\rangle \times \Omega$.

ξ … komplex.

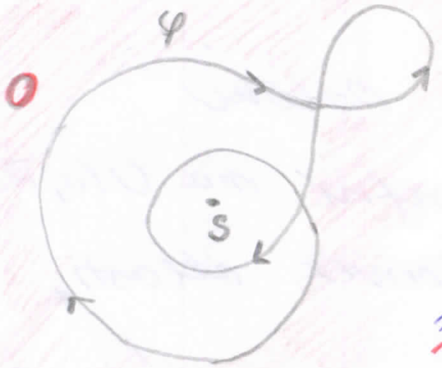
Pro každé $\xi \in \Omega$ položme $\phi(\xi) = \int_\varphi F(z,\xi)\,dz$.

Potom ϕ je holomorfní fce na Ω

a $\phi'(\xi) = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial \xi}(z,\xi)\,dz, \quad \xi \in \Omega$

Dk: $\phi(\xi) = \int_\varphi F(z,\xi)\,dz = \int_\alpha^\beta F(\varphi(t), x_1, x_2)\cdot\varphi'(t)\,dt$, pokud $\varphi: [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ a $\xi = x_1 + i x_2$. Podle vět o derivování dle reál. parametru je $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(\xi) = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial x_j}(z,\xi)\,dz = \ldots$

mají $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}$ jsou spojité na Ω a $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}$ splňují C.-R. podmínky, protože $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ splňují C.R. podm. ◻



Def: Nechť φ je uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ a $s \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Potom číslo $\mathrm{ind}_\varphi s := \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z-s}$ nazveme index bodu s vůči φ.

Pozn: $\mathrm{ind}_\varphi s$ = kolikrát se φ otočí kolem bodu s proti směru hodinových ručiček.

Připomínka: Komponentou $M \subset \mathbb{C}$ je každá maximální souvislá podmnožina M. Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená, potom vš. její komponenty G_n jsou oblasti, je jich nejvýše spočetně mnoho, jsou po 2 disjun. a $G = \bigcup_n G_n$.

Věta: (o indexu)

Je-li φ uzavřená křivka v $\mathbb{C}$, potom funkce $s \longmapsto \mathrm{ind}_\varphi s$ je konstantní na každé komponentě $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$, a na neomezené komponentě, která je jediná, je nulová.

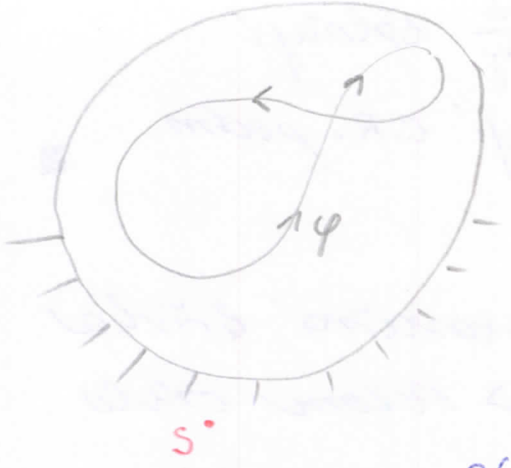
Dk: Polož. $G := \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$

Dle předchozí věty je $\underbrace{\phi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z-s}}_{\mathrm{ind}_\varphi s}$, $s \in G$

holomorfní na G a tedy $\forall s \in G$

$\phi'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \underbrace{\frac{dz}{(z-s)^2}}_{\text{má prim. fci}} = 0$, protože $f(z) := \frac{1}{(z-s)^2}$ má prim. fci na $\mathbb{C} \setminus \{s\}$

Tedy ϕ je konstantní na kaž. komponentě G.



Vol $R>0$, aby $\langle\varphi\rangle \subset U(0,R)$. Potom $\mathbb{C}\setminus U(0,R)$ je obsaženo v jediné neomezené komponentě G_0 množiny G.

Nechť $s\in\mathbb{C}\setminus U(0,R)$. Potom $g(z):=\frac{1}{z-s}$ je holomorfní na $U(0,R)$ a z Cauchyho věty pro hvězd. konvex. oblasti (pro U) je $\Phi(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-s}=0$. ∎

Př.: Nechť $z_0\in\mathbb{C}$, $r>0$ a $\varphi(t)=z_0+r\cdot e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Potom

$$\mathrm{ind}_\varphi(s)=1,\ |s-z_0|<r$$
$$=0,\ |s-z_0|>r.$$

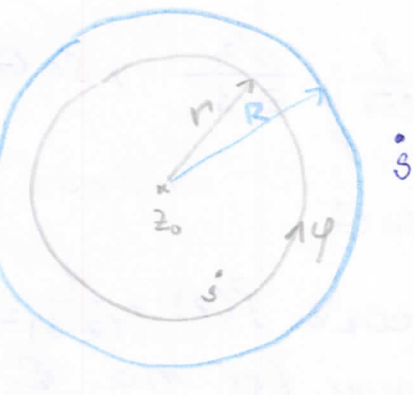
Víme totiž, že

$$1=\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-z_0}=\mathrm{ind}_\varphi z_0.$$

Cauchyův vzorec pro kruh

Věta: Nechť f je holomorfní na ot. množině $G\subset\mathbb{C}$, $\overline{U(z_0,r)}\subset G$ a $\varphi(t)=z_0+r\cdot e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Potom

$$(CV_r)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}\,dz = f(s),\quad |s-z_0|<r, \quad (1)$$
$$= 0,\quad |s-z_0|>r, \quad (2)$$



Důkaz: (1) Volme $R>0$, aby $\overline{U(z_0,r)}\subset U(z_0,R)\subset G$. Položme

$$h(z):=\frac{f(z)-f(s)}{z-s},\quad z\neq s,$$
$$:= f'(s),\quad z=s.$$

Potom h je holomorfní na $U(z_0,R)\setminus\{s\}$ a je spojitá na $U(z_0,R)$.

Dále máme: $\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-s}\,dz = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi h(z)\,dz}_{=0} + f(s)\cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-s}}_{=:\,\mathrm{ind}_\varphi s = 1} = f(s)$

Dle Cauchyovy věty pro hvězdovitou konvexní oblast $U(z_0,R)$

(2) Nechť $|s-z_0|>r$. Volme $R>0$, aby $\overline{U(z_0,r)} \subset U(z_0,R) \subset G$ a $s \notin U(z_0,R)$. Potom

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \underbrace{\frac{f(z)}{z-s}}_{\text{holomorfní pro } z\in U(z_0,R)}dz \overset{\text{Cauch. věta}}{=} 0$$

$\boxed{}$

Dodatek: Za předpokladů předchozí věty platí, že

$$(CV_2^{(k)}) \quad \frac{k!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)\,dz}{(z-s)^{k+1}} = f^{(k)}(s), \quad |s-z_0|<r$$
a $k = 0,1,2,3,\dots$

Důkaz: (CV) můžeme derivovat k krát podle komplexního param. s a dostaneme $(CV_2^{(k)})$, protože $\frac{d^k}{ds^k}\left(\frac{1}{z-s}\right) = k!\,\frac{1}{(z-s)^{k+1}}$

$\boxed{}$

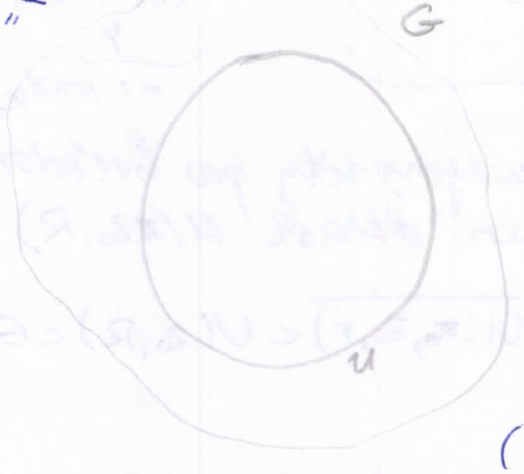
Důsledek: Je-li f holomorfní na ot. množině $G\subset\mathbb{C}$, potom má f všude na G komplexní derivace všech řádů.

Věta (MOREROVA)

Nechť f je spojitá fce na ot. množ. $G\subset\mathbb{C}$. Potom je f na G holomorfní, právě když $\int_{\partial\Delta} f = 0$ pro každý Δ trojúhelník $\subset G$.

