Náhodné vektory

1) Na oslavě narozenin budeme platit za hosty cenu X za jídlo a Y za nápoje (v tisících Kč).
Náhodný vektor (X,Y) má sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} c\cdot(x+y), & x,y \in [-1,1]^2 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

---

a) Určete konstantu c.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 c(x+y)\,dx\,dy = c\cdot\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_0^1 dy$$

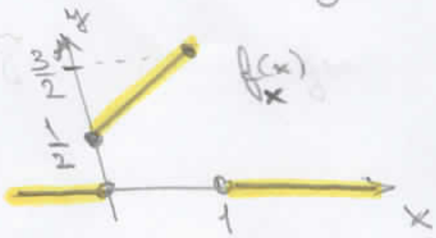
$$= c\cdot\int_0^1 \left(\frac{1}{2}+y\right) dy = c\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{2}y+\frac{y^2}{2}\right]_0^1}_{1} = c$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \iff c=1$$

b) Určete marginální hustoty veličin X a Y.

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_0^1 (x+y)\,dy = \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x+\frac{1}{2}$$

tedy $f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2}, & x \in \langle 0,1\rangle \\ 0, & x \notin \langle 0,1\rangle \end{cases}$



$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \dots = y+\frac{1}{2} \quad \text{analogicky}$$

tedy $f_Y(y) = \begin{cases} y+\frac{1}{2}, & y \in \langle 0,1\rangle \\ 0, & y \notin \langle 0,1\rangle \end{cases}$

c) Jsou veličiny X, Y nezávislé?

$$\underbrace{f(x,y)}_{x+y} \overset{?}{=} \underbrace{f_X(x)}_{(x+\frac{1}{2})} \cdot \underbrace{f_Y(y)}_{(y+\frac{1}{2})}$$

$$x+y \neq \left(x+\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(y+\tfrac{1}{2}\right)$$

Ne, veličiny X, Y jsou závislé.

d) Vypočtěte jejich kovarianci a kovarianční matici.

- $EX = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{2}x\right)dx =$

$= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \underline{\underline{\frac{7}{12}}}$

- $EX^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(x^3+\frac{1}{2}x^2\right)dx$

$= \left[\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{6} = \frac{6+4}{24} = \frac{10}{24} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}}$

- $\operatorname{var}X = EX^2-(EX)^2 = \frac{5}{12}-\left(\frac{7}{12}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{11}{12}}}$

(analogicky: $EY = \frac{7}{12}$, $\operatorname{var}Y = \frac{11}{12}$)

- $E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy\,(f(x,y))\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy$

$= \int_0^1\int_0^1 \left(x^2y+xy^2\right)dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}y+\frac{x^2}{2}y^2\right]_0^1 dy$

$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}y^2\right)dy = \left[\frac{1}{3}\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

kovariance $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - EX\cdot EY =$

$$= \frac{1}{3} - \frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12} = \frac{48-49}{144} = \underline{\underline{-\frac{1}{144}}}$$

kovarianční matice:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{cov}(X,X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(Y,X) & \operatorname{cov}(Y,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{12} & -\frac{1}{144} \\ -\frac{1}{144} & \frac{11}{12} \end{pmatrix}$$

korelace: $\operatorname{corr}(X,Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}X}\cdot\sqrt{\operatorname{var}Y}} = \dfrac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{12}}\cdot\sqrt{\frac{11}{12}}} = \underline{\underline{-\frac{1}{11}}}$

kovariance je záporná, tedy čím více zaplatíme za jídlo (X), tím méně zaplatíme za nápoje (Y) a naopak.

e) Jaká je pravděpodobnost, že za nápoje zaplatíme více než dvojnásobek toho co za jídlo?

$$P[Y > 2X] = \iint_{\{y>2x\}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{2x}^{1} (x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=2x}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2} - \left(x\cdot 2x + \frac{(2x)^2}{2}\right)\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2} - 4x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x - 4\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3+6-4}{24}$$

$$= \underline{\underline{\frac{5}{24}}}$$

2) Dvojice součástek má dobu životnosti popsanou sdruženou hustotou $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x-\frac{1}{2}y} & , x,y > 0 \\ 0 & , \text{jinak} \end{cases}$

(např. v letech)

a) Jaké je rozdělení dob životností jednotlivých součástek?

