Písemka pro cvičení z MA3 dne 6.11.2014

1.

(a) Ukažte, že rovnicí

$$\sin(x+y+z) \quad = \quad e^{x^2-y^2} \tag{1}$$

je na nějakém okolí bodu $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0)$ jednoznačně určen graf funkce ξ takové, že trojice $(\xi(y,z), y, z)$ řeší zadanou rovnici (1) pro (y, z) z nějakého okolí bodu (y_0, z_0).

(b) Dokažte, že ξ má diferenciál v bodě (y_0, z_0) a vyšetřete, čemu se rovná.

2. Funkce $f : G \to \mathrm{R}$ je definována předpisem $f(x, y, z) = x + 3y - z$, kde $G = \{(x, y, z) \in \mathrm{R} : x^2 + 4y^2 + 9z^2 < 1\}$.

(a) Vyšetřete, čemu se rovná $\sup\{f(x,y,z) : (x,y,z) \in G\}$ a $\inf\{f(x,y,z) : (x,y,z) \in G\}$.

(b) Vyšetřete, zda funkce f nabývá na svém definičním oboru $\max\{f(x,y,z) : (x,y,z) \in G\}$, resp. $\min\{f(x,y,z) : (x,y,z) \in G\}$.

(c) * Vyšetřete obor hodnot funkce f.

Domácí úlohu z implicitních funkcí, resp. z extrémů může nahradit řešení první, resp. druhé úlohy bez části (c) s nejvýš drobným nedostatkem. Při vyřešení všech úloh včetně ohvězdičkované je možné získat navíc 1 bonusový bod.

Početní část

Výpočet pište tak, aby bylo jasné, jakých vět a faktů používáte. Užité věty z přednášky není nutno formulovat, ale je třeba ověřit jejich předpoklady.

Příklad 1 Dokažte, že existují funkce $t(x,y)$, $z(x,y)$, pro které $t(1,1) = 1$, $z(1,1) = 0$, a které na nějakém okolí U bodu $(1,1)$ splňují rovnice

$$z + y = t^3, \qquad t + z = x$$

a jsou na U třídy C^2.

Spočtěte

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1).$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete. Srozumitelně (výpočtem) ověřte předpoklady věty, kterou užíváte.
(6 bodů)

Příklad 2
Nechť

$$M := \{(x,y) : \ 0 \le y \le x\} \quad \text{a} \quad f(x,y) = (x+y)\, e^{-(x+2y)}.$$

Spočtěte $S := \sup_{t \in M} \ f(t)$.
Podrobně a srozumitelně zdůvodněte. Předpoklady použitých vět srozumitelně ověřte výpočtem.
(7 bodů)

Příklad 3 Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = n \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Svůj postup podrobně a srozumitelně vysvětlete.
(3 body)

Příklad 4 Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' + \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} x,$$

pro která $y(1) = \frac{\pi}{4}$. Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(4 body)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25*** **(17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13*** **(8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30*** **(20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5*** **(4)** bodů z důkazové úlohy D2.

Početní část

Výpočet pište tak, aby bylo jasné, jakých vět a faktů používáte. Užité věty z přednášky není nutno formulovat, ale je třeba ověřit jejich předpoklady.

Příklad 1 Nechť

$$M := \{(x, y, z) : \ x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 40\} \quad \text{a} \quad f(x, y, z) = x + y - z.$$

Spočtěte $S := \sup_{t \in M} \ f(t)$ a $I := \inf_{t \in M} \ f(t)$. Podrobně zdůvodněte. Předpoklady užitých vět ověřte výpočtem.
(6 bodů)

Příklad 2 Nechť f je funkce třídy C^2 na $G = (0, \infty) \times (0, \infty)$ a splňuje na G rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Transformujte tuto rovnici do polárních souřadnic. Nejdříve napište, na jaké množině a jak je nová funkce (např. $f^*(r, \varphi)$) definovaná a potom odvoďte rovnici, kterou tato funkce splňuje. Nejdříve transformujte levou stranu (jen za to jsou 3 body); při odvození této části pište rovnice v nezkráceném tvaru, tj. i s body, ve kterých se parciální derivace vyčíslují.
(7 bodů)

Příklad 3 Najděte (na $\mathbb{R}$) maximální řešení soustavy

$$y_1' = 2y_1 + 2y_2, \quad y_2' = 3y_1 + y_2,$$

pro která $y_1(0) = -1$ a $y_2(0) = 4$.
(3 body)

Příklad 4 Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2 + 1}{x^2 + n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(4 body)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5* (4)** bodů z důkazové úlohy D2.

