9 Posloupnosti a řady

9.1 Způsoby zadání posloupnosti

1 V dané posloupnosti závisí n-tý člen a_n na čísle n. Znáte-li několik prvních členů, napište alespoň tři členy další a odhadněte vzorec pro a_n.

a) $4, 8, 12, 16, 20, \dots$
b) $1, 4, 9, 16, 25, \dots$
c) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$
d) $-\frac{1}{27}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, -1, -3, \dots$

2 Zapište vzorcem pro n-tý člen

a) posloupnost všech přirozených sudých čísel,
b) posloupnost všech přirozených lichých čísel,
c) posloupnost všech přirozených čísel dělitelných 11,
d) posloupnost všech přirozených čísel, která při dělení 5 dávají zbytek 1.

3 Posloupnost je dána vzorcem pro n-tý člen. Napište prvních pět členů dané posloupnosti a načrtněte graf.

a) $a_n = 2n + 1$
b) $a_n = n \cdot 2^{-n}$
c) $a_n = (n-1) \cdot n$
d) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$
e) $a_n = n^2 - 5$
f) $a_n = n \cdot (-1)^{n+1}$

4 Posloupnost je dána rekurentně. Vypočítejte prvních šest členů posloupnosti, odhadněte vzorec pro n-tý člen a dokažte jeho správnost.

a) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 4$
b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$
c) $a_1 = -1$, $a_{n+1} = (-1)^{2n+1} a_n + 2$

5 Posloupnost je dána rekurentně. Vypočítejte prvních šest členů posloupnosti, odhadněte vzorec pro n-tý člen a dokažte jeho správnost.

a) $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_{n+1} = \frac{4}{3}(a_n + a_{n-1})$
b) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$
c) $a_1 = -3$, $a_2 = -1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$

9.2 Vlastnosti posloupností

Posloupnost rostoucí, klesající

6 Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou rostoucí, které jsou klesající, které nejsou ani rostoucí ani klesající. Potom svoje tvrzení dokažte.

a) $(n)_{n=1}^{\infty}$
b) $(-2n+3)_{n=1}^{\infty}$
c) $(n^2 + 2n + 4)_{n=1}^{\infty}$
d) $(-n^2 + 4n - 4)_{n=1}^{\infty}$
e) $(\log n)_{n=1}^{\infty}$
f) $(\log_{\frac{1}{2}} n)_{n=1}^{\infty}$
g) $((-1)^n \cdot n)_{n=1}^{\infty}$
h) $\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$

Posloupnost omezená

7 Rozhodněte, zda dané posloupnosti jsou omezené shora, zdola, omezené. Potom svoje tvrzení dokažte.

a) $(n+1)_{n=1}^{\infty}$
b) $\left(-\dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$
c) $(n^2 - 1)_{n=1}^{\infty}$
d) $\left(\dfrac{5n+2}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$
e) $(\sin n)_{n=1}^{\infty}$
f) $\left(\dfrac{n+4}{-n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Limita posloupnosti

8 Vypočítejte limity daných posloupností.
(Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou konvergentní.)

a) $\left(\dfrac{5}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$
b) $(7)_{n=1}^{\infty}$
c) $\left(\dfrac{4n}{3n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$
d) $\left((-1)^n \cdot \dfrac{1}{5n}\right)_{n=1}^{\infty}$
e) $(3^n)_{n=1}^{\infty}$
f) $\left(\dfrac{n^2+4n-1}{2n^2-n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$
g) $(1 + (-1)^n)_{n=1}^{\infty}$
h) $(\sqrt{n+2})_{n=1}^{\infty}$
i) $\left(\dfrac{n^2+4n}{n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$

9.3 Aritmetická, geometrická posloupnost

9 Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou aritmetické, které jsou geometrické. V případě aritmetických posloupností určete diferenci, v případě geometrických posloupností určete kvocient.

a) $\left(\dfrac{n+3}{5}\right)_{n=1}^{\infty}$
b) $(1-n)_{n=1}^{\infty}$
c) $\left(\dfrac{2^n}{3^{n+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$
d) $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

10 Posloupnost je dána rekurentně. Napište několik členů. Rozhodněte, které z uvedených posloupností jsou aritmetické, které jsou geometrické. Posloupnosti zapište vzorcem pro n-tý člen a dokažte jeho správnost.

a) $a_1 = 7$, $a_{n+1} = 2a_n - 3n - 1$
b) $a_1 = 8$, $a_{n+1} = a_n + 4 \cdot 2^n$
c) $a_1 = 5$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = 2(a_n - 3) - a_{n+1}$

11 Dokažte, že daná tři čísla tvoří tři následující členy jisté aritmetické posloupnosti. Určete diferenci.

a) $\log 16, \log 8, \log 4$
b) $\dfrac{1\,999}{2\,000}, \dfrac{2\,999}{2\,000}, \dfrac{3\,999}{2\,000}$
c) $\sin 60°, \sin 0°, \sin(-60°)$
d) $a^2 - 2, (a+1)^2, (a+2)^2$, kde $a \in \mathrm{R}$

12 Dokažte, že daná tři čísla tvoří tři následující členy jisté geometrické posloupnosti. Určete kvocient.

a) $\sqrt{5} - \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5} + \sqrt{2}$
b) $\dfrac{1\,999}{2\,000}, \dfrac{1\,999}{4\,000}, \dfrac{1\,999}{8\,000}$
c) $\sin 2x, \cos x, \frac{1}{2} \operatorname{cotg} x$, kde $x \in (0, \pi)$
d) $b+1, b^2 + 2b + 1, b^3 + 3b^2 + 3b + 1$, kde $b \in \mathrm{R}$

13 Tvoří-li kladná reálná čísla a_1, a_2, a_3 tři následující členy geometrické posloupnosti, potom jejich dekadické logaritmy tvoří tři následující členy aritmetické posloupnosti. Dokažte.

14 Přičteme-li k daným číslům $-6, 2, 26$ reálné číslo x, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete, které číslo musíme přičíst. Potom určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, která takto vznikne.

15 Určete reálné číslo x tak, aby čísla a_1, a_2, a_3 tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti.

a) $a_1 = x^2 + x$, $a_2 = x^2 + 4x + 4$, $a_3 = 16$
b) $a_1 = \log(2x-1)$, $a_2 = \log(4x-2)$, $a_3 = \log(5x+2)$
c) $a_1 = \sin x$, $a_2 = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, $a_3 = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

16 Určete reálné číslo x tak, aby čísla a_1, a_2, a_3 tvořila tři následující členy geometrické posloupnosti.

a) $a_1 = 1$, $a_2 = 2^x$, $a_3 = 2^{x+2} + 12$

b) $a_1 = 1 + 2\log x$, $a_2 = 3 - 4\log x$, $a_3 = 3 + \log x$

c) $a_1 = \dfrac{1}{2\cotg x}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \dfrac{3}{\sin 2x}$

17 V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 20$, $d = 4$.
a) Kolikátý člen je roven číslu 100?
b) Kolikátý člen je roven číslu 150?