Dk: „$\Rightarrow$“ Goursatovo lemma

„$\Leftarrow$"



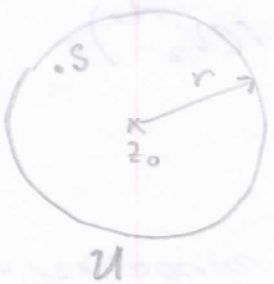
nechť $U := U(z_0, R) \subset G$. Protože f je spoj. na hvězdovité konvex. oblasti U a $\int_{\partial\Delta} f = 0$ pro každý trojúhelník $\Delta \subset U$.
Víme, že f má na U primit. fci F, tzn. $f = F'$ na U.
($\exists F'' = f'$ na U) Tedy f je holomorfní na U. Ale U libovolná $\Rightarrow$ i na G. $\boxtimes$

Věta (Cauchyovy odhady)

nechť f je holomorfní fce na ot. množ. $G \subset \mathbb{C}$, $\overline{U(z_0, r)} \subset G$ a $r \in (0, +\infty)$. Potom pro každé $k = 0, 1, 2, \dots$ platí, že

$$(CO_1)\quad \forall s \in U := U(z_0, r) : |f^{(k)}(s)| \leq \frac{k!\, r}{(d(s))^{k+1}} \max_{\partial U} |f|,$$

kde $(d(s)) = \operatorname{dist}(s, \partial U) = \min_{z \in \partial U} |s - z|$.



$$(CO_2)\quad \forall s \in U(z_0, r/2) : |f^{(k)}(s)| \leq \frac{k!\, 2^{k+1}}{r^k} \max_{\partial U} |f|,$$

$$(CO_3)\quad |f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{\partial U} |f|.$$

Důkaz:

(CO_1) plyne snadno z $(CV_z^{(k)})$, protože

$$|f^{(k)}(s)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)\,dz}{(z-s)^{k+1}} \right| \underset{|z-s| \geq d(s)}{\leq} \frac{k!}{2\pi} 2\pi r \cdot \frac{1}{(d(s))^{k+1}} \cdot \max_{\partial U} |f|.$$

(CO_2) plyne z (CO_1), protože $d(s) \geq \frac{r}{2}$

(CO_3) plyne z (CO_1), protože $d(z_0) = r$.

$\boxtimes$

Věta (Liouville)

Je-li f holomorfní a omezená fce na $\mathbb{C}$, potom je f konstantní.

Dk: Ukážeme, že $f'=0$ na $\mathbb{C}$.

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom $|f'(z_0)| \overset{(CO_3)}{\leq} \underbrace{\frac{1}{r} \cdot \sup_{\mathbb{C}} |f|}_{\to 0 \text{ pro } r \to \infty}$ $\forall r > 0$

Tedy $f'(z_0) = 0$. $\boxtimes$

Základní věta algebry:

Polynom st. aspoň 1 má v $\mathbb{C}$ alespoň 1 kořen.

Důkaz: Nechť $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$ a $n \geq 1$. Sporem: Nechť $p \neq 0$ na $\mathbb{C}$. Potom $\frac{1}{p}$ je holomorfní a omezená fce na $\mathbb{C}$, tudíž $\frac{1}{p}$ je konstantní, což je spor.

Omezenost $1/p$: $\left|\frac{1}{p(z)}\right| = \frac{1}{|z^n(\underset{\neq 0}{a_0} + \frac{a_1}{z} + \dots \frac{a_n}{z^n})|} \leq \underbrace{\frac{1}{r^n(|a_0| - \frac{|a_1|}{r} \dots)}}_{\to 0 \text{ pro } r \to \infty}$ označ $r = |z|$

tedy $\exists r_0 \in (0, \infty): \left|\frac{1}{p(z)}\right| \leq 1$, $|z| \geq r_0$

Fce $\frac{1}{p(z)}$ je omezená na $|z| \leq r_0$, protože $\frac{1}{p}$ je spoj. fce na kompaktu $|z| \leq r_0$. $\square$

Lemma: Nechť φ je křivka v $\mathbb{C}$ a $f_n, n \in \mathbb{N}$ jsou spojité fce na $\langle\varphi\rangle$. Pokud $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle\varphi\rangle$, máme, že f je spojitá na $\langle\varphi\rangle$ a $\int_\varphi f_n \to \int_\varphi f$.

Důkaz: $\left|\int_\varphi f_n - \int_\varphi f\right| \overset{\text{lin. fcionálu}}{=} \left|\int_\varphi (f_n + f)\right| \leq V(\varphi) \cdot \max_{\langle\varphi\rangle} |f_n - f| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\boxtimes$

Věta (Weierstrass)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je ot. množ. a f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou holomorfní fce na G. Nechť $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na G. Potom je f na G holomorfní a $\forall k = 1, 2, 3, \dots$ je $f_n^{(k)} \overset{loc}{\rightrightarrows} f^{(k)}$ na G.

Důkaz: (i) dokážeme, že f holomorfní

Zřejmě f je spojitá na G (reálná analýza)

Podle Morerovy věty je f holomorfní, protože pro každý trojúhelník $\Delta \subset G$ je

$$\underbrace{0 = \int_{\partial\Delta} f_n}_{f_n \text{ holomorf. dle předpokladu}} \xrightarrow{\text{Lemma}} \int_{\partial\Delta} f = 0.$$

(ii) Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $z_0 \in G$. Nechť $\overline{U(z_0, r)} \subset G$.

Z (CO_2) máme $\forall s \in U(z_0, r/2)$:

$$|\underbrace{f_n^{(k)}(s) - f^{(k)}(s)}_{(f_n - f)^{(k)}(s)}| \le \frac{k!\, 2^{k+1}}{r^k} \cdot \underbrace{\max_{\partial U(z_0, r)} |f_n - f|}_{\to 0 \text{ pro } n \to \infty}$$

$\overline{U}$ kompakt v G, tedy

PROČ $\}$ $f_n^{(k)} \rightrightarrows f^{(k)}$ na $U(z_0, r/2)$. ■

Mocninné řady v $\mathbb{C}$

Def: Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom

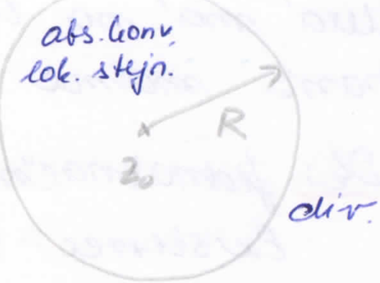
(Ř) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ se nazývá *mocninná řada*.

Vlastnosti:

(1) Ex.! číslo $R \in [0, \infty]$ takové, že

(Ř) konverguje absol. a lokálně stejnoměrně na $U(z_0, R) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R \}$

a (R^u) diverguje pro $|z-z_0|>R$.



Číslo R se nazývá poloměr konvergence (R^u) a platí, že

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \left(\text{pokud } \frac{1}{0}=+\infty, \ \frac{1}{+\infty}=0\right)$$

Důkaz: (i) plyne z odmocninového kritéria, protože

$$\limsup\sqrt[n]{|a_n|\,|z-z_0|^n}=\frac{1}{R}\cdot|z-z_0| \begin{array}{l} <1 \ \ldots \text{ konv. abs.} \\ >1 \ \ldots \text{ div.}\end{array}$$

(ii) Je-li $|z-z_0|\le r<R$, potom

$|a_n(z-z_0)^n|\le|a_n|r^n$ a podle (i) $\sum|a_n|r^n<+\infty$

Tedy (R^u) konv. stejn. na $|z-z_0|\le r$.

(2.) Označíme-li f součet (R^u), potom je f na $U(z_0,R)$ holomorfní fce a (R^u) derivujeme „člen po členu",

tzn. $f'(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot n\cdot(z-z_0)^{n-1}$, $z\in U(z_0,R)$

$$(*)\qquad f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(z-z_0)^{n-k},\ z\in U(z_0,R)$$
a $k=0,1,2,\ldots$

Speciálně, $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n=0,1,2,\ldots$

Dk: Protože $S_N=\sum\limits_{n=0}^{N}a_n(z-z_0)^n\overset{loc}{\rightrightarrows}f$ na $U(z_0,R)$, je dle Weierstrass. v. je f holomorfní fce

a $S_N^{(k)}\overset{loc}{\rightrightarrows}f^{(k)}$ na $U(z_0,R)$.

Dosadíme-li do $(*)$ za $z=z_0$, dostaneme $f^{(k)}(z_0)=a_k k!$ ∎

Věta (o rozvoji holomor. fce do mocninné řady na kruhu)

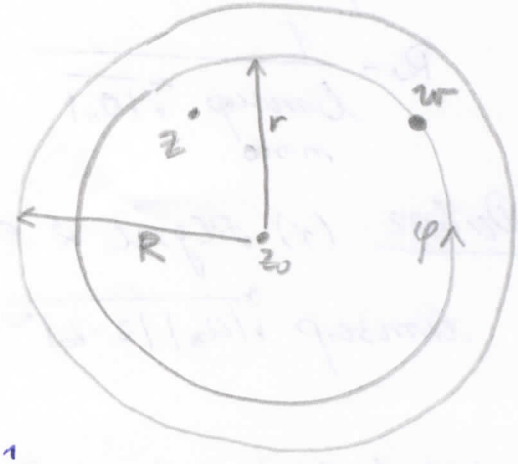
Nechť $R\in(0,+\infty]$ a nechť f je holomorfní fce na $U(z_0,R)$.

