8. minitest

Matematika M2 (b), LS 2025/26

13. 4. 2026

Určete řešení diferenciální rovnice

$$y'' - y = 4x\,e^x$$

$\alpha = 1$
$\beta = 0$

s počátečními podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$. Proveďte zkoušku.

1) $y'' - y = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm 1$

F.S. e^x, e^{-x}

$y_H = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2) $y_P = (Ax + B) \cdot e^x \cdot x^1$

neboť $\alpha \pm i\beta = 1$ je kořen char. polynomu násobnosti 1

$y_P = (Ax^2 + Bx) \cdot e^x$

$y_P' = (2Ax + B) \cdot e^x + (Ax^2 + Bx) e^x$

$= (Ax^2 + 2Ax + Bx + B) \cdot e^x$

$y_P'' = (2Ax + 2A + B) \cdot e^x + (Ax^2 + 2Ax + Bx + B) \cdot e^x$

$= (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B) e^x$

Dosazení y_P do rovnice:

$y_P'' - y_P = e^x \cdot \left(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B - (Ax^2 + Bx)\right) = 4x \cdot e^x \quad / : e^x$

$\underline{4Ax} + 2A + 2B = \underline{4x} \implies 4A = 4$

$\boxed{A = 1}$

$2A + 2B = 0$

$A = -B$

$\boxed{B = -1}$

obecné řešení: $\boxed{y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} + (x^2 - x) e^x}$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$y = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{-x} + (x^2 - x) \cdot e^x$$

$$y(0) = c_1 + c_2 + 0 = 1$$

$$y' = c_1 e^x - c_2 \cdot e^{-x} + (2x-1) e^x + (x^2 - x) e^x$$

$$y'(0) = c_1 - c_2 - 1 = 0$$

$$c_1 + c_2 = 1$$
$$c_1 - c_2 = 1$$

$$2c_1 = 2$$

$$\boxed{c_1 = 1}$$

$$\boxed{c_2 = 0}$$

Řešení: $\boxed{y = e^x + (x^2 - x) e^x = e^x (x^2 - x + 1)}$

Zkouška: $y(0) = e^0 \cdot (0^2 - 0 + 1) = 1$ ✓

$$y' = e^x (x^2 - x + 1) + e^x (2x - 1) = e^x (x^2 + x)$$

$$y'(0) = e^0 \cdot (0^2 - 0) = 0 \quad ✓$$

$$y'' - y = e^x \cdot (x^2 + x) + e^x (2x + 1) - e^x \cdot (x^2 - x + 1)$$
$$= e^x \cdot (\cancel{x^2} + x + 2x \cancel{+1} \cancel{-x^2} + x \cancel{-1}) = e^x \cdot 4x \quad ✓$$