18 V geometrické posloupnosti je $a_1 = 64$, $q = \frac{1}{2}$. Kolikátý člen je roven číslu $\frac{1}{32}$?

19 Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí:

a) $a_4 = 9$, $a_{10} = 21$
b) $a_1 + a_3 = 2$, $a_2 + a_7 = -8$
c) $2a_2 - a_3 = 20$, $a_4 - 5a_1 = -95$
d) $a_3 = 2a_4$, $a_2 = -a_8$
e) $a_2 - a_1 = 6$, $a_{20} - a_{18} = 15$
f) $a_4 + a_5 + a_7 + a_8 = 10$, $a_{21} : a_1 = 2$
g) $a_1 + a_2 = 5$, $a_1^2 + a_2^2 = 13$
h) $a_3 + a_5 = 8$, $a_3^2 - a_5^2 = 32$
i) $a_4 + a_5 = 4$, $a_4 \cdot a_5 = -5$

20 Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí:

a) $a_2 = 1{,}5$, $a_5 = 40{,}5$
b) $a_2 = 16$, $a_4 = 1$
c) $a_1 + a_2 - a_4 = -110$, $a_2 + a_3 - a_5 = -220$
d) $a_8 - a_4 = 360$, $a_7 - a_5 = 144$
e) $a_2 + a_3 = 60$, $a_1 + a_4 = 252$
f) $a_2 \cdot a_3 = 9$, $a_2 + a_3 = 10$

21 Tři čísla, která tvoří tři následující členy aritmetické posloupnosti, mají součet 60 a součin 7 500. Určete tato čísla.

22 Určete tři reálná čísla větší než 8 a menší než 648 tak, aby spolu s danými čísly tvořila pět následujících členů
a) aritmetické posloupnosti, b) geometrické posloupnosti.

23 Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte čtyři čísla tak, aby spolu s vypočtenými kořeny vzniklo šest následujících členů
a) aritmetické posloupnosti, b) geometrické posloupnosti.

24 Najděte dvě reálná čísla x, y tak, aby čísla 3, x, y tvořila tři následující členy geometrické posloupnosti a čísla x, y, 18 tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti.

25 Určete čtyři čísla tak, aby první tři tvořila tři následující členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -3$ a poslední tři tvořila tři následující členy geometrické posloupnosti s kvocientem $q = \frac{1}{2}$.

26 Deset čísel tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 3$. První, třetí a sedmé číslo tvoří tři následující členy geometrické posloupnosti. Určete tato čísla.

27 V aritmetické posloupnosti známe první člen $a_1 = 18$ a diferenci $d = -5$. Určete $n \in \mathsf{N}$ tak, aby platilo $a_n + a_{n+3} = -189$.

28 V geometrické posloupnosti známe první člen $a_1 = \frac{1}{64}$ a kvocient $q = 2$. Určete $n \in \mathsf{N}$ tak, aby platilo $a_n + a_{2n} = 8\,200$.

29 Součet tří po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti je 9. První číslo necháme, druhé číslo zvětšíme o 12 a třetí číslo zmenšíme o 3. Dostaneme tak tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Určete původní trojici čísel a proveďte zkoušku.

30 Tři čísla tvoří tři po sobě následující členy aritmetické posloupnosti a součet jejich druhých mocnin je 126. Jestliže první číslo zmenšíme třikrát, druhé číslo necháme a třetí číslo zvětšíme čtyřikrát, dostaneme tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete tuto trojici čísel a proveďte zkoušku.

31 Tři čísla tvoří tři po sobě následující členy geometrické posloupnosti. Jestliže první číslo zmenšíme o 36, dostaneme tři následující členy aritmetické posloupnosti. Jestliže dále třetí číslo dělíme -8, dostaneme opět tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete tuto trojici čísel a proveďte zkoušku.

32 Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Obvod trojúhelníku je 96 cm. Vypočítejte délky stran.

33 Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, součet délek všech hran kvádru je 84 cm. Vypočítejte povrch kvádru, víte-li, že jeho objem je 64 cm^3.

34 Aritmetická posloupnost je dána vzorcem pro n-tý člen $a_n = \frac{1}{4}(3 - 2n)$. Vypočítejte a_1, d. Dále vypočítejte součet prvních deseti členů a součet druhých deseti členů dané posloupnosti.

35 V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 3$, $d = 4$. Kolik členů této posloupnosti musíme sečíst, aby součet byl větší než 250?

36 V aritmetické posloupnosti známe třetí člen $a_3 = 18$. Určete podmínku pro diferenci tak, aby platilo $s_9 \leqq 150$.

37 Určete, jakou podmínku musí splňovat první člen aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 5$, aby platilo $s_{20} \geqq 1\,000$.

38 Určete součet všech přirozených čísel, která vyhovují nerovnici

$$\left(12x + \frac{2}{3}\right) \cdot 5 - \frac{5x - 15}{3} < 50(x + 10).$$

39 Určete součet všech sudých čísel, která vyhovují nerovnici $x^2 - 53x + 150 \leqq 0$.

40 Vypočítejte součet všech přirozených dvojciferných čísel.

41 Dokažte, že součet prvních n lichých čísel je n^2.

42 V aritmetické posloupnosti určete první člen a diferenci, víte-li, že platí:

a) $a_6 = -\frac{1}{3}a_{16}$, $s_{26} = 104$
b) $s_5 = 60$, $s_{10} = 170$
c) $s_{10} = s_{11} = 165$

43 V aritmetické posloupnosti je první člen $a_1 = 10$ a diference $d = -2$. Vypočítejte člen, který je roven jedné šestině součtu všech členů předchozích.

44 V geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 36$ určete kvocient tak, aby platilo: $s_3 \leqq 252$.

45 V geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 2$ vypočítejte, kolik členů dává součet 186, jestliže poslední sčítanec je $a_n = 96$.

46 V geometrické posloupnosti platí $s_6 = 9s_3$. Určete a_1, q.

47 Součet prvních deseti členů aritmetické posloupnosti je 210, součet následujících deseti členů této posloupnosti je 610. Určete a_1, d.

48 Součet prvních tří členů geometrické posloupnosti je 38, součet následujících tří členů této posloupnosti je $\frac{304}{27}$. Vypočítejte a_1, q, s_6.

