---

**1.** [9b] Je dána rovnice $x' = t - \sqrt{x}$ pro neznámou funkci $x = x(t)$ z $\mathbb{R}$ do $(0, +\infty)$. Řešte následující úlohy, aniž se pokusíte rovnici řešit, tj. vyjádřit obecné řešení pomocí elementárních funkcí. – Můžete „uhodnout" jedno či dvě speciální (např. konstantní) řešení.
(i) Určete množiny bodů $(t, x)$ v polorovině $x > 0$, pro které je $x' = 0$, respektive $x' > 0$, respektive $x' < 0$. (POZOR na ekvivalenci úprav při mocnění nerovností!)
(ii) Totéž pro $x'' = 0$, $x'' > 0$ a $x'' < 0$. (NÁVOD: množinu $x'' = 0$ zkuste vyjádřit jako graf funkce $t = t(x)$.)
(iii) V polorovině $x > 0$ zakreslete množiny $x' = 0$ a $x'' = 0$ a poté načrtněte průběhy několika reprezentativních řešení (obrázek minimálně 10x10 cm).
(iv) Existují řešení, pro něž $x(t) \to +\infty$, kde $t \to T-$, a $T$ je konečné? Odůvodněte odpověď podrobně.
(v) Načrtněte speciálně průběh řešení s počáteční podmínkou $x(-1) = 1$. Co lze říci o pravém maximálním čase existence tohoto řešení?

---

**2.** [5b] Nechť $\varphi = \varphi(t, a, \lambda)$ je řešicí funkce rovnice

$$x' = \frac{x^2 - 1}{1 + \lambda} + \lambda, \qquad x(0) = a$$

(i) Napište rovnici pro $u = \frac{\partial \phi}{\partial a}$;
(ii) Napište rovnici pro $v = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}$;
(iii) Napište rovnici pro $z = \frac{\partial^2 \phi}{\partial a^2}$
(iv) Výše uvedené rovnice napište a též explicitně vyřešte pro $a = -1$, $\lambda = 0$.

---

**3.** [6b]
Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vyhovuje rovnici

$$-(I + A)^{-1} = I - A \tag{*}$$

kde $I$ je jednotková matice.
(i) Co lze říci o spektru matice $A$?
(ii) Vypočítejte (tj. vyjádřete pomocí elementárních funkcí) $e^{tA}$.
(NÁVOD: užitím (*) vyjádřete $A^2$ a potažmo $A^k$ s pomocí $A$ a $I$.)
(iii) Existuje (netriviální) řešení rovnice $x' = Ax$, které je omezené pro $t \in (0, \infty)$?
(iv) Existuje (netriviální) řešení rovnice $x' = Ax$, které je omezené pro $t \in (-\infty, \infty)$? Najděte konkrétní příklad, nebo ukažte, proč to není možné.

# Písemná zkouška z ODR
## 4.1.2017, Termín A

**1.** Uvažujte soustavu $x' = Ax$ s maticí

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Najděte dimenze prostorů $X_+$, $X_-$ a $X_0$ a rozhodněte o stabilitě nulového řešení soustavy.

(b) Najděte všechny počáteční podmínky $x(0)$, pro něž je řešení $x$ soustavy omezené na $[0, +\infty)$.

$\nabla$ (c) Rozhodněte o stabilitě nulového řešení soustavy $x' = Ax - 3x + x^T Axv$, kde $v = (1, 1, 1)^T$.

$Bx + b(x)$

**2.** Buď $\phi(t, \mu, \lambda)$ řešicí funkce soustavy

$$x' = x(y+1) + \lambda t y^2, \qquad x(0) = 0$$
$$y' = (x+1)(y-1), \qquad y(0) = \mu$$

(a) Vypočtěte $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}$ v bodě $(t, 1, 0)$.

(b) Vypočtěte $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}$ v bodě $(t, 1, 0)$.

(c) Napište přibližnou hodnotu $\phi(2, \mu, \lambda)$ a chybu pomocí malého $o$.

**3.** Uvažujte diferenciální rovnici

$$x' = \sin(tx)$$

(a) Určete, ve kterých oblastech roviny $(t, x)$ jsou řešení rostoucí/klesající. Načrtněte tyto oblasti.

(b) Načrtněte řešení rovnice do roviny $(t, x)$ (do zvláštního obrázku).

(c) Je každé maximální řešení definováno na celém R? Svou odpověď dokažte.

**Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.**

$e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e$

# Písemná zkouška z ODR
## 19.1.2017, Termín B

**1.** Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= 2y + xy^2 + x^3 \\ y' &= -2x + y^3 \end{aligned}$$

(a) Vyšetřete stabilitu linearizované soustavy $\binom{x}{y}' = \nabla F(0,0)\binom{x}{y}$. Co dokážete říct o stabilitě nulového řešení pro nelineární soustavu?

(b) Převeďte nelineární soustavu do polárních souřadnic.

(c) Co dokážete říct o stabilitě nulového řešení na základě (b)?

**2.** Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňující $A^2 = -2I$.

(a) Vypočtěte $e^{tA}$ přímo z definice maticové exponenciály.

(b) Vypočtěte $B^2$ a poté stejně jako v (a) exponenciálu $e^{tB}$ pro $B = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$

(c) Rozhodněte o stabilitě/asymptotické stabilitě nulového řešení rovnice $x' = Ax$.

**3.** Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

(a) Vypočtěte první integrál.

(b) Z rovnice pro $x'$ rozhodněte, zda $x$-ová souřadnice řešení může utéct do $+\infty$ v konečném čase.

(c) Rozhodněte, v kterých částech roviny $(x, y)$ je $x$ resp. $y$ rostoucí resp. klesající a poté načrtněte trajektorie řešení (využijte také (a)).

**Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.**

# Písemná zkouška z ODR
## 30.1.2015, Termín C

**1.** Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= y + 2 + x(y+2) \\ y' &= -x - x(y+2) + x^3 \end{aligned}$$

(a) Najděte stacionární body soustavy.

(b) Najděte linearizované soustavy ve stacionárních bodech.

(c) Rozhodněte o stabilitě stacionárních bodů pro **linearizované soustavy**. Co dokážete říct o stabilitě stacionárních bodů původní nelineární soustavy?

**2.** Buď $\phi(t, \lambda, \mu)$ řešicí funkce rovnice

$$x' = t(x^2 + 2x - 3) + \lambda t \sin x, \qquad x(1) = \mu$$

s parametrem $\lambda \in \mathrm{R}$.

(a) Najděte $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}(t, 0, -3)$.

(b) Najděte $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t, 0, -3)$.

(c) Najděte $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mu^2}(t, 0, -3)$.

**3.** Uvažujte soustavu pro $x, y > 0$

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$$
$$y' = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

(a) Vypočtěte první integrál.

(b) Vypočtěte řešení soustavy.

(c) Je nějaké řešení soustavy stabilní?

**Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.**

# Písemná zkouška z ODR
## 19.1.2015, Termín B

**1.** Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2y - 2x\sin^2 y \\ y' &= -5x + ay\cos x \end{aligned}$$

(a) Vyšetřete stabilitu (asymptotickou stabilitu) pro $a > 0$.

(b) Vyšetřete stabilitu (asymptotickou stabilitu) pro $a < 0$.

(c) Pro $a = 0$ najděte ljapunovskou funkci. Co s její pomocí dokážete říct o stabilitě (asymptotické stabilitě)?

**2.** Buď $\phi(t, \mu, \lambda)$ řešicí funkce soustavy

$$\begin{aligned} x' &= x\cos y + y\sin x, & x(0) &= \mu \\ y' &= y + x, & y(0) &= \lambda \end{aligned}$$

(a) Vypočtěte $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}$ v bodě $(t, 0, 0)$.

(b) Vypočtěte $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}$ v bodě $(t, 0, 0)$.

(c) Napište přibližnou hodnotu $\phi(10, \mu, \lambda)$ a chybu pomocí malého $o$.

**3.** Uvažujte diferenciální rovnici

$$x' = tx^3 + xt^3$$

(a) Načrtněte řešení rovnice. Ve kterých oblastech roviny $(t, x)$ je rostoucí/ klesající/ konvexní/ konkávní?

(b) Buď $\tilde{x}$ řešení rovnice s počáteční podmínkou $x(0) = 1$. Dokažte, že pro všechna kladná $t$ platí $\tilde{x}' > t\tilde{x}^3$.

(c) S pomocí odhadu v (b) a Barrowova vzorce ukažte blow-up řešení $\tilde{x}$ a odhadněte shora čas, kdy k němu dojde.

**Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.**

# Písemná zkouška z ODR
## 30.1.2015, Termín C

**1.** Uvažujte soustavu $x' = Ax$ s maticí

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Najděte dimenze prostorů $X_+$, $X_-$ a $X_0$ a rozhodněte o stabilitě nulového řešení soustavy.