Potom existuje jediná mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, která má na $U(z_0, R)$ součet f.

Navíc máme $a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Dk: jednoznačnost: plyne z ②.

Existence: Nechť $|z - z_0| < r < R$ a $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Máme, že



$$(CV_z) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(w)}{w - z} \, dw.$$

Dále máme, že

$$(**) \quad \frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} =$$

$$= \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{z - z_0}{w - z_0}}_{|\cdot| < 1}} \cdot \frac{1}{w - z_0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^m}{(w - z_0)^{m+1}}$$

je-li $|z - z_0| < |w - z_0|$

Dosadíme $(**)$ do (CV_z) a dostaneme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^m}{(w - z_0)^{m+1}} f(w) \, dw \overset{\text{konv. stejnom. na } \langle\varphi\rangle}{=}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (z - z_0)^m \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\varphi \frac{f(w)}{(w - z_0)^{m+1}} \, dw}_{\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}} = \sum_{m=0}^{\infty} (z - z_0)^m \cdot \frac{1}{m!} \cdot f^{(m)}(z_0)$$

■

Věta (o nulovém bodě)

Nechť f je holomorfní fce na nějakém okolí $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f(z_0) = 0$. Potom buď

① ex. $r > 0$ tak, že $f \equiv 0$ na $U(z_0, r)$, nebo

② ex. $r > 0$ tak, že $f \neq 0$ na $P(z_0, r) = U(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

V případě ② ex. jediné číslo $p \in \mathbb{N}$ takové, že

$$f(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(p)}(z_0) \neq 0.$$

Takové p se nazývá násobnost nulového bodu z_0 fce f.

Navíc z_0 je nulovým bodem f násobnosti p, právě když ex. $r > 0$ a ex. nenulová holomorf. fce g na $U(z_0, r)$ tak, že $f(z) = (z - z_0)^p \cdot g(z)$, $z \in U(z_0, r)$.

Dk: Nechť $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z\in U(z_0,R)$ $\quad [a_0=f(z_0)=0]$

Pokud nenastane ①, potom ex. nejmenší $p\in\mathbb{N}$ tak, že $a_p\neq 0$. Víme ale, že $a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Tedy $f(z)=a_p(z-z_0)^p+\dots = (z-z_0)^p \underbrace{\sum_{n=p}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-p}}_{g(z):=}$

Protože $g(z_0)=a_p\neq 0$, ex. $r>0$ ze spoj. g takové, že $g\neq 0$ na $U(z_0,r)$. ■

Věta (o jednoznačnosti)

Nechť f,g jsou holomorfní fce na oblasti $G\subset\mathbb{C}$.

PNTJE:

① $f=g$ na G

② množina $M:=\{z\in G: f(z)=g(z)\}$ má hromadný bod v G, tj: $\exists z_0\in G$ tak, že $\forall r>0$: $P(z_0,r)\cap M\neq\emptyset$.

③ Ex. $z_0\in G$ tak, že $f^{(k)}(z_0)=g^{(k)}(z_0)$, $k=0,1,2,\dots$ kde $f^{(0)}:=f$.

Dk: ① ⇒ ② $\quad M=G$, BÚNO $g\equiv 0$ (jinak uvaž $f-g$)

② ⇒ ③ : Nechť $z_0\in G$ je hromadný bod $M=\{z\in G: f(z)=0\}$. Ze spojitosti f je $f(z_0)=0$.

Podle předchozí věty $f=0$ na jistém okolí bodu z_0, a platí tedy ③

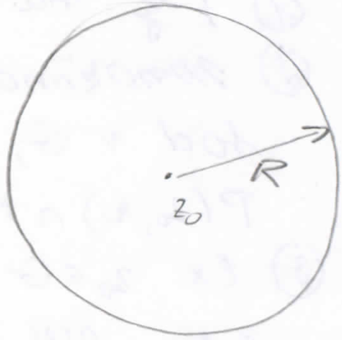
③ ⇒ ① Nechť $N:=\{z\in G: f^{(k)}(z)=0$ pro $k=0,1,2,\dots\}$. Potom $N\neq\emptyset$ (z ③), N je uzavřená v G, protože každá $f^{(k)}$ je spoj. na G. Navíc N je otevřená. Nechť $z_1\in N$ $\neq z_0$. Podle předchozí věty $f=0$ na jistém okolí $U(z_1,r)$. Tedy $U(z_1,r)\subset N$. Protože G je oblast, je $N=G$. Co když N je jednobodová? ■

Př: Víme-li $\sin(2z) = 2\cdot\sin z\cdot\cos z$, $z\in\mathbb{R}$, potom věta o jednoznačnosti dokazuje platnost tohoto vzorce všude na $\mathbb{C}$!

Věta (princip maxima modulu)
abs. hodn.

Nechť f je holom. fce na oblasti $G\subset\mathbb{C}$. Potom f je na G konstantní, pokud $|f|$ nabývá v G lokální maximum, tzn. ex. $z_0\in G$ a ex. $U(z_0,R)\subset G$ tak, že $|f(z_0)|\geq|f(z)|$, $z\in U(z_0,R)$.

Dk: Nechť $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, $z\in U(z_0,R)$.



Nechť $0<r<R$ a $\varphi(t)=z_0+r\cdot e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.

Potom máme

$$|a_0|^2=|f(z_0)|^2\geq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{it})|^2\,dt$$

$$\boxed{|f|^2=f\cdot\bar{f}}\qquad=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n e^{itn}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_m r^m e^{-imt}\right)dt$$

Obě řady konvergují abs. a stejnoměrně (lok).
$\Rightarrow$ tedy i jejich součin.

$$=\sum_{n,m=0}^{\infty}a_n\bar{a}_m r^{n+m}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)t}\,dt}_{1\ (n=m),\quad 0\ (n\neq m)}=\qquad=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)}\right]_{t=0}^{2\pi}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{a_n\bar{a}_n}_{|a_n|^2}\cdot r^{2n}\cdot 1$$

Máme tedy

$$|a_0|^2\geq|a_0|^2+|a_1|^2r^2+\dots+|a_n|^2r^{2n}+\dots,$$

tedy $a_1=\dots=a_n=0=a_{n+1}=\dots$

Máme $f=a_0$ na $U(z_0,R)$ a z věty o jednoznačn. $f=a_0$ na G. ∎

Věta (o odstranitelné izolované singularitě)

Nechť f je holomorfní fce na $P(z_0,R)$. PNTJE:

① Existuje holomorfní fce F na $U(z_0,R)$ tak, že $F=f$ na $P(z_0,R)$.

② $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ (konečná)

③ Ex. $r>0$ tak, aby f byla omezená na $P(z_0,r)$

Dk: ① ⇒ ② ⇒ ③ jasné

③ ⇒ ①: Položme $g(z)=(z-z_0)^2 f(z)$, $z\in P(z_0,R)$
$=0$, $z=z_0$

Potom $g(z_0)=0$ a $g'(z_0)= \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} =$

$= \lim_{z\to z_0} (z-z_0) \cdot \underbrace{f(z)}_{\text{omez.}} = 0$

Tedy g je holomorfní na $U(z_0,R)$ a $g(z)=\sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z\in U(z_0,R)$

1. a 2. koef. nulový!

Tedy $\cancel{(z-z_0)^2} f(z) = \cancel{(z-z_0)^2} \underbrace{\left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-2}\right)}_{\text{konverg. } F(z):=}$, $z\neq z_0$

je holomorfní na $U(z_0,R)$. ∎

Úmluva: Odstranitelná singularita je vždy odstraněna.