49 Určete několik reálných čísel větších než 2 a menších než 42 tak, aby s danými čísly tvořila aritmetickou posloupnost a dále aby platilo:
a) celkový součet čísel původních i vložených je 88
b) součet čísel vložených je 88

50 Mezi čísla 16 a 81 dejte několik čísel tak, aby s danými čísly tvořila geometrickou posloupnost a dále aby platilo:
a) celkový součet čísel původních i vložených je 211
b) součet čísel vložených je −42

51 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathsf{N}$:

a) $4 + 6 + 8 + \ldots + x = 270$
b) $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \ldots + x = 970$
c) $5 + 6 + 15 + 16 + 25 + 26 + \ldots + x = 1\,221$
d) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^x = 1\,023$
e) $x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{4} + \ldots + \dfrac{x}{1\,024} = 8\,188$
f) $x + 2x + 3x + 4x + \ldots + 50x = 2\,550$

52 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathsf{N}$:

a) $3 + 6 + 9 + 12 + \ldots + 3x \geqq 999$
b) $15 + 10 + 5 + 0 - 5 - \ldots - x \leqq -100$
c) $2 + 20 + \ldots + 2 \cdot 10^x < 10^6$
d) $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^2}{9} + \ldots + \dfrac{x^2}{3^{10}} \geqq 54\,321$

53 Řešte soustavy nerovnic s neznámou $x \in \mathsf{N}$:

a) $500 \leqq 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + x \leqq 1\,000$
b) $0{,}9 < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^x} < 1$

9.4 Zápisy pomocí $\sum$

54 Zapište pomocí sumy:

a) $5 + 7 + 9 + 11 + \ldots + 27$
b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{64}$
c) $-2 - 5 - 8 - 11 - \ldots - 56$
d) $-1 + 2 - 4 + 8 - 16 + \ldots - 1\,024$

55 Danou sumu rozepište pomocí součtu a součet vypočítejte.

a) $\sum\limits_{i=1}^{16} i$
b) $\sum\limits_{n=2}^{18} (4n - 5)$
c) $\sum\limits_{k=20}^{30} 2k$

56 Dokažte:

a) $\sum\limits_{i=16}^{40} (i + 4) = -20 + \sum\limits_{j=1}^{40} j$
b) $\sum\limits_{i=1}^{24} (3i + 1) = \sum\limits_{k=6}^{26} (3k - 4)$

57 Vypočítejte:

a) $\left(\sum\limits_{i=1}^{20} i \cdot 2\right)^2 + \sum\limits_{i=1}^{20} i \cdot 2^2$
b) $\sqrt{\sum\limits_{i=3}^{10} 13i} + \sum\limits_{i=5}^{10} \sqrt{2^i}$

58 V úlohách a), b), e), f) řešte rovnice s neznámou $x \in \mathsf{N}$, v úlohách c), d) řešte rovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $\sum\limits_{i=1}^{x} i = 1\,275$
b) $\sum\limits_{i=1}^{x} (2i + 3) = 2\,496$
c) $\sum\limits_{i=1}^{200} (x + i) = 10\,100$
d) $\sum\limits_{i=5}^{50} x \cdot i = 55x + 605$
e) $\sum\limits_{i=1}^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{511}{512}$
f) $\sum\limits_{i=1}^{5} 2^{x-i} = 2^{2x-10} - 2^{x-5}$

9.5 Užití geometrické posloupnosti

59 Počátkem roku uložil pan Novák do banky 50 000 Kč. Vklad je úročen 8 % ročně.
a) Kolik korun bude mít na vkladovém účtu za jeden rok? (Daň z úroků neuvažujte.)
b) Kolik korun bude mít k dispozici za jeden rok, bude-li mu odečtena daň z úroků ve výši 15 %?
c) Kolik korun bude mít na účtu po 4 letech? (Daň z úroků neuvažujte.)
d) Kolik korun bude mít na účtu po 4 letech, jestliže na konci každého roku mu bude odečtena daň z úroků ve výši 15 %?

60 Za pět let se počet obyvatel ve městě X zvýšil o 12 %. Jaký byl roční přírůstek? (Počítejte s přesností na desetiny.)

61 Za kolik let klesne hodnota předmětu na méně než desetinu původní ceny, jestliže ročně odepisujeme 18 % ceny předmětu z předchozího roku?

62 Při průchodu skleněnou deskou ztrácí světlo 5 % své intenzity. Kolik desek je třeba dát na sebe, aby se intenzita světla snížila alespoň na polovinu původní hodnoty?

63 Kolik peněz musí pan Dvořák uložit, aby při ročním úročení 8,5 % měl za pět let 25 000 Kč? (Daně z úroků jsou 15 %.)

64 Pan Novotný pravidelně počátkem roku uloží 10 000 Kč do banky na roční úrok 9 %. Kolik peněz bude mít k dispozici za pět let?
a) Daně z úroků neuvažujeme.
b) Počítejte daň z úroků ve výši 15 %.

65 Kuřák prokouří ročně 1 200 Kč. Kolik by uspořil za 50 let, kdyby tuto částku vždy počátkem roku ukládal na vkladní knížku při ročním úročení 8 %? (Počítejte daň z úroků ve výši 15 %.)

66 Pan Starý má půjčku 300 000 Kč na roční úrok 14 %. Jak velká musí být každoroční splátka dluhu koncem roku, chce-li pan Starý splatit dluh za pět let?

67 Pan Nový je schopen každoročně po dobu 10 let na konci roku splácet částku 50 000 Kč. Jak velkou půjčku si může vzít na roční úrok 15 %?

68 Pan Šťastný vyhrál 3 000 000 Kč. Počátkem roku uloží tuto částku na úrok 9 % (daň z úroků je 15 %). Kolik peněz může na konci každého roku vybírat, jestliže
a) vybírá jen úroky,
b) chce, aby mu peníze vystačily na dobu 30 let?

69 Do banky uložíme 10 000 Kč. Kolik peněz budeme mít po 1 roce, jestliže nám úroky ve výši 9 % připisují
a) ročně, b) čtvrtletně, c) měsíčně?
(Zdanění úroků je 15 %.)
Pozn. Úrokovací rok má 360 dnů, každý úrokovací měsíc má 30 dnů.

9.6 Nekonečná geometrická řada

70 Danou nekonečnou geometrickou řadu zapište pomocí sumy.

a) $3 + 9 + 27 + 81 + \dots$ c) $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - \dots$

b) $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x + \dots$ d) $\frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x} + 3 + 3x + 3x^2 + \dots$

71 Danou nekonečnou geometrickou řadu, která je zapsána pomocí sumy, rozepište pomocí součtu. Určete první člen a_1 a kvocient q.

a) $\sum_{i=1}^{\infty} x^{2i}$ b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-3}}$ c) $\sum_{i=1}^{\infty} 5(x+1)^{-i}$ d) $\sum_{i=1}^{\infty} [5(x+1)]^{-i}$

72 U daných nekonečných geometrických řad určete první člen a kvocient. Rozhodněte, které z daných řad jsou konvergentní, které divergentní. V případě, že se jedná o konvergentní řadu, určete její součet.