Marginální hustota n.v. X: $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy =$

$$\overset{x>0}{=} \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-x-\frac{1}{2}y}\,dy = \left[-e^{-x-\frac{1}{2}y}\right]_0^\infty = \underbrace{\lim_{y\to\infty}\left(-e^{-x-\frac{1}{2}y}\right)}_{=0} -$$

$$-\left(-e^{-x}\right) = 0 - \left(-e^{-x}\right) = e^{-x}$$

tedy $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$

$X \sim Exp(1)$

tzn. průměrná doba životnosti X první součástky je 1 (rok)

Marginální hustota n.v. Y: $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx =$

$$\overset{y>0}{=} \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-x-\frac{1}{2}y}\,dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x-\frac{1}{2}y}\right]_0^\infty = \underbrace{\lim_{x\to\infty}(\quad)}_{0} - \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y}\right)$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y}\right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y}$$

tedy $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y} & , y > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$Y \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right)$

tzn. průměrná doba životnosti Y druhé součástky je 2 roky

b) Jsou doby životnosti X, Y nezávislé?

$$f(x,y) \stackrel{?}{=} f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

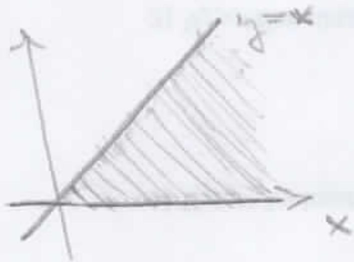
$$\frac{1}{2} e^{-x-\frac{1}{2}y} = e^{-x}\cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y}$$

Ano, jsou nezávislé.

Proto $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$

c) Jaká je pravděpodobnost, že první součástka přežije druhou?

$$P[X > Y] = \iint\limits_{\{x>y\}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\infty \int_0^x \frac{1}{2} e^{-x-\frac{1}{2}y}\,dy\,dx$$



$$= \int_0^\infty \left[-e^{-x-\frac{1}{2}y}\right]_0^x dx =$$

$$= \int_0^\infty \left(-e^{-\frac{3}{2}x} + e^{-x}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}x} - e^{-x}\right]_0^\infty = \underbrace{\lim_{x\to\infty}(\quad)}_{0} - \left(\frac{2}{3} e^{0} - e^{0}\right)$$

$$= 0 - \left(\frac{2}{3} - 1\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

3) Náhodný vektor (X,Y) má sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} 3\sqrt{x}\, y & , x,y \in [0,1]^2 \\ 0 & , \text{jinak} \end{cases}$$

---

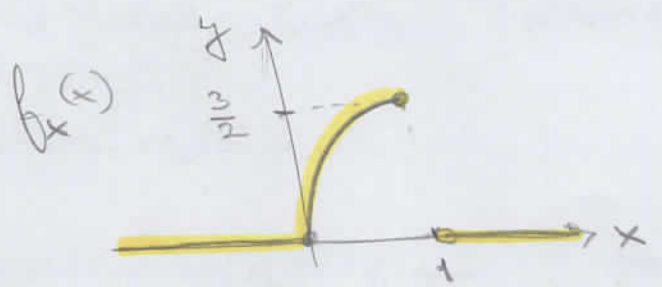
a) Určete marginální hustoty veličin X a Y.