Teoretická část

Úloha A (2 + 2 + 1 body)

(a) Napište znění Taylorovy věty s Lagrangeovým tvarem zbytku pro funkce více proměnných. Taylorův polynom definujte. Diferenciál vyššího řádu nemusíte definovat, ale napište jeho vyjádření pomocí parciálních derivací.

(b) Definujte pojem úplného a kompaktního metrického prostoru. (Pojem cauchyovské posloupnosti definujte.)

(c) Srozumitelně definujte wronskián.

Úloha B Uvažujme diferenciální rovnici

$$y'' + y\cos x - \operatorname{sgn} x = 0.$$

Dokažte, že existuje řešení $y(x)$ této rovnice, pro které platí $y'(1) = 2y(1)$. Obecné tvrzení (část věty) z přednášky, které používáte, přesně zformulujte a jasně vysvětlete, jak je užíváte.
(4 body)

Úloha C Zformulujte lemma o pozitivně definitních kvadratických formách, které se podstatně užívá při důkazu věty o lokálních extrémech. Toto lemma podrobně a srozumitelně dokažte. Lemmata (tvrzení, věty) z 3. semestru, která užíváte, přesně zformulujte bez důkazu.
(4 body)

Úloha D1 Zformulujte (1b) a dokažte Diniho větu o konvergenci spojitých funkcí.
(5 bodů)

Úloha D2 Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, posloupnost $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ reálných funkcí konverguje stejnoměrně na (a, b) k funkci f a posloupnost derivací (f'_n) konverguje stejnoměrně na (a, b). Dokažte, že pak f má vlastní derivaci na (a, b). Lemmata (tvrzení, věty), která užíváte, přesně zformulujte bez důkazu. (Nesmíte ovšem použít žádnou větu o derivaci limitní funkce, jde o to, abyste ukázali, že znáte důkaz druhé části této věty.)
(7 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5* (4)** bodů z důkazové úlohy D2.

Teoretická část

Úloha A (2 + 2 + 1 body)

(a) Napište znění věty o existenci a jednoznačnosti pro lineární diferenciální rovnici n-tého řádu se spojitými koeficienty.

(b) Napište znění Dirichletova a Abelova kritéria pro stejnoměrnou konvergenci řad. (Podmínky „stejné omezenosti“ napište pomocí kvantifikátorů.)

(c) Definujte pojmy silnější a slabší metriky.

Úloha B Spočtěte

$$\lim_{x\to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n/x)}{2^n}.$$

Napište znění vět z 3. semestru, které používáte, a podrobně vysvětlete, jak je používáte.
(4 body)

Úloha C Podrobně a srozumitelně dokažte, že rovnost $e^{x+y} = e^x\, e^y$ platí i v komplexním oboru. Věty (tvrzení, lemmata), které používáte, zformulujte bez důkazu. Všechny použité pojmy ze 3. semestru plně definujte.
(4 body)

Úloha D1 Zformulujte větu o implicitní funkci (s jednou vazbovou funkcí) (1b.). Pak podrobně a srozumitelně proveďte první část důkazu této věty (tj. dokažte tvrzení o existenci a jednoznačnosti implicitní funkce). Spojitost ani hladkost nedokazujte.
(5 bodů)

Úloha D2 Zformulujte (1 b.) a podrobně dokažte Taylorovu větu s Peanovým tvarem zbytku pro funkce více proměnných. Věty (tvrzení, lemmata) ze 3. semestru, které používáte, zformulujte bez důkazu.
(7 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25*** **(17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13*** **(8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30*** **(20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5*** **(4)** bodů z důkazové úlohy D2.

Početní část

Výpočet pište tak, aby bylo jasné, jakých vět a faktů používáte. Není-li to výslovně v zadání požadováno, použité věty z přednášky není nutno formulovat, ale je třeba ověřit jejich předpoklady.