$\boxed{\text{Riemann. sféra}}$

Def: Definujeme $\$$ jako jednobodovou kompaktifikaci $\mathbb{C}$, tzn. $\$ = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ a definujeme okolí ∞ následovně: $P(\infty,\varepsilon) := \{z\in\mathbb{C}: |z|>\frac{1}{\varepsilon}\}$, $\varepsilon>0$,

$U(\infty,\varepsilon) := P(\infty,\varepsilon)\cup\{\infty\}$, $\varepsilon>0$,

Pozn.: $\mathbb{C}$ ... Gaussova rovina, $\$$ ... Rieman. sféra

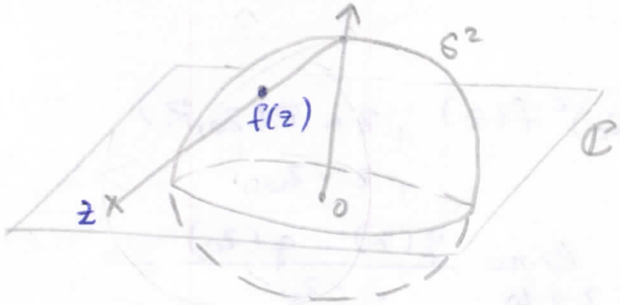
Def: Nechť $z_0, L \in \hat{\mathbb{C}}$. Potom $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$, pokud

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : z \in P(z_0, \delta) \Rightarrow f(z) \in U(L, \varepsilon)$.

Vlastnosti $\hat{\mathbb{C}}$ (Veselý kap. 1,2 – 1,3)

(1.) $\hat{\mathbb{C}}$ je homeomorfní s $S^2 := \{[\alpha, \beta, \gamma] \in \mathbb{R}^3 : \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\}$, spec. $\hat{\mathbb{C}}$ je kompaktní.

⌈Náznak důkazu: stereografická projekce



$N = [0,0,1]$ … severní pól S^2

$f : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\}$

$f(\infty) := N$

je homeomorf. $\hat{\mathbb{C}}$ na S^2. ⌋

(2.) $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

$\iff \lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$

$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)$, má-li aspoň jedna strana smysl.

[přímo z definice]

(3.) Počítání s ∞:

Definujeme: $\forall a \in \mathbb{C} : a \pm \infty = \infty, \ \frac{a}{\infty} = 0$

$\forall a \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} : a \cdot \infty = \infty, \ \frac{a}{0} = \infty$

Nedefinujeme: $\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Potom v $\hat{\mathbb{C}}$ platí aritmetika limit.

Izolované singularity

Def: Nechť f je holomorfní fce na $P(z_0, r)$. Potom izolov. sing. z_0 fce f se nazývá

① **odstranitelná**, pokud $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$,

② **pól**, —11— $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

③ **podstatná**, pokud $\lim_{z \to z_0} f(z)$ neexistuje

Věta (o pólu) Fce f má v $z_0 \in \mathbb{C}$ pól, právě když ex. jediné $p \in \mathbb{N}$ a ex. nenulová holomorfní fce g na jistém $U(z_0, r)$ taková, že

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p}, \quad z \in P(z_0, r).$$

Takové p se nazývá **násobnost pólu** z_0 fce f.

Dk: $\Leftarrow$ jasné

$\Rightarrow$ Nechť $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Potom $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, neboli $\frac{1}{f}$ má v z_0 odstranitelnou singularitu. Fce $\frac{1}{f}$ má v z_0 nulový bod násobnosti $p \in \mathbb{N}$. Tedy ex. nenulová holomorf. fce h na $U(z_0, r)$ tak, že $\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^p \cdot h(z)$

Stačí položit $g(z) := \frac{1}{h(z)}$. ∎

Věta (Casorati – Weierstrass. o podst. sing.)

Nechť f je holom. fce na $P(z_0, r)$. PNTJE

① z_0 je podst. sing. f

② $\forall \delta > 0 : \overline{f(P(z_0, \delta))} = \mathbb{C}$ ... hustá podmnožina $\mathbb{C}$

Pozn.: ③ $\forall \delta > 0 : \mathbb{C} \setminus f(P(z_0, \delta))$ je nejvýše jednobodová (**Velká Picardova věta**)

Dk: (2.) $\Rightarrow$ (1.) : jasné!

(1.) $\Rightarrow$ (2.) nepřímo: nechť $\delta>0$ je takové, že

$\underbrace{\mathbb{C}\setminus\overline{f(P(z_0,\delta))}}_{\text{ot.}}\neq\emptyset$ a f je holomorfní na $P(z_0,\delta)$.

Volme $U(u_0,\beta)\subset\mathbb{C}\setminus\overline{f(P(z_0,\delta))}$.

Speciálně máme, že $0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-u_0|\geq\beta$.

Položme $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-u_0}$, $z\in P(z_0,\delta)$.

Potom g je holom. a $|g|\leq\frac{1}{\beta}$ na $P(z_0,\delta)$,

potom ale g má v z_0 odstran. sing.

a $L:=\lim\limits_{z\to z_0} g(z)\in\mathbb{C}$.

Potom $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=u_0+\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{g(z)}=\begin{cases}\in\mathbb{C}, & \text{je-li } L\neq 0\\ \infty, & \text{je-li } L=0.\end{cases}$ $\boxtimes$

Laurentovy řady

Nechť $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\subset\mathbb{C}$ a $z_0\in\mathbb{C}$. Potom

$$(L)\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n}_{(H)}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n}_{(R)}$$

se nazývá Laurent. řada s koef. $\{a_n\}$ a středem z_0.

Potom (H) je tzv. hlavní část (L) a (R) je tzv. regulární část (R).

Řekneme, že (L) konv., pokud konvergují (H) i (R).

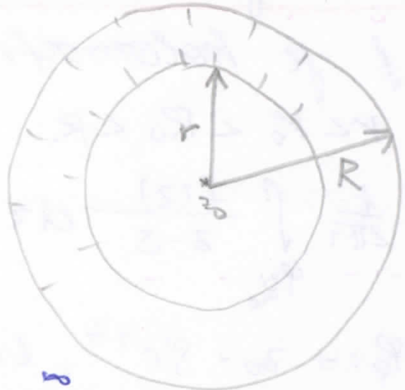
Př.: $\exp\left(\frac{1}{z}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Vlastnosti (L):

(1.) Existují jediné $r,R\in[0,\infty]$ takové, že

(a) řada (R) konv. abs. a lokál. stejnoměrně $|z-z_0|<R$ a diverguje $|z-z_0|>R$;

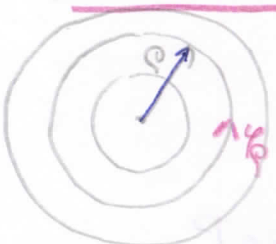
(b) řada (H) konv. abs. a lokál. stejn. na $|z-z_0|>r$ a diverguje $|z-z_0|<r$.



<u>Dk:</u> Číslo R je poloměr konvergence mocninné řady (R). Pro $w = \frac{1}{z-z_0}$ je (H) rovna mocninné řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$.
Číslo $\frac{1}{r}$ je poloměr konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$.
konvence $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$

(2.) Nechť $0 \le r < R \le +\infty$. Potom součet (L), který označím f, je holomorfní fce na mezikruží $P(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$

<u>Lemma:</u> Nechť f je holomorfní fce na $P(z_0, r, R)$.



$\forall \rho \in (r, R)$ polož $\varphi_\rho(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$
a $J(\rho) := \int_{\varphi_\rho} f$

Potom J je konstantní na (r, R)

<u>Dk:</u> Nechť $\rho \in (r, R)$. BÚNO $z_0 = 0$. Potom
$J(\rho) = i \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) \rho e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} g(\rho e^{it}) dt$, kde $g(z) := f(z) \cdot z$

Potom $J'(\rho) = \frac{i}{\rho} \int_0^{2\pi} g'(\rho e^{it}) \rho e^{it} dt = \frac{1}{\rho} \int_{\varphi_\rho} g' = 0$ ∎
má PF g.

<u>Věta (o Laurent. rozvoji holom. fce na mezikruží)</u>

Nechť f je holomorfní fce na $P := P(z_0, r, R)$. Potom ex. jediná Laurent. řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, která má na P součet f.

Věta (Cauchyův vzorec na mezikruží)

Nechť f je holomorfní fce na $P := P(z_0, r, R)$.
Nechť $r < r_0 < R_0 < R$. Je-li $s \in P(z_0, r_0, R_0)$, potom

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z)}{z-s}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z)}{z-s}\, dz,$$

kde $\varphi_\rho := z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (*)

Dk: Nechť $s \in P(z_0, r_0, R_0)$. Položme $h(z) := \frac{f(z)-f(s)}{z-s}$, $z \neq s$

$:= f'(s)$, $z = s$.