a) $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \dots$ f) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i$

b) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \dots$ g) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sqrt{5}\right)^{-i}$

c) $\sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ h) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}$

d) $2 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{4} + \dots$ i) $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2-i}$

e) $\sqrt{5} - \sqrt{3} + 5 - \sqrt{15} + 5\sqrt{5} - 5\sqrt{3} + \dots$

73 Určete, pro která $x \in \mathsf{R}$ jsou konvergentní dané nekonečné geometrické řady. Potom určete součet příslušné řady.

a) $2 + 4x + 8x^2 + 16x^3 + \dots$ d) $\sum_{i=1}^{\infty} (1-2x)^i$ g) $\sum_{i=1}^{\infty} x^{-2i}$

b) $x + 4 + (x+4)^2 + (x+4)^3 + \dots$ e) $\sum_{i=1}^{\infty} (x^2+7)^i$ h) $\sum_{i=1}^{\infty} (2\log x + 3)^i$

c) $x + 2x + 4x + 8x + \dots$ f) $\sum_{i=1}^{\infty} (x+4)^{2-3i}$ i) $\sum_{i=1}^{\infty} 2^i \cdot \sin^i x$

74 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $1 + 3x + 9x^2 + \dots = 10$
b) $2 - 4x + 8x^2 - \dots = 1$
c) $1 + \log x + (1 + \log x)^2 + (1 + \log x)^3 + \dots = -6\log x$
d) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots = -\frac{1}{3}$

75 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $\sum_{i=1}^{\infty} (4-3x)^i = -\frac{1}{2x}$ d) $2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2i}} = \frac{x}{x+1} - \frac{x-2}{x-1}$

b) $(x+1) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (x+2)^i = \frac{3x+2}{5}$ e) $\sum_{i=1}^{\infty} (3\log_2 x - 2)^i = \frac{1}{3}$

c) $\sum_{i=1}^{\infty} (x+2)^{2i} = \frac{1}{3}$ f) $\sum_{i=1}^{\infty} (1 - 2\cos^2 x)^i = \operatorname{tg} x$

76 Daná reálná čísla (periodická čísla) zapište zlomkem v základním tvaru:

a) $0{,}\overline{8}$ b) $0{,}\overline{370}$ c) $1{,}0\overline{32}$ d) $25{,}6\overline{7}$

77 Daný zlomek zapište pomocí nekonečné geometrické řady alespoň jedním způsobem:

a) $\frac{1}{1-\frac{3}{4}}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{1-x}$, kde $x \in \mathsf{R} \land |x| < 1$

78 Vypočítejte:

a) $5 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[8]{5} \cdot \dots$ b) $\dfrac{n + \frac{n}{3} + \frac{n}{9} + \frac{n}{27} + \dots}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$, kde $n \in \mathsf{N}$

79 Součet řady $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$ je 20.
Součet řady $a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 + a^2q^6 + a^2q^8 + \dots$ je 80. Určete čísla $a, q \in \mathsf{R}$.

Slovní úlohy

80 „Nekonečná" spirála se skládá z polokružnic, poloměr první polokružnice je 6 cm, poloměr každé další polokružnice je o $\frac{1}{3}$ menší než poloměr polokružnice předcházející. Vypočítejte délku spirály.

81 „Nekonečná" spirála se skládá z polokružnic, poloměr první polokružnice je 6 cm, poloměr každé další polokružnice je třikrát menší než poloměr polokružnice předcházející. Vypočítejte délku spirály.

82 Vypočítejte délku „nekonečné“ spirály, která vznikne spojením bodů A_1, A_2, A_3, A_4, … atd. čtvrtkružnicemi. Střed první čtvrtkružnice je v bodě $S_1[0; 0]$, krajní body jsou $A_1[-4; 0]$, $A_2[0; 4]$. Střed druhé čtvrtkružnice je v bodě $S_2[0; 2]$, krajní body jsou $A_2[0; 4]$, $A_3[2; 2]$. Střed třetí čtvrtkružnice je v bodě $S_3[1; 2]$, krajní body jsou $A_3[2; 2]$, $A_4[1; 1]$. Střed čtvrté čtvrtkružnice je v bodě $S_4[1; 1\frac{1}{2}]$, krajní body jsou $A_4[1; 1]$, $A_5[\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}]$. Tento postup stále opakujeme.

83 Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry, která se skládá z úseček B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5, …. Souřadnice krajních bodů úseček jsou $B_1[1; 0]$, $B_2[1; 1]$, $B_3[0; 1]$, $B_4[0; \frac{1}{2}]$, $B_5[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, $B_6[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]$, $B_7[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}]$, $B_8[\frac{1}{4}; \frac{5}{8}]$, ….

84 V daném rovnostranném trojúhelníku ABC o straně $a = 6\,\mathrm{cm}$ sestrojte kolmici z vrcholu C na stranu AB, patu kolmice označte B_1. Bodem B_1 veďte rovnoběžku se stranou AC, průsečík této rovnoběžky se stranou BC označte C_1. Patu kolmice z bodu C_1 na stranu AB označte B_2, průsečík strany BC a rovnoběžky se stranou AC vedené bodem B_2 označte C_2. Patu kolmice z bodu C_2 na stranu AB označte B_3, průsečík strany BC a rovnoběžky s AC vedené bodem B_3 označte C_3. Tento postup stále opakujte. Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry $ACB_1C_1B_2C_2B_3C_3\ldots$, která vznikne uvedeným způsobem.

85 Ve čtverci $ABCD$, $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$ postupně vyznačte „nekonečnou“ lomenou čáru spojením následujících bodů: A, B, S_1(střed BC), S_2(střed AC), S_3(střed AB), S_4(střed BS_1), S_5(střed S_1S_3), S_6(střed BS_3), S_7 (střed BS_4), S_8(střed S_4S_6), S_9(střed S_6B) atd. Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry $ABS_1S_2S_3S_4\ldots$.

86 V pravoúhlé soustavě souřadnic narýsujte přímky o_1: $y = x$, o_2: $y = -x$. „Nekonečnou“ lomenou čáru $D_1D_2D_3D_4D_5D_6D_7\ldots$ sestrojte tak, že z bodu $D_1[4; 0]$ povedete kolmici na přímku o_1, patu kolmice označte D_2. Z bodu D_2 sestrojte kolmici na osu y, patu kolmice označte D_3. Patu kolmice vedené z bodu D_3 na přímku o_2 označte D_4. Patu kolmice vedené z bodu D_4 na osu x označte D_5. Patu kolmice vedené z bodu D_5 na přímku o_1 označte D_6 atd. Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry $D_1D_2D_3D_4D_5D_6D_7\ldots$.

87 Do pravoúhlého trojúhelníku ABC ($a = 3\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle ACB| = 90°$) je vepsána kružnice k_1. Tečna ke kružnici k_1 rovnoběžná se stranou BC protíná stranu AB v bodě B_1, stranu AC v bodě C_1. Do trojúhelníku AB_1C_1 je vepsána kružnice k_2, tečna ke kružnici k_2 rovnoběžná s B_1C_1 protíná strany AB, AC v bodech B_2, C_2. Do trojúhelníku AB_2C_2 je vepsána kružnice k_3, tečna ke kružnici k_3 rovnoběžná s B_2C_2 protíná AB, AC v bodech B_3, C_3. Tento postup stále opakujte. Vypočítejte součet obsahů kruhů k_1, k_2, k_3, k_4, ….