Příklad 1 Vyšetřete, zda řada funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{6n})$$

a) konverguje stejnoměrně na $(0,1)$;
b) konverguje lokálně stejnoměrně na $(0,1)$.
Napište znění vět (tvrzení) ze 3. semestru, která používáte. Splnění předpokladů podrobně ověřte výpočtem.
(7 bodů)

Příklad 2 Nechť

$$M := \{(x,y,z) : \; x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4\} \quad \text{a} \quad f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z^2.$$

Spočtěte $S := \sup_{t \in M} \; f(t)$ a $I := \inf_{t \in M} \; f(t)$. Podrobně zdůvodněte. Předpoklady užitých vět ověřte výpočtem.
(7 bodů)

Příklad 3 Nechť f je funkce třídy C^2 na $G = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 9, \; x > 0\}$ a splňuje na G rovnici

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Transformujte tuto rovnici do polárních souřadnic. Nejdříve napište, na jaké množině a jak je nová funkce (např. $f^*(r,\varphi)$) definovaná a potom odvoďte rovnici (v co nejjednodušším tvaru), kterou tato nová funkce splňuje. Aspoň první rovnost s parciálními derivacemi napište v nezkráceném tvaru.
(3 body)

Příklad 4 Uvažujme diferenciální rovnici

$$(R) \qquad y'' - 2y' + 5y = 3xe^x \cos 2x.$$

a) Najděte tvar obecného reálného řešení příslušné homogenní rovnice a nalezněte všechna řešení y homogenní rovnice, pro která $y(0) = 3$ a $y(\pi/4) = 1$. (1,5 bodu)
b) V jakém tvaru je možno podle věty z přednášky nalézt reálné partikulární řešení rovnice (R) (se 4 neurčitými koeficienty)? (1,5 bodu)

K tomu, aby následovala ústní zkouška, na které je možno získat příslušnou známku, stačí získat:

na hodnocení **dobře**....19* bodů z obou částí dohromady;

na hodnocení **velmi dobře**....25* (18; 4* z úlohy D1 nebo D2);

na hodnocení **výborně**.....30* (20; 5*(4) z úlohy D2).

Teoretická část

Úloha A (2 + 2 +2 +1 bod)

(a) Napište znění věty o implicitních funkcích (případ více vazbových funkcí).

(b) Napište znění Picardovy věty o diferenciálních rovnicích. Použité pojmy ze 3. semestru definujte.

(c) Napište znění věty o střední hodnotě pro funkce více proměnných.

(d) Definujte pojem regulárního zobrazení.

Úloha B Dokažte, že funkce

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$$

má derivaci v bodě 5. Napište znění vět ze 3. semestru, které používáte, a podrobně vysvětlete, jak je používáte.
(4 body)

Úloha C1 Podrobně a srozumitelně dokažte, že každý kompaktní metrický prostor je úplný. Všechny použité pojmy ze 3. semestru plně definujte.
(4 body)

Úloha C2 Zformulujte a podrobně dokažte Weierstrassovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci. Věty (tvrzení) z 3. semestru, které používáte, zformulujte bez důkazu.
(3 body)

Úloha D1 Zformulujte (1 bod) a podrobně dokažte Moore-Osgoodovu větu o záměně limit. Věty (tvrzení) z 3. semestru, které používáte, zformulujte bez důkazu.
(5 bodů)

Úloha D2 Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, posloupnost $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ reálných funkcí konverguje stejnoměrně na (a, b) k funkci f a posloupnost derivací (f_n') konverguje stejnoměrně na (a, b). Dokažte, že pak f má vlastní derivaci na (a, b). Lemmata (tvrzení, věty), která užíváte, přesně zformulujte bez důkazu. (Nesmíte ovšem použít žádnou větu o derivaci limitní funkce, jde o to, abyste ukázali, že znáte důkaz druhé části této věty.)
(7 bodů)

(Body z C1 a C2 se nesčítají, počítá se lepší varianta; totéž platí pro D1 a D2.)

K tomu, aby následovala ústní zkouška, na které je možno získat příslušnou známku, stačí získat:

na hodnocení **dobře**....19* bodů z obou částí dohromady;

na hodnocení **velmi dobře**....25* (18; 4* z úlohy D1 nebo D2);

na hodnocení **výborně**.....30* (20; 5*(4) z úlohy D2).