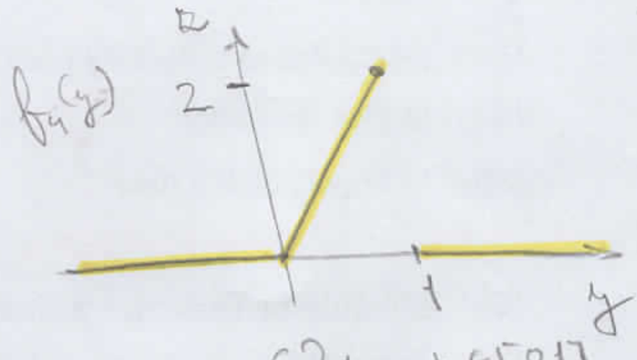
$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy = \int_0^1 3\sqrt{x}\, y\, dy = 3\sqrt{x} \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 3\sqrt{x} \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \quad \text{pro } x \in [0,1]$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx = \int_0^1 3\sqrt{x}\, y\, dx = 3y \cdot \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= 3y \cdot \frac{2}{3} \cdot (1-0) = 2y \quad \text{pro } y \in [0,1]$$





$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} & , x \in [0,1] \\ 0 & , x \notin [0,1] \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 2y & , y \in [0,1] \\ 0 & , y \notin [0,1] \end{cases}$$

b) Rozhodněte, zda jsou veličiny X, Y nezávislé.

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$3\sqrt{x}\, y = \frac{3}{2}\sqrt{x} \cdot 2y$$

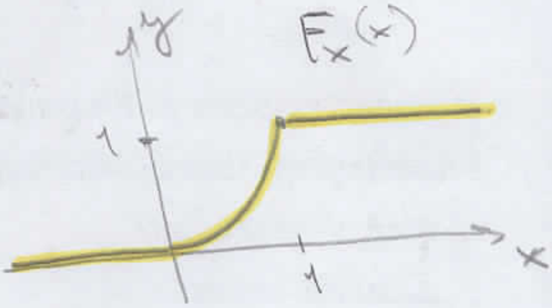
Ano, jsou nezávislé, proto $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$

c) Určete marginální i sdruženou distribuční funkci.

$$F_X(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \overset{x>0}{=} \int_0^x \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^x = x^{\frac{3}{2}} \quad \text{pro } x \in [0,1]$$

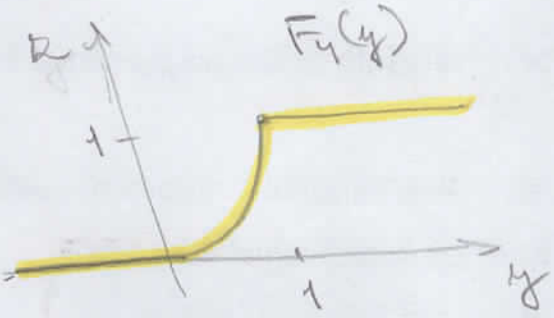
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x^{\frac{3}{2}} & , x \in [0,1] \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$$



$$F_Y(y) = P[Y \le y] = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt \overset{y>0}{=} \int_0^y 2t\,dt =$$

$$= \left[t^2 \right]_0^y = y^2 \quad \text{pro } y \in [0,1]$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ y^2 & , y \in [0,1] \\ 1 & , y > 1 \end{cases}$$



Veličiny X, Y jsou nezávislé, proto sdružená distribuční funkce je součinem marginálních

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = x^{\frac{3}{2}} \cdot y^2 \quad \text{pro } x,y \in [0,1]^2$$

d) Sestavte kovarianční matici.

<u>střední hodnoty</u>:

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2} \cdot \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot (1-0) = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$$

$$EY = \int_{\mathbb{R}} y f(y)\,dy = \int_0^1 y \cdot 2y\,dy = 2 \cdot \int_0^1 y^2\,dy =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{0}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

2. <u>centrální momenty</u>:

$$EX^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2} \cdot \int_0^1 x^{\frac{5}{2}}\,dx$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \right]_0^1 = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{7} \cdot (1-0) = \underline{\underline{\frac{3}{7}}}$$

$$EY^2 = \int_{\mathbb{R}} y^2 f(y)\,dy = \int_0^1 y^2 \cdot 2y\,dy = 2 \cdot \int_0^1 y^3\,dy =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{0}{4} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Rozptyly: $\quad \mathrm{var} X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{3}{7} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{12}{175}}}$