88 Sestavte následujícím způsobem „nekonečnou“ šipku. V daném rovnostranném trojúhelníku ABC ($a = 6\,\mathrm{cm}$) sestrojte body K_1, L_1 na straně AB tak, aby platilo $|AK_1| = |K_1L_1| = |L_1B|$. Sestrojte obdélník $K_1L_1L_2K_2$ ($|K_1K_2| = 2|K_1L_1|$) tak, aby s trojúhelníkem ABC měl společnou jen úsečku K_1L_1. Nyní na straně K_2L_2 sestrojte body K_3, L_3 tak, aby platilo $|K_2K_3| = |K_3L_3| = |L_3L_2|$. Sestrojte další obdélník $K_3L_3L_4K_4$ ($|K_3K_4| = 2|K_3L_3|$) tak, aby s obdélníkem $K_1L_1L_2K_2$ měl společnou jen úsečku K_3L_3. Tento postup při konstrukci dalších obdélníků neustále opakujte. Vypočítejte obsah plochy „nekonečné“ šipky, kterou tvoří daný trojúhelník a obdélníky sestrojené uvedeným způsobem.

89 V krychli $ABCDEFGH$ o hraně $a = 6\,\mathrm{cm}$ označte postupně A_1, B_1, C_1, D_1 středy hran EF, FG, GH, HE. Čtverec $A_1B_1C_1D_1$ tvoří podstavu další krychle $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$, která je postavená na původní krychli. Označte postupně A_2, B_2, C_2, D_2 středy hran E_1F_1, F_1G_1, G_1H_1, H_1E_1. Čtverec $A_2B_2C_2D_2$ tvoří podstavu další krychle $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$, která je postavená na předchozí krychli. Tento postup stále opakujte. Vypočítejte objem „nekonečné“ pyramidy, která takto vznikne.

90 V kouli se středem S a poloměrem $6\,\mathrm{cm}$ vyznačte průměr AB. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABS_1. Sestrojte kouli se středem S_1 tak, aby s koulí původní měla vnější dotyk. V této kouli vyznačte průměr A_1B_1 rovnoběžný s AB a sestrojte další rovnostranný trojúhelník $A_1B_1S_2$ tak, aby s trojúhelníkem ABS_1 měl společný jen bod S_1 a trojúhelníky ABS_1 a $A_1B_1S_2$ ležely v téže rovině. Opět sestrojte kouli se středem S_2 tak, aby s předchozí koulí měla vnější dotyk. V této nové kouli vyznačte průměr A_2B_2 rovnoběžný s průměrem A_1B_1, sestrojte rovnostranný trojúhelník $A_2B_2S_3$ tak, aby s trojúhelníkem $A_1B_1S_2$ měl společný jen bod S_2 a trojúhelníky $A_1B_1S_2$ a $A_2B_2S_3$ ležely v téže rovině. Tento postup stále opakujte. Vypočítejte objem „nekonečného sněhuláka“ složeného z koulí, které umístíme popsaným způsobem.

8.8 Úpravy výrazů obsahující mocniny a odmocniny

56 a) $-3(x+4)$; $x>0 \wedge x \neq 4$; b) $\frac{1}{1-x}$; $x \geqq 0 \wedge x \neq 1$; c) 8; $x \geqq 0 \wedge x \neq 1$;
d) 1; $x \geqq 0 \wedge x \neq 7$; e) $\frac{x+1}{x-1}$; $x>0 \wedge x \neq 1$.

57 a) $\frac{2x}{7x+10}$; $x \neq -2; -\frac{10}{7}; 0$; b) 2; $x \neq \pm 1; 0$; c) $\frac{x-1}{x^2}$; $x \neq -1; 0$; d) x^2+x+1; $x \neq 0; 1$.

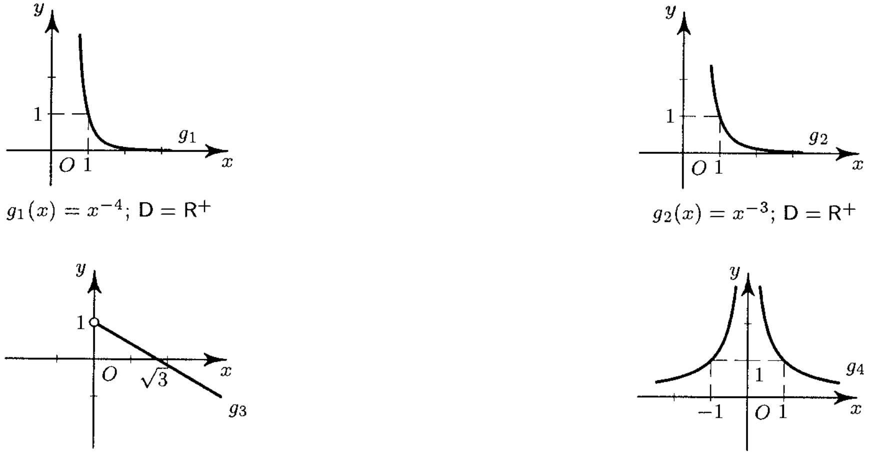
58 a) $\frac{4\sqrt{a}}{1-a}$; $a>0 \wedge a \neq 1$; b) $b-1$; $b>0 \wedge b \neq 1$; c) $\frac{1}{c-1}$; $c \neq \pm 1$;
d) $\sqrt{d}-1$; $d>0 \wedge d \neq 1$; e) 6; $e>0 \wedge e \neq 1$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$.

59

$f_1(x) = x^4$; $\mathsf{D} = \mathsf{R} - \{0\}$ $f_2(x) = -x^5$; $\mathsf{D} = \mathsf{R} - \{0\}$

K řešení úlohy 59

60



$g_1(x) = x^{-4}$; $\mathsf{D} = \mathsf{R}^+$ $g_2(x) = x^{-3}$; $\mathsf{D} = \mathsf{R}^+$

$g_3(x) = 1 - x\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\mathsf{D} = \mathsf{R}^+$ $g_4(x) = \frac{|x|}{x^2}$; $\mathsf{D} = \mathsf{R} - \{0\}$

K řešení úlohy 60

9 Posloupnosti a řady

9.1 Způsoby zadání posloupností

1 a) $\ldots, 24, 28, 32, \ldots$, $a_n = 4n$; b) $\ldots, 36, 49, 64, \ldots$, $a_n = n^2$;
c) $\ldots, -1, 1, -1, \ldots$, $a_n = (-1)^n$; d) $\ldots, -9, -27, -81, \ldots$, $a_n = -3^{n-4}$.

