

6. minitest

Matematika M2 (b), LS 2025/26
30. 3. 2026

Určete matici 2. řádu, jejíž vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 4$ a k nim příslušné vlastní vektory jsou $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Proveďte zkoušku.

1. způsob: Z definice - hledáme matici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

tak, aby: $A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a $A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

tedy: $\begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} a+3b \\ c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{r} a+2b=3 \quad | \cdot (-1) \\ a+3b=4 \quad | \ominus \end{array}$$

$$\boxed{b=1} \quad \boxed{a=1}$$

$$\begin{array}{r} c+2d=6 \quad | \cdot (-1) \\ c+3d=12 \quad | \ominus \end{array}$$

$$\boxed{d=6} \quad \boxed{c=-6}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}}$$

2. způsob: Ve tvaru rozkladu $A = C \cdot B \cdot C^{-1}$,
kde B má na diagonále vlastní čísla
a C má ve sloupcích vlastní vektory.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Zkouška: $A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$