$\quad \mathrm{var} Y = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{18}}}$

<u>Kovarianční matice</u>: $\begin{pmatrix} \mathrm{var} X & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(X,Y) & \mathrm{var} Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{175} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$

4) Pojišťovna prodává zákonné ručení a havarijní automobilové pojištění.
Nechť X označuje procento smluv za zákonné ručení,
Y procento smluv za havarijní pojištění,
které budou obnoveny na konci jejich období.
Náhodný vektor (X,Y) má sdruženou distribuční funkci $F(x,y) = \frac{xy(x+y)}{2000\,000}$ pro $x,y \in [0,100]^2$

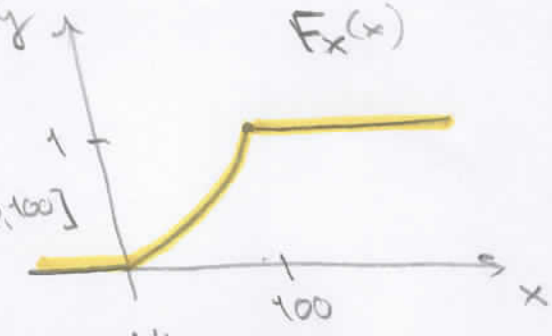
---

a) Určete marginální hustoty a distribuční funkce X a Y.

$F(x,y) = P[(X<x) \wedge (Y<y)]$

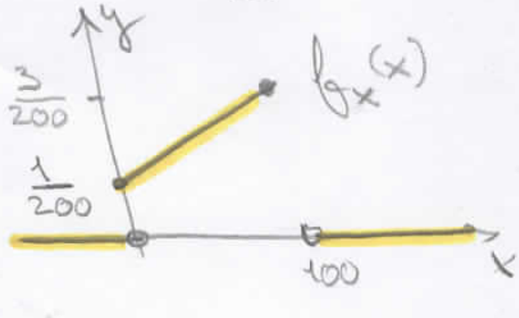
proto $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = F(x,100) = \frac{x\cdot 100\,(x+100)}{2000\,000}$

tedy $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \frac{1}{20\,000}\cdot x(x+100) & , x\in[0,100] \\ 1 & , x>100 \end{cases}$



hustota: $f_X(x) = F_X'(x) =$

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{20\,000}(2x+100) & , x\in[0,100] \\ 0 & , x\notin[0,100] \end{cases}$



analogicky $F_Y(y)$, $f_Y(y)$

b) Jsou X, Y nezávislé?

$$F(x,y) \stackrel{?}{=} F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

$$\frac{xy(x+y)}{2000\,000} \neq \frac{x\cdot 100(x+100)}{2000\,000} \cdot \frac{y\cdot 100(y+100)}{2000\,000}$$

nejsou nezávislé

c) Určete sdruženou hustotu.

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2000000} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y + x y^2\right)}_{2xy + y^2}\Big)$$

$$= \frac{1}{2000\,000} \cdot (2x+2y) = \frac{1}{1000\,000} \cdot (x+y)$$

pro $(x,y) \in [0,100]^2$

d) Vypočtěte var X!