2 a) $a_n = 2n$; b) $a_n = 2n-1$; c) $a_n = 11n$; d) $a_n = 5n-4$.

3 a) $3, 5, 7, 9, 11$; b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}$; c) $0, 2, 6, 12, 20$; d) $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$;
e) $-4, -1, 4, 11, 20$; f) $1, -2, 3, -4, 5$.

4 a) $5, 9, 13, 17, 21, 25, \ldots$, $a_n = 4n+1$; b) $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$, $a_n = n^2$;
c) $-1, 3, -1, 3, -1, 3, \ldots$, $a_n = 1 + (-1)^n \cdot 2$.

5 a) $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$, $a_n = 2^n$; b) $1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots$, $a_n = 3^{n-1}$;
c) $-3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots$, $a_n = 2n-5$.

9.2 Vlastnosti posloupností

Posloupnost rostoucí, klesající

6 a) Roste; b) klesá; c) roste; d) klesá od 2. členu; e) roste; f) klesá;
g) neroste, neklesá; h) roste.

Posloupnost omezená

7 a) Omez. zdola, $a_n \geqq 2$; b) omez., $-1 \leqq a_n < 0$; c) omez. zdola, $a_n \geqq 0$;
d) omez., $\frac{7}{2} \leqq a_n < 5$; e) omez., $-1 \leqq a_n \leqq 1$; f) omez., $-5 \leqq a_n < -1$.

8 a) 0; b) 7; c) $\frac{4}{3}$; d) 0; e) diverg.; f) $\frac{1}{2}$; g) diverg.; h) diverg.; i) diverg.

9.3 Aritmetická, geometrická posloupnost

9 a) AP, $a_1 = \frac{4}{5}$, $d = \frac{1}{5}$; b) AP, $a_1 = 0$, $d = -1$; c) GP, $a_1 = \frac{2}{9}$, $q = \frac{2}{3}$;
d) není AP, není GP.

10 a) $7, 10, 13, 16, 19, \ldots$ AP, $a_n = 4 + 3n$; b) $8, 16, 32, 64, 128, \ldots$ GP, $a_n = 2^{n+2}$; c) $5, 3, 1, -1, -3, \ldots$ AP, $a_n = 7 - 2n$.

11 a) $d = \log \frac{1}{2}$; b) $d = \frac{1}{2}$; c) $d = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $d = 2a + 3$.

12 a) $q = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$; b) $q = \frac{1}{2}$; c) $q = \frac{1}{2 \sin x}$; d) $q = b + 1$.

13 $d = \log q$. **14** $x = 10 \Rightarrow a_1 = 4$, $q = 3$.

15 a) $x_1 = -8 \Rightarrow 56, 36, 16$, $x_2 = 1 \Rightarrow 2, 9, 16$; b) $x = 2 \Rightarrow \log 3, \log 6, \log 12$;
c) $x_1 = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathsf{Z} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi, k \in \mathsf{Z} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

16 a) $x = \log_2 6 \Rightarrow 1, 6, 36$; b) $x_1 = 100 \Rightarrow 5, -5, 5$, $x_2 = 10^{\frac{3}{14}} \Rightarrow \frac{10}{7}, \frac{15}{7}, \frac{45}{14}$;
c) $x_1 = \frac{1}{6}\pi + k\pi, k \in \mathsf{Z} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6}, 1, 2\sqrt{3}$, $x_2 = \frac{5}{6}\pi + k\pi, k \in \mathsf{Z} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{6}, 1, -2\sqrt{3}$.

17 a) 21. člen; b) nemá řešení. **18** 12. člen.

19 a) $a_1 = 3$, $d = 2$; b) $a_1 = 3$, $d = -2$; c) $a_1 = 20$, $d = -5$; d) $a_1 \in \mathsf{R}$, $d = -\frac{a_1}{4}$;
e) nemá řešení; f) $a_1 = 2$, $d = 0{,}1$; g) $(a_1 = 3, d = -1) \vee (a_1 = 2, d = 1)$;
h) $a_1 = 10$, $d = -2$; i) $(a_1 = -19, d = 6) \vee (a_1 = 23, d = -6)$.

20 a) $a_1 = 0{,}5 \wedge q = 3$; b) $(a_1 = 64 \wedge q = \frac{1}{4}) \vee (a_1 = -64 \wedge q = -\frac{1}{4})$; c) $a_1 = 22 \wedge q = 2$;
d) $(a_1 = 3 \wedge q = 2) \vee (a_1 = -3\,072 \wedge q = \frac{1}{2})$; e) $(a_1 = 2 \wedge q = 5) \vee (a_1 = 250 \wedge q = \frac{1}{5})$;
f) $(a_1 = 81 \wedge q = \frac{1}{9}) \vee (a_1 = \frac{1}{9} \wedge q = 9)$.

21 15, 20, 25 nebo 25, 20, 15.

22 a) AP, $d = 160 \Rightarrow 8, 168, 328, 488, 648$;
b) GP, $q_1 = 3 \Rightarrow 8, 24, 72, 216, 648$ nebo GP, $q_2 = -3 \Rightarrow 8, -24, 72, -216, 648$.

23 a) AP, 2; 3,2; 4,4; 5,6; 6,8; 8 nebo AP, 8; 6,8; 5,6; 4,4; 3,2; 2.
b) GP, 2; $2\sqrt[5]{4}$; $2\sqrt[5]{16}$; $4\sqrt[5]{2}$; $4\sqrt[5]{8}$; 8 nebo GP, 8; $4\sqrt[5]{8}$; $4\sqrt[5]{2}$; $2\sqrt[5]{16}$; $2\sqrt[5]{4}$; 2.

24 $3, 6, 12, 18$ nebo $3, -\frac{9}{2}, \frac{27}{4}, 18$. **25** $9, 6, 3, \frac{3}{2}$.

26 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. **27** $n = 22$. **28** $n = 10$.

29 3, −6, 12 nebo 12, −6, 3. **30** ±9, ±6, ±3 nebo ±3, ±6, ±9.

31 4, 16, 64 nebo 4, −8, 16. **32** 24 cm, 32 cm, 40 cm.

33 1 cm, 4 cm, 16 cm, $S = 168\,\text{cm}^2$.

34 $a_1 = \frac{1}{4}$, $d = -\frac{1}{2}$, $s_{10} = -20$, $a_{11} + \ldots + a_{20} = -70$. **35** Aspoň 11 členů.

36 $d \leqq -\frac{2}{3}$. **37** $a_1 \geqq \frac{5}{2}$. **38** $s_{58} = 1\,711$. **39** $s_{24} = 648$. **40** $s = 4\,905$.

41 $a_1 = 1$, $a_n = 2n - 1$, $s_n = n^2$. **42** a) $a_1 = -6$, $d = 0{,}8$; b) $a_1 = 8$, $d = 2$;
c) $a_1 = 30$, $d = -3$. **43** $a_4 = 4$, $a_{21} = -30$. **44** $q \in (-3; 2)$. **45** $n = 5$.

