4. minitest RMF

Varianta A

25. 10. 2024

Definujte pojmy zobecněná funkce a regulární zobecněná funkce. Uveďte příklad regulární i singulární zobecněné funkce.

Lineární spojitý funkcionál $\tilde{f} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ nazveme zobecněnou funkcí (neboli distribucí).

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) ; \operatorname{supp} f \text{ je omezený} \}$

Řekneme, že zobecněná funkce $\tilde{f}$ je regulární, pokud existuje funkce $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ taková, že $(\tilde{f}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$ pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

příklad regulární: $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} x\varphi(x)\,dx$

příklad singulární: $(f, \varphi) = \varphi(0)$

⌈ Řekneme, že $f_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ konvergují k $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ pokud $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}): (f_k, \varphi) \to (f, \varphi)$ ⌋

4. minitest RMF

Varianta B

25. 10. 2024

Definujte pojmy konvergence v $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ a konvergence v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Uveďte příklad posloupnosti funkcí konvergující v $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ a příklad posloupnosti funkcí, která nekonverguje.

Řekneme, že $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ konvergují v $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ k funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; píšeme $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$,

pokud: 1) supp φ_k jsou stejně omezené,

tj. $\exists R>0 \ \forall k \in \mathbb{N}: \operatorname{supp} \varphi_k \subset B_R(0)$

2) $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ na $\mathbb{R}$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{Z}^0_+$

příklady konvergujících: $\varphi_k(x) := a_k \cdot \psi(x)$,

kde a_k je libovolná konvergentní číselná posloupnost a $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

nekonvergující: $\varphi_k(x) = \operatorname{arctg}(kx) \cdot \psi(x)$,

kde $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je taková, že $[-1,1] \subset \operatorname{supp} \psi$,

pak φ_k konvergují k nespojité funkci,

neboť $\lim\limits_{k \to \infty} \operatorname{arctg}(kx) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x<0 \end{cases}$

proto $\varphi_k \to \varphi \notin C(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi_k \not\rightrightarrows \varphi \Rightarrow \varphi_k \not\xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$