$h(z)$ má odstranit. sing.!
Tedy h je holomorfní na P a víme, že

$$\int_{\varphi_{R_0}} h = \int_{\varphi_{R_0}} \frac{f(z)\,dz}{z-s} - f(s) \underbrace{\int_{\varphi_{R_0}} \frac{dz}{z-s}}_{2\pi i \cdot \operatorname{ind}_{\varphi_{R_0}} s = 2\pi i}$$

Lemma ||

$$\int_{\varphi_{r_0}} h = \int_{\varphi_{r_0}} \frac{f(z)\,dz}{z-s} - f(s) \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{ind}_{\varphi_{r_0}} s.$$

Dk věty o Laurentovu rozvoji hol. fce:

Jednoznačnost: Nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z \in P$.
Nechť $m \in \mathbb{Z}$. Potom pro lib. $\rho \in (r, R)$ je

$$\int_{\varphi_\rho} f(z)(z-z_0)^{-(m+1)}\,dz = \int_{\varphi_\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-m-1}\,dz =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\varphi_\rho} (z-z_0)^{n-m-1}\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi i \cdot \operatorname{ind}_{\varphi_\rho} z_0 = 2\pi i, & \text{pro } n = m \end{cases}$$

$$= 2\pi i\, a_m$$

kde φ_ρ je def. jako v (*).
Máme, že $\forall m \in \mathbb{Z}$ $\forall \rho \in (r, R)$:

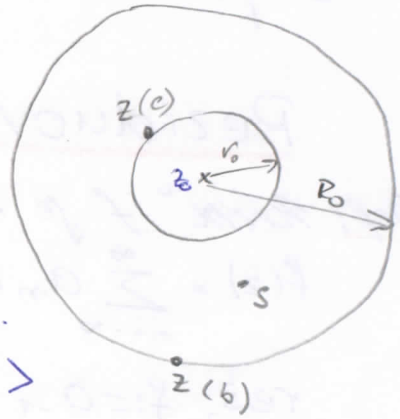
$$\boxed{a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{m+1}}}$$

Existence: nechť $r<r_0<R_0<R$ a $s\in P(z_0,r_0,R_0)$.

Potom máme (a) Cauchyův vzorec:

$$f(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{R_0}}\frac{f(z)\,dz}{z-s}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{r_0}}\frac{f(z)\,dz}{z-s}$$

(b) $$\frac{1}{z-s}=\frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{s-z_0}{z-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$ konv. stejnoměrně pro $z\in\langle\varphi_{R_0}\rangle$



(c) $$\frac{1}{z-s}=\frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)}=-\frac{1}{(s-z_0)}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}}$$ konv. stejnom. pro $z\in\langle\varphi_{r_0}\rangle$

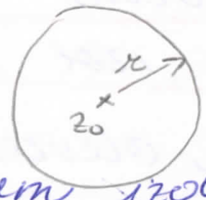
Dosadíme rozvoje (b), (c) do (a). Dostaneme, že

$$f(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{R_0}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}f(z)\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{r_0}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}}f(z)\,dz$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(s-z_0)^n\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{R_0}}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz}_{a_n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(s-z_0)^{n+1}}\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{r_0}}(z-z_0)^n f(z)\,dz}_{a_n}$$

$\blacksquare$

Pozn: $P(z_0,r)=P(z_0,0,r)$



Věta: (o Laurent. rozvoji kolem izolované singularity) nechť f je holomorfní fce na $P(z_0,r)$ a ~~$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)$~~ $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, $z\in P(z_0,r)$. Potom izol. singul. z_0 fce f je

1. odstranitelná $\iff a_n=0\ \forall n<0$,
2. pól násobnosti p $\iff$ $a_{-p}\neq 0$ a $a_n=0\ \forall n<-p$
3. podstatná $\iff a_n\neq 0$ pro nekonečně mnoho $n<0$.

Dk: ① jasné

② Ex. nenulová holom. fce $h(z)$ na $U(z_0, \tilde{r})$ tak,

že $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-z_0)^p} = \dfrac{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1(z-z_0) + \ldots +}{(z-z_0)^p} =$

$= \dfrac{\tilde{a}_0 \neq 0}{(z-z_0)^p} + \dfrac{\tilde{a}_1}{(z-z_0)^{p-1}} + \ldots\ldots ;\ a_{m-p} = \tilde{a}_m$.

③ poslední možnost (z trichotomie) ∎

Reziduové věty

Def: Nechť f je holomorfní fce na $P(z_0, r)$ a $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z \in P(z_0, r)$. Potom číslo

$\operatorname{res}_{z_0} f := a_{-1}$ se nazývá reziduum f v z_0.

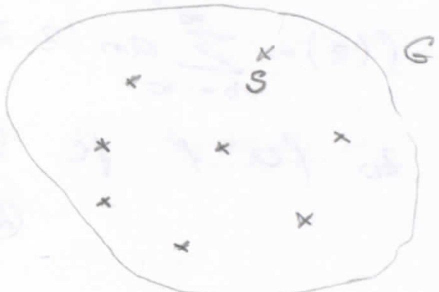
Připomenutí: Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitě konvexní oblast a φ je uzavřená křivka v G. Nechť f je holomorfní fce v G. Potom $\int_\varphi f = 0$ (Cauch. V.)

Otázka: Co se stane, pokud má f v G konečně mnoho izolov. singularit?

Věta 1 (o rozkladu holomorfní fce s konečně mnoha izol. singularitami)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, M je konečná množina v G a f je holomorfní fce na $G \setminus M$. Potom ex. jediná holomorfní fce h na G taková, že

$f = h + \sum_{s \in M} H_s$ na $G \setminus M$, kde



H_s je součet hlavních částí Laurent. rozvoje f kolem s.

Důkaz: Víme, že H_s je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{s\}$.
Položme $h := f - \sum_{s\in M} H_s$. Potom h je holomorfní fce na $G\setminus M$ a v bodech z M má odstranitelné singularity: Nechť $s_0 \in M$. Potom na jistém $P(s_0, r)$ je $f(z) = H_{s_0}(z) + R_{s_0}(z)$, kde R_{s_0} je součet reg. části Laurent. rozvoje f kolem s_0, kdežto R_{s_0} je holom. na $U(s_0, r)$. Potom na $P(s_0, r)$ je

PROČ?

$$h(z) = \underbrace{R_{s_0}(z) - \sum_{s\neq s_0} H_s(z)}_{\text{holomorf. na okolí } s_0},$$ tj. s_0 je odstranit. sing. h. ☒

Věta (Reziduová)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězd. konvexní oblast a φ je uzavřená křivka v G.$^{(*)}$ Nechť f je holomorfní fce na $G\setminus M$.

Potom $\int_\varphi f = 2\pi i \cdot \sum_{s\in M} \operatorname{res}_s f \cdot \operatorname{ind}_\varphi s$.

(*) Nechť M je konečná množina v $G\setminus\langle\varphi\rangle$

Dk: Podle předchozí věty ex. holomorfní fce h na G taková, že $f = \sum_{s\in M} H_s + h$ na $G\setminus M$.

Potom $\int_\varphi f = \sum_{s\in M} \int_\varphi H_s$, protože $\int_\varphi h = 0$ z Cauchy. věty

Pro každé $s \in M$ máme

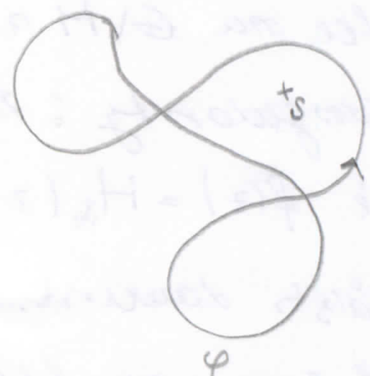
$$\int_\varphi H_s(z)\,dz = \int_\varphi \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^s (z-s)^n\,dz = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^s \underbrace{\int_\varphi (z-s)^n\,dz}_{\substack{0 \\ n\neq -1}\quad 2\pi i\,\operatorname{ind}_\varphi s} =$$

$$= 2\pi i \cdot \operatorname{res}_s f \cdot \operatorname{ind}_\varphi s.$$ ☒

Význam indexu

Připomeň: Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je uzavřená (reg.) a $s \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Potom

$$\operatorname{ind}_\varphi s \overset{\text{def.}}{:=} \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z-s} .$$



BÚNO: $s = 0$

Polární vyjádření:

víme: $0 \neq z = |z| \cdot e^{i\theta} = e^{\Phi}$,

kde $\theta \in \operatorname{Arg}(z)$, $\Phi = \log|z| + i\theta \in \operatorname{Log} z$

$$0 \neq \varphi(t) = |\varphi(t)| \cdot e^{i\theta(t)} = e^{\phi(t)}$$

$(\phi : [a,b] \to \mathbb{C})$

Definice: Řekneme, že $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ je jednoznačná větev (j.v.) argumentu (logaritmu) spojité křivky $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pokud je θ (Φ) spojitá na $[a,b]$ a $\forall t \in [a,b]$: $\theta(t) \in \operatorname{Arg}(\varphi(t))$ $(\theta(t) \in \operatorname{Log}(\varphi(t)))$

Pozn: Pro každou spojitou křivku φ, $0 \notin \langle\varphi\rangle$ ex. jednoznačná větev argumentu i logaritmu. Dokážeme si to jen pro regulární křivky.