46 $a_1 \in \mathsf{R} - \{0\}$, $q = 2$. **47** $a_1 = 3$, $d = 4$. **48** $a_1 = 18$, $q = \frac{2}{3}$, $s_6 = \frac{1\,330}{27}$.

49 a) $2, \frac{46}{3}, \frac{86}{3}, 42$; b) 2, 10, 18, 26, 34, 42.

50 a) 16, 24, 36, 54, 81; b) 16, −24, 36, −54, 81.

51 a) Návod: $a_1 = 4$, $d = 2$, $a_n = x = 4 + (n-1) \cdot 2$, $s_n = 270 = \frac{n}{2}[4 + 4 + (n-1) \cdot 2] \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 15 \Rightarrow x = 32$; b) $x = 96$; c) $x = 106$; d) $x = 9$; e) $x = 4\,096$; f) $x = 2$.

52 a) $\{26, 27, 28, \ldots\}$; b) $\{35, 36, 37, \ldots\}$; c) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; d) $\{191, 192, \ldots\}$.

53 a) $\{45, 46, 47, \ldots, 61\}$; b) $\{4, 5, 6, \ldots\}$.

9.4 Zápisy pomocí $\sum$

54 a) $\sum\limits_{i=1}^{12}(2i+3)$; b) $\sum\limits_{i=1}^{6}(\frac{1}{2})^i$; c) $(-1)\cdot\sum\limits_{i=1}^{19}(3i-1)$; d) $\sum\limits_{i=1}^{11}(-1)^i\cdot 2^{i-1}$.

55 a) $1+2+3+\ldots+16=136$; b) $3+7+11+\ldots+67=595$; c) $40+42+44+\ldots+60=550$.

56 a) $L=20+21+\ldots+44=\frac{25}{2}(20+44)=800$, $P=-20+(1+2+\ldots+40)=800$; b) $L=P=924$. **57** a) 177 240; b) $82+28\sqrt{2}$.

58 a) $x=50$; b) $x=48$; c) $x=-50$; d) $x=\frac{1}{2}$; e) $x=9$; f) $x=10$.

9.5 Užití geometrické posloupnosti

59 a) 54 000 Kč; b) 53 400 Kč; c) 68 024,40 Kč; d) 65 051,20 Kč. **60** 2,3 %.

61 Za 12 let. **62** 14 desek. **63** 17 638,40 Kč. **64** a) 65 233,30 Kč; b) 62 714,70 Kč.

65 486 752,00 Kč. **66** 87 385,10 Kč. **67** 250 938,40 Kč. **68** a) 229 500,00 Kč; b) 257 732,40 Kč. **69** a) 10 765,00 Kč; b) 10 787,20 Kč; c) 10 792,40 Kč.

9.6 Nekonečná geometrická řada

70 a) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}3^i$; b) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x\cdot(\frac{1}{2})^{i-1}$; c) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\cdot 2^i$; d) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}3\cdot(x)^{i-4}$.

71 a) $x^2+x^4+x^6+\ldots\Rightarrow a_1=x^2$, $q=x^2$; b) $4+2+1+\frac{1}{2}+\ldots\Rightarrow a_1=4$, $q=\frac{1}{2}$;
c) $\frac{5}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}+\ldots\Rightarrow a_1=\frac{5}{x+1}$, $q=\frac{1}{x+1}$;
d) $\frac{1}{5(x+1)}+\frac{1}{25(x+1)^2}+\ldots\Rightarrow a_1=\frac{1}{5(x+1)}$, $q=\frac{1}{5(x+1)}$.

72 a) $a_1=\frac{3}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, konverg., $s=3$; b) $a_1=-\frac{1}{3}$, $q=-\frac{1}{2}$, konverg., $s=-\frac{2}{9}$;
c) $a_1=1+\sqrt{2}$, $q=\frac{1}{2}$ nebo $a_1=\sqrt{2}$, $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$, konverg., $s=2+2\sqrt{2}$;
d) $a_1=2$, $q=\frac{3}{2}$, diverg., s neex.; e) $a_1=\sqrt{5}-\sqrt{3}$, $q=\sqrt{5}$ diverg., s neex.;
f) $a_1=\frac{1}{3}$, $q=\frac{1}{3}$, konverg., $s=\frac{1}{2}$; g) $a_1=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $q=\frac{\sqrt{5}}{5}$, konverg., $s=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$;
h) $a_1=1$, $q=-\frac{1}{2}$, konverg., $s=\frac{2}{3}$; i) $a_1=-\frac{2}{3}$, $q=-\frac{3}{2}$, diverg., s neex.

73 a) pro $x\in(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ je $s=\frac{2}{1-2x}$; b) pro $x\in(-5;-3)$ je $s=-\frac{x+4}{x+3}$;
c) $q=2$, vždy diverg.; d) pro $x\in(0;1)$ je $s=\frac{1-2x}{2x}$; e) $q=x^2+7$, vždy diverg.;
f) pro $x\in(-\infty;-5)\cup(-3;\infty)$ je $s=\frac{x^2+8x+16}{x^3+12x^2+48x+63}$;
g) pro $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$ je $s=\frac{1}{x^2-1}$; h) pro $x\in(0{,}01;0{,}1)$ je $s=-\frac{2\log x+3}{2\log x+2}$;
i) pro $x\in\bigcup\limits_{k\in Z}(-\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi)$ je $s=\frac{2\sin x}{1-2\sin x}$.

74 a) $\{\frac{3}{10}\}$; b) $\emptyset$; c) $\{\frac{\sqrt[3]{100}}{10}\}$; d) $\bigcup\limits_{k\in Z}\{\frac{7}{6}\pi+2k\pi;\frac{11}{6}\pi+2k\pi\}$.

75 a) $\{\frac{3}{2}\}$; b) $\{-\frac{3}{2}\}$; c) $\{-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\}$; d) $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$; e) $\{\sqrt[4]{8}\}$; f) $\bigcup\limits_{k\in Z}\{\frac{3}{8}\pi+k\frac{\pi}{2}\}$.

76 a) $\frac{8}{9}$; b) $\frac{10}{27}$; c) $\frac{511}{495}$; d) $\frac{2\,311}{90}$. **77** a) např. $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\ldots$; b) např. $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$; c) např. $\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\ldots$; d) např. $1+x+x^2+x^3+\ldots$.

78 a) 25; b) $\frac{3}{1+n}$. **79** $a=\frac{20}{3}$, $q=\frac{2}{3}$. **80** 18π cm. **81** 9π cm. **82** 4π cm.

83 4 cm. **84** $(12+6\sqrt{3})$ cm. **85** $(21+3\sqrt{5})$ cm. **86** $(4+4\sqrt{2})$ cm. **87** $\frac{4}{3}\pi\,\text{cm}^2$.

