# RMF - Úlohy ze 7. týdne

Konvoluce

8. 11. 2024

Připomeňme si definici konvoluce: Pro dvě měřitelné funkce $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definujeme konvoluci jako

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

1) Vypočtěte klasickou konvoluci funkcí.

**a)** $\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[0,2]}(x)$

**b)** $\chi_{[0,2]}(x) * \chi_{[-1,4]}(x)$

**c)** $\chi_{[0,1]}(x) * x^2$

**d)** $x^2 * e^{-|x|}$

**e)** $x * e^{-x^2}$

**f)** $\theta(a - |x|) * \theta(\frac{a}{2} - |x|)$, kde $a > 0$

2) Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:

**a)** Je-li $f \in L^1(\mathbb{R})$ a $g$ je omezená funkce, pak konvoluce $x \mapsto (f * g)(x)$ je spojitá funkce.

**b)** Je-li $f \in L^p(\mathbb{R})$ a $g \in L^q(\mathbb{R})$, přičemž čísla $p, q$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pak konvoluce $x \mapsto (f * g)(x)$ je spojitá funkce.

3) Náhodná veličina má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$, je-li její hustotou funkce

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(jde např. o model pro dobu životnosti elektronického zařízení, dobu čekání na příchod zákazníka, dobu mezi příjezdy autobusů, dobu trvání telefonátu, apod.).

Jsou-li dvě veličiny $X, Y$ nezávislé, pak hustota náhodné veličiny $Z = X + Y$ je konvolucí jejich hustot $f_X$ a $f_Y$, tedy

$$f_Z(t) = (f_X * f_Y)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\, dx$$

Vypočtěte konvoluci dvou nezávislých náhodných veličin $X, Y$ s exponenciálním rozdělením

**a)** se stejným parametrem $\lambda$

**b)** s různými parametry $\lambda_1 \neq \lambda_2$

4) Napište definici temperované distribuce. Uveďte příklad regulární zobecněné funkce, která není temperovanou distribucí.

5) Dokažte tvrzení: Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$ a $\int_{\mathbb{R}^k} f = 1$, potom posloupnost funkcí $f_n(\vec{x}) = n^k f(n\vec{x})$ konverguje v $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^k)$ ke $k$-rozměrné Diracově funkci, tj.

$$n^k f(nx_1, \ldots, nx_k) \xrightarrow{n \to \infty} \delta(x_1, \ldots, x_k) = \delta(x_1) \otimes \ldots \otimes \delta(x_k)$$

*(Nápověda: Postupuje jako při výpočtu limity v 3. příkladu z 6. sady úloh.)*

**Úlohy na rozmyšlení:** Je-li $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$, $h \geq 0$ a $\int_{\mathbb{R}^k} h = 1$, pak posloupnost funkcí definovanou předpisem

$$h_n(\vec{x}) = n^k h(n\vec{x})$$

nazveme přibližnou identitou (nebo také aproximativní jednotkou). Dokažte platnost tvrzení:

**1)** Je-li funkce $f$ stejnoměrně spojitá v $\mathbb{R}^k$, pak $f * h_n$ konverguje stejnoměrně k $f$.

**2)** Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^k)$ pro $p \in [1, \infty)$, pak $f * h_n \to f$ v $L^p$.