Lemma: Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je spojitá křivka.

Potom

① Φ je j.v. logaritmu φ, právě když $\operatorname{Re} \phi = \log|\varphi|$ a $\operatorname{Im} \phi$ je j.v. argumentu φ;

② jsou-li θ_1, θ_2 j.v. argumentu φ, potom ex. $k \in \mathbb{Z}$ tak, že $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$.

Dk: ① jasné z definic

② $\forall t \in [a,b]$ $\exists k(t) \in \mathbb{Z}$: $\theta_2(t) = \theta_1(t) + 2k(t)\pi$

máme $k : [a,b] \to \mathbb{Z}$ je spojitá, tudíž k je konstantní.

Věta (o existenci j.v. logaritmu)

Nechť $\varphi: [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ je <u>regulární</u> křivka. Potom ex. j.v. Φ logaritmu φ a platí, že

$$\int_\varphi \frac{dz}{z} = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Navíc ~~m~~ máme $\operatorname{Im}\Phi$ je j.v. argumentu φ.

Důkaz: Hledáme spoj. Φ takovou, že $\varphi = e^{\Phi}$.

Zřejmě je $\int_\varphi \frac{dz}{z} = \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt$.

Položme $\Phi_0(t) := \int_a^t \frac{\varphi'}{\varphi}$, $t \in [a,b]$. Zřejmě Φ_0 je spojitá na $[a,b]$ a $\Phi_0' = \frac{\varphi'}{\varphi}$ na $[a,b]$ vyjma konečně mnoha bodů. Dále $(\varphi \cdot e^{-\Phi_0})' = (\varphi' - \Phi_0'\varphi)e^{-\Phi_0} = 0$ — || —, tudíž $\varphi \cdot e^{-\Phi_0}$ je konst. na $[a,b]$.

Ex. $c \in \mathbb{C}$ takové, že $\varphi e^{-\Phi_0} = e^c$. Stačí položit $\Phi := \Phi_0 + c$. ∎

Věta (o významu indexu)

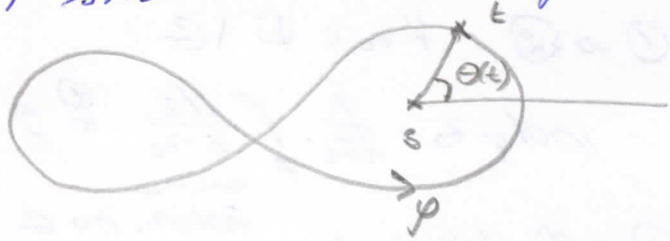
Nechť $\varphi: [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ je uzavřená (reg.) a nechť ~~Φ~~ Θ je j.v. argumentu φ. Potom

$$\operatorname{ind}_\varphi 0 = \frac{1}{2\pi}\left(\Theta(b) - \Theta(a)\right). \quad (*)$$

Speciálně, máme, že $\operatorname{ind}_\varphi 0 \in \mathbb{Z}$.

Pozn: (i) Nechť $s \in \mathbb{C}$ a nechť $\varphi: [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{s\}$ je <u>uzavřená</u> kř. Potom $\operatorname{ind}_\varphi s = \operatorname{ind}_{\varphi_0} 0$, kde $\varphi_0 := \varphi - s$.

(ii) Z $(*)$ je jasné, že $\operatorname{ind}_\varphi s$ = kolikrát se φ otočí kolem s proti směru hodinových ručiček.



(iii) $\mathrm{Ind}_\varphi s$ lze definovat pro spoj. uzavřen. křivky φ, $s \notin \langle\varphi\rangle$. Pro $s=0$ se vztah $(*)$ vezme za definici $\mathrm{ind}_\varphi 0$.

Důkaz: Podle předchozí věty ex. j.v. ϕ logaritmu φ a platí, že $\mathrm{ind}_\varphi 0 := \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}(\phi(b) - \phi(a))$.

Protože $\mathrm{Re}\,\phi(b) = \log|\varphi(b)| = \log|\varphi(a)| = \mathrm{Re}\,\phi(a)$, máme, že $\mathrm{ind}_\varphi 0 = \frac{1}{2\pi i}\, i\,(\mathrm{Im}\,\phi(b) - \mathrm{Im}\,\phi(a)) =$

$= \frac{1}{2\pi}(\Theta(b) - \Theta(a))$. ∎

Obecné Cauchyho věty (informativně)

Věta 1: Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená. NTJE:

① $\int_\varphi f = 0$ pro každ. uzavřenou kř. φ v G a každ. holomorf. fce f na G;

② $\$ \setminus G$ je souvislý.

Def: Řekneme, že oblast $G \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá, pokud $\$ \setminus G$ je souvislá.

Věta 2: Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je obl. a nechť φ je uzavř. křivka v G. NTJE:

① $\int_\varphi f = 0$ pro každou holomorfní fci f na G,

② $\forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$: $\mathrm{ind}_\varphi z_0 = 0$

Dk: ① ⇒ ②: $\forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$:

$$\mathrm{ind}_\varphi z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \underbrace{\frac{dz}{z - z_0}}_{\text{holom. na } G} \overset{①}{=} 0.$$

② ⇒ ① těžké! ∎

Def: nechť φ je uzavřená křivka v $\mathbb{C}$. Položme

$\operatorname{Int}\varphi := \{ z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle : \operatorname{ind}_\varphi z_0 \neq 0 \}$ … vnitřek φ,

$\operatorname{Ext}\varphi := \{ \quad$ —''— $\quad = 0 \}$ …. vnějšík φ.

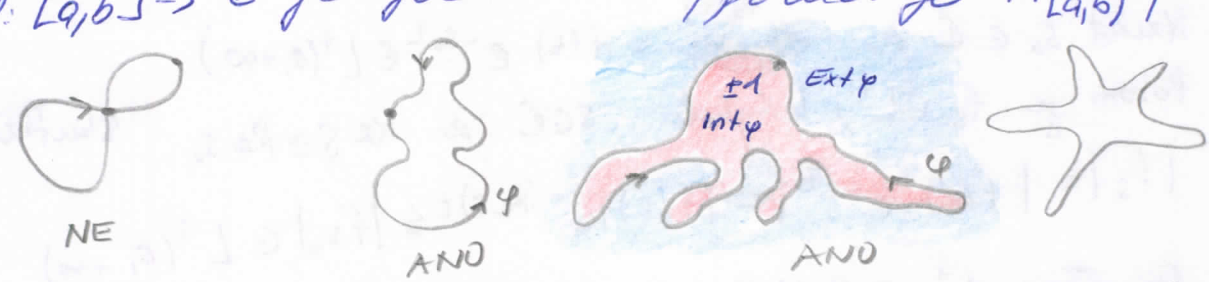
Pozn: Podm. ② z Věty 2 znamená, že $\operatorname{Int}\varphi \subset G$.

Př. Pozor: nechť $\varphi_0(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ a nechť

$\varphi := \varphi_0 \dot{-} \varphi_0$. Potom $\operatorname{Int}\varphi = \emptyset$.

Jordanovy křivky

Def: Řekneme, že uzavřená spojitá křivka $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je Jordanova, pokud je $\varphi|_{[a,b)}$ prostá.



Jordanova věta: nechť φ je Jordanova křivka v $\mathbb{C}$. Potom $\operatorname{Int}\varphi$ a $\operatorname{Ext}\varphi$ jsou oblasti

a $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle = \operatorname{Int}\varphi \cup \operatorname{Ext}\varphi$.

navíc buď $\operatorname{ind}_\varphi s = 1 \quad \forall t \in \operatorname{Int}\varphi$

nebo $\operatorname{ind}_\varphi s = -1 \quad$ —''—

Pozn: Věty 1,2 platí, i když φ je cyklus. Cyklus φ je konečný systém uzavřených křivek $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Definujeme:

$$\int_\varphi f := \sum_{j=1}^{n} \int_{\varphi_j} f,$$

$$\operatorname{ind}_\varphi z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z - z_0}, \quad z_0 \notin \langle\varphi\rangle = \bigcup_{j=1}^{n} \langle\varphi_j\rangle$$

$\operatorname{Int}\varphi = \dots\dots$

$\operatorname{Ext}\varphi = \dots\dots$

udKAZO

(ii) Reziduová věta platí, i když φ je cyklus a předpoklad, že G je hvězd. konvex., nahradíme podmínkou ① z Věty 1 nebo 2.