88 $(9+9\sqrt{3})\,\text{cm}^2$. **89** $\frac{432(4+\sqrt{2})}{7}\,\text{cm}^3$. **90** $\frac{288\pi(11+6\sqrt{3})}{13}\,\text{cm}^3$.

10 Geometrie — konstrukční úlohy

10.1 Základní typy bodových množin

1 a) $\mathsf{M}_1=k(A;2\,\text{cm})$; b) M_2 je sjednocení dvou kruhových úsečí; c) M_3 je osa úsečky AB; d) M_4 je polorovina oA, kde o je osa úsečky AB.

2 a) G_1 je kolmice k AB v B, mimo B; b) G_2 je Thalet. kruž. nad AB; c) G_3 jsou dvě polopřímky mimo B; d) G_4 jsou dva kružnic. oblouky, mimo A, B; e) G_5 jsou dva kružnicové oblouky, mimo A, B; f) G_6 jsou dvě kruhové úseče, mimo A, B; g) G_7 je rovina bez dvou kruhových úsečí, mimo A, B; h) G_8 je rozdíl dvou kruhových úsečí, mimo A, B.

3 Dvě rovnoběžky s p ve vzdálenosti m. **4** a) Osa pásu; b) osy úhlů, které p, q svírají.

10.2 Tečna z bodu ke kružnici

5 Body dotyku jsou průsečíky kružnice k s Thaletovou kružnicí nad SM.

6 Narýsujte libovolnou tětivu délky 5 cm, její střed označte X. Narýsujte kružnici $k_1(S;r=|SX|)$. Potom sestrojte tečny z M ke k_1.

10.3 Konstrukce kružnic požadovaných vlastností

7 $S\in l_{1,2}(O;(4\pm1{,}5)\,\text{cm})\cap l_3(M;1{,}5\,\text{cm})$; a) 2 řešení; b) 1 řešení; c) 0 řešení; d) 2 řešení.

8 $S\in l_{1,2}(O;(4\pm1{,}5)\,\text{cm})\cap p_{1,2}$; $p_{1,2}\parallel p\wedge|p_{1,2}p|=1{,}5\,\text{cm}$; a) 6 řešení; b) 8 řešení.

9 Poloměry hledaných kružnic jsou 2 cm. Středy leží na ose pásu a $l(M;2\,\text{cm})$. Úloha má 2 řešení.

10 a) $S\in l_{1,2}(O_1;(5\pm1)\text{cm})\cap l_{3,4}(O_2;(2\pm1)\text{cm})$. Úloha má 6 řešení.
b) $S\in l_{1,2}(O_1;(4\pm3)\,\text{cm})\cap l_{3,4}(O_2;(2\pm1)\,\text{cm})$. Úloha má 2 řešení.

11 a) $S\in l_{1,2}(O_1;(4\pm3)\text{cm})\cap l_{3,4}(O_2;|2\pm3|\,\text{cm})$. Úloha má 4 řešení.
b) $S\in l_{1,2}(O_1;(4\pm3)\,\text{cm})\cap l_{3,4}(O_2;|2\pm3|\,\text{cm})$. Úloha má 4 řešení.

12 Poloměry hledaných kružnic jsou 1,5 cm nebo 3,5 cm.
Středy leží na $l_1(O_1;(2+1{,}5)\text{cm})$ a na $p_{1,2}\parallel p\wedge|p_{1,2}p|=1{,}5\,\text{cm}$.
Středy leží na $l_2(O_2;(3{,}5-2)\text{cm})$ a na $p_{3,4}\parallel p\wedge|p_{3,4}p|=3{,}5\,\text{cm}$. Úloha má 4 řešení.

13 Poloměry hledaných kružnic jsou 1,5 cm. $S\in l_1(O;(2+1{,}5)\text{cm})\cap l_2(M;1{,}5\,\text{cm})$.
Poloměry hledaných kružnic jsou také 3,5 cm. $S\in l_3(O;(3{,}5-2)\text{cm})\cap l_4(M;3{,}5\,\text{cm})$. Úloha má 4 řešení.

10.4 Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků

Vzhledem k tomu, že postup konstrukce může být u řady úloh různý, je uveden jen jeden krátký návod a počet různých trojúhelníků (čtyřúhelníků), které splňují podmínky úlohy.

14 a) $A\in k(S_1;2{,}5)\cap\mathsf{G}_{45}$, kde $\mathsf{G}_{45}=\{X\in\varrho;|\sphericalangle S_1XB|=45°\}$. Úloha má 1 řešení.
b) Těžiště $T\in BS_1\wedge|S_1T|=2$; $S_{BC}\in k_1(T;\frac{7}{3})\cap k_2(B;2)$. Úloha má 1 řešení.

15 a) p je kolmice bodem C_1 na CC_1. Potom $B\in p\cap\mathsf{G}_{120}$, kde $\mathsf{G}_{120}=\{X\in\varrho;|\sphericalangle CXC_1|=120°\}$. $|BA|=3$. Úloha má 1 řešení.
b) $S_{AB}\in p\cap k(C;5{,}5)$, kde $p\perp C_1C\wedge C_1\in p$. $A\in p\cap\mathsf{G}_{60}$, kde $\mathsf{G}_{60}=\{X\in\varrho;|\sphericalangle CXC_1|=60°\}$. Úloha má 2 řešení.

16 a) $S\in k_1(A;4)\cap k_2(B;4)$, $C\in p\cap l(S;4)$, kde $p\parallel AB$ ve vzdálenosti 4 cm. Úloha má 2 řešení. b) $C\in p\cap k(S_{AB};4)$, kde $p\parallel AB$ ve vzdálenosti 3 cm. Úloha má 2 řešení.

17 a) $C\in p\cap k$, kde k je Thaletova kruž. nad AB, $p\parallel AB$ ve vzdálenosti 2,5 cm. 2 řešení.
b) $C\in l(S_{AB};4)\cap k$, kde k je Thaletova kružnice nad AB. Úloha nemá řešení.
c) $A\in\mapsto CY\cap\mathsf{G}_{60}$, kde $\mathsf{G}_{60}=\{X\in\varrho;|\sphericalangle BXC|=60°\}$, $\mapsto CY\perp BC$. Úloha má 1 řešení.
d) V pravoúhlém trojúhelníku je $t_c=\frac{c}{2}\Rightarrow c=5$. Úloha má 1 řešení.
e) V pravoúhlém trojúhelníku je $r=\frac{c}{2}\Rightarrow c=6$. Úloha má 1 řešení.
f) V pravoúhlém trojúhelníku je $r=\frac{c}{2}\Rightarrow$ pro dané hodnoty úloha nemá řešení.
g) Nejprve sestrojte pravý úhel, potom BC. Průsečík rovnoběžek s rameny úhlu ve vzdál. 2 cm je střed kruž. vepsané. Pomocí Thalet. kruž. veďte tečnu z B ke kruž. vepsané. Úloha má 1 řešení.