(b) Najděte prostory $X_+$, $X_-$ a $X_0$.

(c) Vypočtěte $e^{tA}$.

**2.** Mějme diferenciální rovnici

$$x'' + a(x' + x) + x^2(x' + x) = 0$$

(a) Převeďte na soustavu rovnic prvního řádu a najděte stacionární řešení.

(b) Vyšetřete stabilitu stacionárních řešení pro $a = 4$.

(c) Dokažte stabilitu stacionárního řešení pro $a = 0$ (pomocí ljapunovské funkce).

**3.** Uvažujte soustavu pro $x > 0$

$$x' = 2xy$$
$$y' = 2y(x + y)$$

(a) Vypočtěte první integrál.

(b) Načrtněte do roviny $(x, y)$ řešení procházející bodem $[1, 2]$ (monotonie a konvexita trajektorie, limity v krajních bodech trajektorie).

(c) Pomocí (a) zredukujte soustavu na jednu rovnici prvního řádu a rozhodněte, zda nastane blow-up řešení procházejícího bodem $[1, 2]$.

**Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.**

# Písemná zkouška z ODR
# 2.3.2015, Termín E

**1.** Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= xy^2 + x(x^2+y^2)^2 \\ y' &= -x^2y + x(x^2+y^2)^2. \end{aligned}$$

(a) Vyšetřete stabilitu linearizované soustavy $\binom{x}{y}' = \nabla F(0,0)\binom{x}{y}$. Co dokážete říct o stabilitě nulového řešení pro nelineární soustavu?

(b) Převeďte nelineární soustavu do polárních souřadnic.

(c) Co dokážete říct o stabilitě nulového řešení na základě (b)?

**2.** Uvažujte matice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 6 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^t & 0 & 2e^{-t} - 2e^t \\ -3e^{-t} + 3e^{-t} & e^t & -3e^{-t} + 3e^t \\ -e^{-t} + e^t & 0 & -e^{-t} + 2e^t \end{pmatrix}$$

(a) Vypočtěte $A^2$ a pomocí výsledku ukažte, že $e^{tA} = B(t)$ (nápověda: jaký je Taylorův rozvoj funkce $e^t + e^{-t}$?).

(b) Najděte řešení rovnice $x' = Ax$ s počáteční podmínkou $x(0) = (a,b,c)^T$.

(c) Pomocí (b) najděte stabilní podprostor rovnice $x' = Ax$.

**3.** Na množině $\{(x,y) \in \mathrm{R}^2 : x > 0\}$ uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= \frac{xy^2}{x+1}. \end{aligned}$$

(a) Vypočtěte první integrál a znázorněte do roviny $(x,y)$ trajektorie řešení.

(b) Najděte řešení soustavy pro počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = k$.

(c) Na základě (b) rozhodněte, zda dochází k blow-upu.

**Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.**

# Písemná zkouška z ODR
# 9.2.2015, Termín D

**1.** Buď $\phi(t, \lambda, \mu)$ řešicí funkce rovnice

$$x' = \frac{2}{t}(x-1) + (x-1)^2 + \lambda x^2, \qquad x(2) = \mu$$

s parametrem $\lambda \in \mathrm{R}$.

(a) Najděte $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}(t, 0, 1)$.

(b) Najděte $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t, 0, 1)$.

(c) Najděte $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mu^2}(t, 0, 1)$.

**2.** Mějme matici $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ splňující $A^2 = -A$.

(a) Vypočtěte $e^{tA}$. Přesněji, najděte matice $B$ a $C \in \mathrm{R}^{n\times n}$ takové, že platí $e^{tA} = B + Ce^{-t}$.

(b) S pomocí (a) rozhodněte o stabilitě nulového řešení $x' = Ax$.

(c) Najděte vlastní čísla matice $A$ a s jejich pomocí rozhodněte o stabilitě nulového řešení rovnice $x' = Ax$.

**3.** Uvažujte diferenciální rovnici

$$x' = (x-1)(x^3 + t)$$

(a) Vyznačte v rovině oblasti, kde řešení roste, kde klesá a kde má nulovou derivaci.

(b) Najděte stacionární řešení a rozhodněte, zda se na něj nějaké řešení napojí (zdůvodněte).

(c) Rozhodněte (a zdůvodněte), kolikrát protnou jednotlivá řešení křivky s nulovou derivací a načrtněte grafy řešení.

**Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.**