3. minitest RMF

Varianta A

18. 10. 2024

Rozhodněte a zdůvodněte, které z následujících zobrazení $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ jsou zobecněné funkce, tj. prvky $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$.

$$a)\ (f,\varphi) = ||A\vec{x}||_2, \text{ kde A je čtvercová regulární matice řádu 2 a } \vec{x} = (\varphi(0), \varphi'(0))$$

$$b)\ (f,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k)$$

a) Funkcionál není lineární, tedy nejedná se o prvek $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Označme pro $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vektory $\vec{x} = (\varphi_1(0), \varphi_1'(0))$

$\vec{y} = (\varphi_2(0), \varphi_2'(0))$

distributivita

$$(f, \varphi_1 + \varphi_2) = ||A(\vec{x}+\vec{y})|| = ||A\vec{x} + A\vec{y}||$$

$$\neq ||A\vec{x}|| + ||A\vec{y}|| = (f,\varphi_1) + (f,\varphi_2)$$

např. je-li $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a $\vec{x} = (1,0)^T, \vec{y} = (0,1)^T$

pak $||A\vec{x} + A\vec{y}|| = \underbrace{||(1,1)||}_{\sqrt{2}} \neq \underbrace{||(1,0)||}_{1} + \underbrace{||(0,1)||}_{1} = ||A\vec{x}|| + ||A\vec{y}||$

b) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ \exists K > 0\ \operatorname{supp} \varphi \subset (-K, K)$

φ má omezený nosič, tedy $\exists k_0 \in \mathbb{N}, k_0 \geq K : \forall k \geq k_0 :$ $\varphi(k) = 0$

proto $(f,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k) = \sum_{k=1}^{k_0-1} \varphi(k) < +\infty$

$\Rightarrow$ f je tedy dobře definovaný funkcionál na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, ukažme linearitu a spojitost

<u>linearita</u>: pro libovolné $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ a $a, b \in \mathbb{R}$

je $(f, a\varphi_1 + b\varphi_2) = \sum\limits_{\substack{k \le K \\ k \in \mathbb{N}}} (a\varphi_1(k) + b\varphi_2(k))$,

kde $K := \max(K_1, K_2)$, přičemž $\operatorname{supp}\varphi_1 \subset (-K_1, K_1)$
$\operatorname{supp}\varphi_2 \subset (-K_2, K_2)$

$$= a\sum \varphi_1(k) + b\sum \varphi_2(k) = a(f,\varphi_1) + b(f,\varphi_2)$$

<u>spojitost</u>: chceme ukázat, že pro každou posloupnost $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ takovou že $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} 0$

platí: $(f, \varphi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (f, 0)$

nechť $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} 0$, pak $(f,\varphi_k) = \sum\limits_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \le K}} \varphi_k(n)$

$$\lim_{k\to\infty} \underbrace{\sum_{n \le K} \varphi_k(n)}_{\text{konečný součet}} = \sum \underbrace{\lim_{k\to\infty} \varphi_k(n)}_{0} = \sum 0 = 0 = (f,0)$$

$\Rightarrow$ z aritmetiky limit je limita součtu rovna součtu limit, je-li pravá strana definována

3. minitest RMF

Varianta B

18. 10. 2024

Rozhodněte a zdůvodněte, které z následujících zobrazení $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ jsou zobecněné funkce, tj. prvky $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$.

$$a)\,(f,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+|\varphi'(k)|}$$

$$b)\,(f,\varphi) = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\frac{1}{2})\sin\frac{1}{x}}{y^2+1}\,dy\,dx$$

a) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ \exists K>0:\ \operatorname{supp}\varphi \subset (-K,K)$

tj. každá testovací funkce má omezený nosič,

proto $\exists k_0 \in \mathbb{N},\ k_0 \geq K \quad \forall k \geq k_0:\ \varphi(k) = 0$

tedy $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+|\varphi'(k)|} = \underbrace{\sum_{k<K} \frac{1}{1+|\varphi'(k)|}}_{<+\infty} + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{\infty} 1}_{\text{divergentní řada}}$$

tedy nejedná se o zobecněnou funkci, neboť funkcionál není dobře definován

(nebo lze ukázat porušení linearity, např. $(f,2\varphi) \neq 2(f,\varphi)$)

b) $$(f,\varphi) = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\frac{1}{2})\sin(\frac{1}{x})}{y^2+1}\,dy\,dx \overset{\text{FUBINIOVA VĚTA}}{=} \varphi(\tfrac{1}{2}) \cdot \underbrace{\int_0^1 \sin(\tfrac{1}{x})\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2+1}\,dy}_{=:K \in \mathbb{R}}$$

konvergentní integrály

$= K \cdot \varphi(\frac{1}{2}) < +\infty$

linearita: $(f, a\varphi_1 + b\varphi_2) = K \cdot (a\varphi_1(\frac{1}{2}) + b\varphi_2(\frac{1}{2}))$

$= a \cdot K\varphi_1(\frac{1}{2}) + b \cdot K\varphi_2(\frac{1}{2})$

$= a \cdot (f,\varphi_1) + b \cdot (f,\varphi_2)$

Spojitost: Chceme ukázat, že pro každou posloupnost

$\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ takovou, že $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} 0$

platí, že $(f, \varphi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (f, 0)$

Nechť $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, pak $(f, \varphi_k) = K \cdot \varphi_k\left(\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 = (f, 0)$

Jde tedy o spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, takže prvek $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

poznámka: $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ konverguje

neboť integrand je spojitá omezená funkce na $(0,1)$

a platí: $\left| \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \right| \leq \int_0^1 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx$

$\leq \int_0^1 1\, dx = 1$

a $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2+1} dy = [\operatorname{arctg} y]_{-\infty}^{\infty} = \pi$