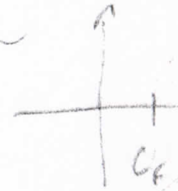
LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Definice Nechť f je komplexní funkce na $[0, +\infty)$.
Potom se její Laplaceova transformace definuje
$$(\mathcal{L}f)(s) := \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} \, dt$$ pro každé $s \in \mathbb{C}$, pro které má integrál rozumný smysl.

Absolutní konvergence

Nechť $s_0 \in \mathbb{C}$ a $f_{s_0}(t) := f(t)\, e^{-s_0 t} \in L^1(0, +\infty)$.
Potom je $f_s \in L^1$, kdykoli $s \in \mathbb{C}$ a $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0$. Skutečně, máme
$$|f_s| = |f(t)\, e^{-st}| = |f(t)| e^{-(\operatorname{Re} s) t} \leq |f_{s_0}| \in L^1(0, +\infty)$$

Označme $L^1_+ := \{ f \mid \exists s \in \mathbb{C} : f_s \in L^1(0, +\infty) \}$,
$A_f := \{ s \in \mathbb{C} \mid f_s \in L^1(0, +\infty) \}$ ... obor abs. konv. $\mathcal{L}f$ a
$c_f = \inf \{ \operatorname{Re} s \mid s \in A_f \}$ ... mez abs. konv. $\mathcal{L}f$.



A_f Zřejmě je buď $A_f := \{ s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > c_f \}$
nebo $\geq$

Př. Pro $f(t) = e^{t^2}$ je $c_f = +\infty$, $A_f = \emptyset$
$= e^{-t^2}$ $\quad = -\infty \quad = \mathbb{C}$
$= e^{at}$ $\quad = \operatorname{Re} a \quad >$
$= \frac{e^{at}}{1+t^2}$ $\quad = \operatorname{Re} a \quad \geq$

Př] $\mathcal{L}(e^{at})(s) = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}\,dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{(a-s)}\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}(e^{\pm it})(s) = \frac{1}{s \mp i}$, $\operatorname{Re} s > 0$ $\qquad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$

$\mathcal{L}(\cos t)(s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(e^{it}) + \mathcal{L}(e^{-it})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+i} + \frac{1}{s-i}\right) = \frac{s}{s^2+1}$

$\mathcal{L}(\sin t)(s) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right) = \frac{1}{s^2+1}$

Aplikace Řešení ODR a PDR

Př] $y'' + y = 2e^t$, $1 = y(0)$, $y'(0) = 2$ $\quad (*)$

Za jistých předpokladů platí, že

(i) $\mathcal{L}(f')(s) = s\,\mathcal{L}(f) - f(0)$.

Máme, že $\int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st}\,dt = \underbrace{\left[f(t)e^{-st}\right]_{t=0}^{t=+\infty}}_{-f(0)} + s\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt$.

(ii) $\mathcal{L}(f'') = s\,\mathcal{L}(f') - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$

Označme $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$. Užijeme LT na $(*)$ a dostaneme, že

$Y(s) + s^2 Y(s) - s - 2 = 2 \cdot \frac{1}{s-1}$

$(s^2+1)Y(s) = \frac{2}{s-1} + s + 2 = \frac{s^2+s}{s-1}$

$Y(s) = \frac{s^2+s+1-1}{(s^2+1)(s-1)} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2+1}$

$y(t) = e^t + \sin t$, což je řešení $(*)$, jak snadno ověříme

Základní vlastnosti

(i) $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ je holomorfní fce na $\operatorname{Re} s > c_f$ a platí tam, že $(\mathcal{L}f)^{(k)}(s) = (-1)^k \mathcal{L}(t^k f(t))$ pro $k = 1, 2, \dots$

⌈ Skutečně pro $s = x + iy$ máme, že

$\frac{\partial}{\partial x} F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)(-t)\,e^{-(x+iy)t}\,dt$

$\frac{\partial}{\partial y} F(s) = i\int_0^{+\infty} f(t)(-t)\,e^{-(x+iy)t}\,dt$ $\qquad$ z CR vět je $F' = \frac{\partial F}{\partial x}$

$f(t)\,e^{-(s-\varepsilon)t}$

$\varepsilon > 0$, $\operatorname{Re} s - \varepsilon > c_f$

$\underbrace{(-t)\,e^{-\varepsilon t}}$ omezená ⌋

UdFA21

(ii) Nechť $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^k([0,+\infty))$ a $f^{(k)} \in L^1_+$.

Potom $\mathcal{L}(f^{(k)})(s) = s^k \cdot \mathcal{L}(f) - s^{k-1} f(0) - \dots - f^{(k-1)}(0)$ na $A_{f^{(k)}}$

⌈Podobně jako v předchozím Př⌋

(iii) $\mathcal{L}$ je lineární, tzn. $\forall f, g \in L^1_+$ $\forall a \in \mathbb{C}$:

$\mathcal{L}(af+g) = a\mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$ na $A_f \cap A_g$.

(iv) Nechť $f, g \in L^1_+$. ~~Definujeme~~ Definujeme jejich konvoluci následovně:

$f * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) \cdot g(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0.$

Potom $f * g \in L^1_+$ a $\mathcal{L}(f*g) = (\mathcal{L}f) \cdot (\mathcal{L}g)$ na $A_f \cap A_g$

⌈Skutečně máme

$$\int_0^{+\infty} (f*g)(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^t f(t-\tau)\, e^{-s(t-\tau)} \cdot g(\tau) \cdot e^{s\tau} d\tau \Big) dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} g(\tau)\, e^{s\tau} \underbrace{\Big(\int_\tau^{+\infty} f(t-\tau) \cdot e^{-s(t-\tau)}\, dt \Big)}_{(\mathcal{L}f)(s)} d\tau = (\mathcal{L}g)(s)\, \mathcal{L}(f)(s)$$ ■

snad?

Fourierova transformace

Pro $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ definujeme

$\hat{f}(v) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(u)\, e^{i(u,v)}\, du$ ... přímá Fourierova transf. (sk. souč.)

$\check{f}(v) = \int_{\mathbb{R}^m} f(u)\, e^{-(u,v)}\, du$ ... inverzní/opačná FOT

kde $(u,v) = u_1 v_1 + \dots + u_m v_m$

Platí: (i) $\check{f}(v) = (2\pi)^m \hat{f}(-v)$

(ii) $(\check{f})^\wedge = f$ s.v., pokud $f, \check{f} \in L^1(\mathbb{R}^m)$

(tzv. věta o inverzi pro FT)

Inverzní Laplaceova transformace

Nechť $f \in L^1_+$, $F := \mathcal{L}f$ a $f = 0$ na $(-\infty, 0)$

Nechť $s \in A_f$. Potom pro $s = x + iy$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-(x+iy)t} dt = \int_0^{+\infty} \underbrace{\left(f(t) e^{-xt}\right)}_{g(t) :=} \cdot e^{-iyt} dt = \hat{g}(y)$$

ZÁVĚR: $(\mathcal{L}f)(x+iy) = \left(f(t) e^{-xt}\right)^{\vee}(y)$

FORMÁLNĚ: Máme, že $f(t) e^{-xt} = g(t) \overset{(\ldots)}{=} (\check{g})^{\wedge}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+iy) e^{iyt} dy =$

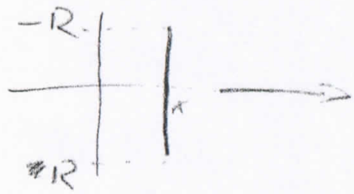
$$= \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} F(x+iy) e^{iyt} dy \text{, neboli}$$

$$f(t) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} F(x+iy) \cdot e^{(x+iy)t} dy. \quad = \left(\mathcal{L}_x^{-1} F\right)(t)$$

$s = x + iy$, $y \in [-R, R]$

$ds = i\,dy$

Definice $\left(\mathcal{L}_x^{-1} F\right)(t) = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{[x-iR,\, x+iR]} F(s) e^{st} ds.$



PŘEDNÁŠKA N

Laplaceova transformace

Def. Pro komplex. fci f na $[0, +\infty)$ definujeme
$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$ pro každé $s \in \mathbb{C}$, pro které má integrál smysl.

Označení: $L^1_+ = \{f \mid \exists s \in \mathbb{C} : f_s(t) = f(t) e^{-st} \in L^1(0, +\infty)\}$

$A_f := \{s \in \mathbb{C} \mid f_s \in L^1(0, +\infty)\}$

$c_f := \inf \{\operatorname{Re} s \mid s \in A_f\}$,

Víme $A_f = \{\operatorname{Re} s \geq c_f\}$ nebo $\{\operatorname{Re} s > c_f\}$

UdKA22

Laplaceova transformace

Def: Pro komplexní fci f na $[0,+\infty)$ definujeme
$(\mathcal{L}f)(s) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$ pro každé $s \in \mathbb{C}$, pro které má integrál smysl.