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_0^{100} x \cdot \frac{x+50}{10\,000}\,dx = \frac{1}{10000} \cdot \int_0^{100} (x^2 + 50x)$$

$$= \frac{1}{10\,000} \cdot \left[\frac{x^3}{3} + 50 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^{100} = \frac{1}{10\,000} \cdot \left(\frac{100^3}{3} + 25 \cdot 100^2\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{10\,000}} \cdot \cancel{100^2} \cdot \left(\frac{100}{3} + 25\right) = \frac{175}{3}$$

$$EX^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{100} x^2 \cdot \frac{x+50}{10\,000}\,dx = \dots = \frac{125\,000\,000}{3}$$

$$\operatorname{var} X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{125}{3} \cdot 10^6 - \left(\frac{175}{3}\right)^2$$

5) Náhodný vektor (X,Y) je dán tabulkou:

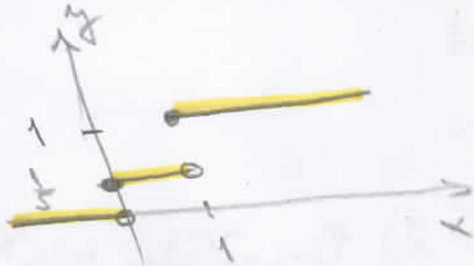
$X \backslash Y$	2	4	5
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{5}$
0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$

Určete marginální rozdělení veličin X,Y a jejich distribuční funkce. Určete střední hodnoty, rozptyly, kovarianci a rozhodněte, zda X,Y jsou nezávislé.

$$P[X=1] = \frac{2}{15} + \frac{7}{15} + \frac{1}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$P[X=0] = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$F_X(x) = P[X \le x] = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \frac{1}{5} & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , x \ge 1 \end{cases}$$

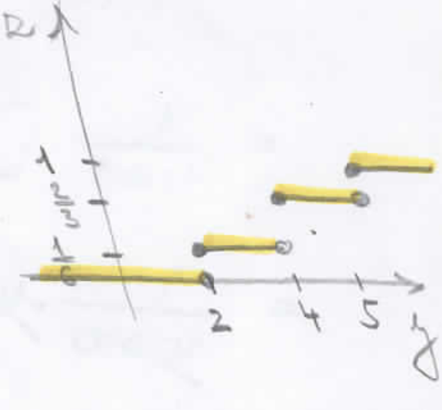


$$P[Y=2] = \frac{2}{15} + \frac{1}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

$$P[Y=4] = \frac{7}{15} + \frac{1}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$P[Y=5] = \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = \begin{cases} 0 & , x<2 \\ \frac{1}{6} & , 2 \le x < 4 \\ \frac{2}{3} & , 4 \le x < 5 \\ 1 & , x \ge 5 \end{cases}$$



X, Y nejsou nezávislé, neboť např.

$$P[(X=1)\wedge(Y=4)] \neq P[X=1]\cdot P[Y=4]$$

$$\frac{4}{15} \qquad\qquad \frac{4}{5} \qquad \frac{1}{2}$$

Střední hodnoty:

$$EX=\sum_{k\in\{0,1\}} k\cdot P[X=k] = 1\cdot\frac{4}{5}+0\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

$$EY=\sum_{k\in\{2,4,5\}} k\cdot P[Y=k] = 2\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{3}=4$$

2. momenty:

$$EX^2=\sum_{k\in\{0,1\}} k^2\cdot P[X=k] = 1^2\cdot\frac{4}{5}+0^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

$$EY^2=\sum_{k\in\{2,4,5\}} k^2\cdot P[Y=k] = 2^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{2}+5^2\cdot\frac{1}{3}=17$$

Rozptyly:

$$\operatorname{var}X = EX^2-(EX)^2=\frac{4}{5}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{20-16}{25}=\frac{4}{25}$$

$$\operatorname{var}Y = EY^2-(EY)^2=17-4^2=1$$

Kovariance:

$$E(XY)=\sum xy\cdot P[(X=x)\wedge(Y=y)] =$$

$$= 1\cdot 2\cdot\frac{2}{15}+1\cdot 4\cdot\frac{7}{15}+1\cdot 5\cdot\frac{1}{5}+0\cdot 2\cdot\frac{1}{30}+0\cdot 4\cdot\frac{1}{30}+0\cdot 5\cdot\frac{2}{15}=\frac{32}{15}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{32}{15}-\frac{4}{5}\cdot 4=-\frac{16}{15}$$