RMF - Úlohy z 8. týdne

Fourierova transformace

15. 11. 2024

Připomeňme si definici Fourierovy transformace: Pro funkci $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definujeme Fourierovu transformaci jako

$$\mathcal{F}[f(x)](t) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{i\langle t,x\rangle}\, dx,$$

kde $\langle\ ,\ \rangle$ značí skalární součin na $\mathbb{R}^n$.

1) Vypočtěte Fourierovu transformaci následujících funkcí.

a) $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) + \chi_{[-2,2]}(x)$

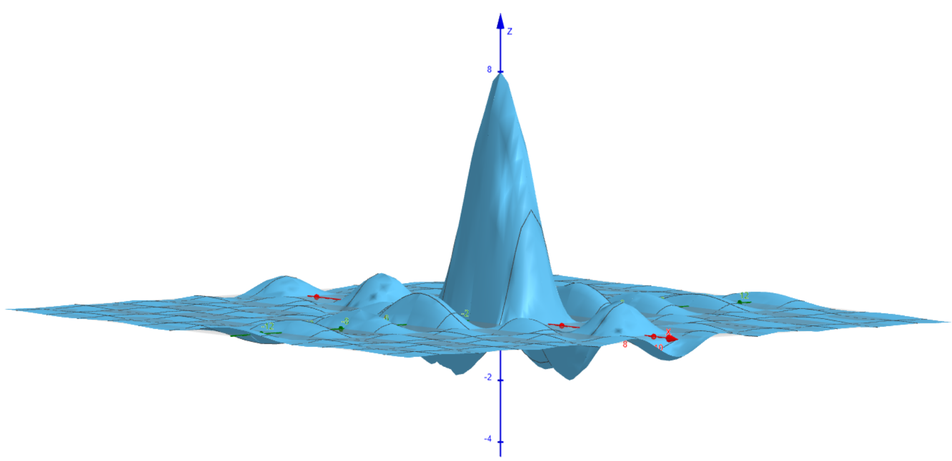
b) $f(x) = x^2 \cdot \chi_{[-1,1]}(x)$

c) $f(x) = (1-x^2) \cdot \chi_{[-1,1]}(x)$

d) $f(x) = \cos x \cdot \chi_{[-\pi,\pi]}(x)$

e) $f(x,y) = \theta(1-|x|) \cdot \theta(2-|y|)$

f) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$



Obrázek 1: Fourierova transformace funkce $f(x,y) = \theta(1-|x|) \cdot \theta(2-|y|)$

2) Dokažte, že funkce $f(x) = e^x \cos(e^x)$ generuje temperovanou distribuci.

Výsledky:

a) $\frac{2}{t}\sin t + \frac{2}{t}\sin 2t$

b) $\frac{2t^2-4}{t^3}\sin t + \frac{4}{t^2}\cos t$

c) $\frac{4}{t^3}\sin t - \frac{4}{t^2}\cos t$

d) $\frac{2t}{1-t^2}\sin(\pi t)$

e) $\frac{4\sin t \sin 2u}{tu}$

f) $\pi e^{-\frac{t^2+u^2}{4}}$

Pro zájemce o teorii pravděpodobnosti: Charakteristickou funkci náhodné veličiny X definujeme jako

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

Má-li veličina X *spojité rozdělení* s hustotou f, pak platí

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{itx}\, dx$$

Charakteristická funkce je tedy **Fourierovou transformací hustoty**.

1) Vypočtěte charakteristickou funkcí náhodné veličiny

a) rovnoměrného rozdělení na intervalu $[-1, 1]$, tj.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

b) exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda > 0$, tj.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

c) normovaného normálního rozdělení, tj.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

d) Laplaceova rozdělení, tj.

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

2) Zkuste přímo z definice dokázat následující vlastnosti charakteristické funkce:

- $\varphi_X(0) = 1$
- $\forall t \in \mathbb{R} \quad |\varphi_X(t)| \leq 1$
- Pokud φ_X je reálná funkce, pak je nutně sudá.
- φ_X je spojitá funkce (snadné), dokonce stejnoměrně spojitá (těžší)