Označení: • $L^1_{+} := \{ f \mid \exists s \in \mathbb{C} : f_s(t) := f(t)e^{-st} \in L^1(0,+\infty)\}$

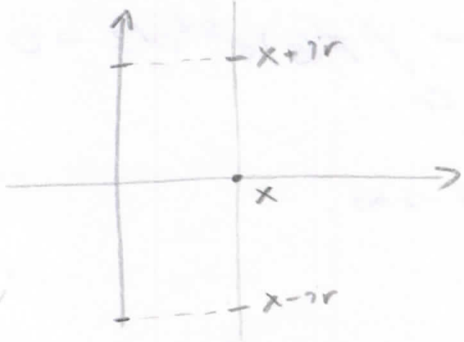
• $A_f := \{ s \in \mathbb{C} \mid f_s \in L^1(0,\infty)\}$

• $c_f := \inf \{ \operatorname{Re} s \mid s \in A_f \}$

Víme: $A_f = \{\operatorname{Re} s \geq c_f\}$ nebo $\{\operatorname{Re} s > c_f\}$

Problém: Jak najdeme f, pokud známe $\mathcal{L}f$?

Def: (Inverzní Laplaceova transformace): Nechť F je komplex. fce na přímce $\operatorname{Re} s = x \in \mathbb{R}$. Potom definujeme $(\mathcal{L}_x^{-1}F)(t) := \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-ir}^{x+ir} F(s)e^{st}\,ds$



pro každé $t \in \mathbb{R}$, pro které má výraz vpravo smysl.

Věta (o inverzi k LT): Nechť $f \in L^1_+$, $F = \mathcal{L}f$ a $x \in \mathbb{R} \cap A_f$.
Položme $f = 0$ na $(-\infty, 0)$.
Nechť f má v $\mathbb{R}$ lokálně konečnou variaci.
Potom pro každé $t \in \mathbb{R}$ je
$(\mathcal{L}_x^{-1}F)(t) = f(t)$, je-li f spoj. v t;
$= \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-))$.

Dk: viz KOPÁČEK, Mat. pro fyziky, skripta MFFUK.

$$= \frac{t e^{st}(s+i)^2 - e^{st} \cdot 2(s+i)}{(s+i)^4}\Big|_{s=i} = e^{it} \frac{t \cdot 2i - 2}{(2i)^3} = \frac{e^{it}}{4i}(1-it)$$

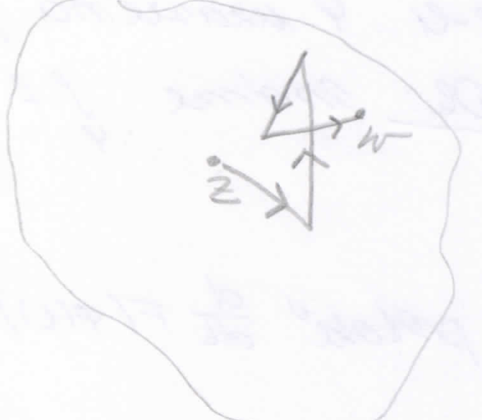
$$\operatorname{res}_{s=-i}\left(Y(s)e^{st}\right) = \dots = -\frac{e^{-it}}{4i}(1+it).$$

Dostaneme, že $y(t) = (\mathcal{L}^{-1}Y)(t) = \frac{1}{2}(\sin t) - \frac{t}{2}\cos(t)$, což je řešením (R), jak snadno ověříme.

Dk: $\Rightarrow$ jasné

$\Leftarrow$ Nechť $z, w \in G$.

Potom ex. lomená čára φ v G, která začíná v z a končí v w. Potom



$$\int_\varphi f' = \int_\varphi 0 = 0.$$

f' má prim. fci f na G.

$$f(w) - f(z) = \int_\varphi f' = 0.$$

Důsledek: Jsou-li F_1, F_2 primit. fce k fci f na oblasti $G \subset \mathbb{C}$, potom ex. $c \in \mathbb{C}$ taková, že

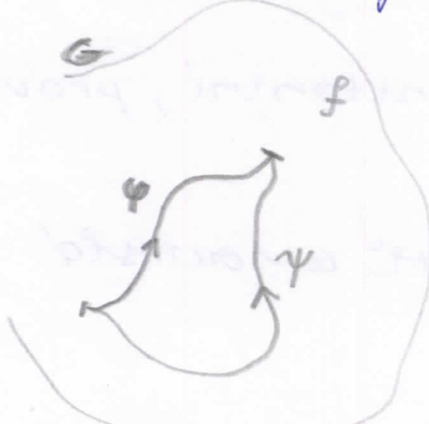
$$F_2 = F_1 + c \text{ na } G.$$

$\ulcorner (F_2 - F_1)' = f - f = 0$ na $G \lrcorner$

Věta (o existenci prim. fce)

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je spojitá na G. Pak NTJE:

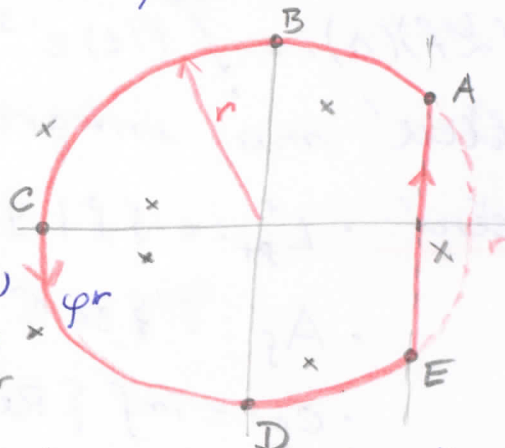
1. Fce f má prim. fci na G
2. Pro každou uzavřenou křivku φ v G je $\int_\varphi f = 0$.
3. křivkový integrál z f na G nezávisí na křivce, tzn. jsou-li $\varphi: [\alpha, \beta] \to G$, $\psi: [\gamma, \sigma] \to G$ křivky a $\varphi(\alpha) = \psi(\gamma)$, $\varphi(\beta) = \psi(\sigma)$, potom $\int_\varphi f = \int_\psi f$.



Věta (o výpočtu inverzní LT pomocí reziduí)

Nechť F je holomorfní fce na $\mathbb{C}\setminus K$ kde K je konečná. Nechť $x \in (0,+\infty)$ taková, že $K \subset \{\mathrm{Re}\, s < x\}$

nechť $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$.



Potom

$$(*) \quad (\mathcal{L}_x^{-1}F)(t) = \sum_{z\in K} \mathrm{res}_{s=z}\left(F(s)e^{st}\right), \quad t>0 \text{ parametr}$$

Dk: Nechť $r > x$

a nechť φ^r je uzavřená křivka procházející body ABCDE jako na obrázku. Podle reziduové věty pro r dost velké máme, že

$$2\pi i \cdot \sum_{z\in K} \mathrm{res}_{s=z}\left(F(s)e^{st}\right) \overset{R.V.}{=} \int_{\varphi_r} F(s)e^{st}\,ds = \int_{[E,A]} \ldots\ldots + \int_{C_r} \ldots\ldots$$

kde C_r je oblouk takový, že $\varphi_r = [E,A] + C_r$.

Pro $r\to\infty$ dostaneme $(*)$, protože $\int_{C_r} F(s)e^{st}\,ds \to 0$ pro $r\to\infty$.

Dokážeme, že $\int_{C_r} F(s)e^{st}\,ds \to 0$ pro $r \to \infty$.

(i) Jordanovo lemma:

$$\Big|\int_{\substack{BCD\\ \text{oblouk}}} F(s)e^{st}\,ds\Big| \underset{\substack{s=re^{i\theta}\\ \theta\in[\pi/2,\,3\pi/2]\\ ds = ire^{i\theta}d\theta}}{=} \Big|\int_{\pi/2}^{3\pi/2} F(re^{i\theta})e^{tre^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta}\,d\theta\Big| \leq$$

$$\leq \sup_{|s|=r}|F(s)|\cdot r \cdot \underbrace{\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{tr\cos\theta}\,d\theta}_{I:=} \leq \sup_{|s|=r}|F(s)|\cdot \cancel{r}\cdot \frac{\pi}{t\cancel{r}} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

viz níže

$\lim\limits_{s\to 0} F(s) = 0$

$\sup\limits_{|s|=r\to\infty} |F(s)| \to 0$