Cvičení k předmětu Rovnice matematické fyziky

Matěj Tušek

24. prosince 2020

Abstrakt

Tyto poznámky obsahují řešené příklady ke cvičením z předmětu *Rovnice matematické fyziky*. Jejich výběr vhodně doplňuje přednášku Václava Kliky vedenou na FJFI, ČVUT v Praze.

"Pain is inevitable. Suffering is optional. Say you're running and you think, 'Man, this hurts, I can't take it anymore. The 'hurt' part is an unavoidable reality, but whether or not you can stand anymore is up to the runner himself."

Haruki Murakami

Notace

Prvky $\mathbb{R}^n$ pro $n = 2, 3, \ldots$ budeme značit tučně, např. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

$\cdot$	standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$
$*$	konvoluce
$\lvert x\rvert$	eukleidovská norma, je-li $x \in \mathbb{R}^n$; n–rozměrný objem, je-li x varieta dimenze n; stupeň, je-li x multiindex
$\lVert f\rVert_p$	norma f na $L^p(U,\mu;\mathscr{B})$, $\lVert f\rVert_p^p = \int_U \lVert f(x)\rVert_{\mathscr{B}}^p \mathrm{d}\mu(x)$ pro $p \geqslant 1$ a $\lVert f\rVert_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x\in U}\lvert f(x)\rvert$; bude-li vhodné specifikovat množinu U, použijeme značení $\lVert f\rVert_p \equiv \lVert f\rVert_{L^p(U)}$
G_δ	otevřené δ-okolí množiny $G \subset \mathbb{R}^n$; $G_\delta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(\mathbf{x}, G) < \delta\}$
$B(x,r)$	otevřená koule se středem x a poloměrem r
$C^k(U)$	prostor k–krát spojitě diferencovatelných funkcí na otevřené podmnožině $U \subset \mathbb{R}^n$
$C^\infty(U)$	prostor hladkých funkcí na otevřené podmnožině $U \subset \mathbb{R}^n$
$\mathscr{D}(U)$	prostor testovacích funkcí na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$
$\mathscr{D}'(U)$	duální prostor k $\mathscr{D}(U)$, prostor zobecněných funkcí
dist	vzdálenost množin, tj. pro $A, B \subset \mathbb{R}^n$: $\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{\lvert x-y\rvert : x \in A, y \in B\}$
ω_ε	standardní vyhlazovací funkce
$L^p(U,\mu;\mathscr{B})$	vektorový prostor (tříd ekvivalence skoro všude shodných) funkcí μ–integrovatelných v p–té mocnině na $U \subset \mathbb{R}^n$ s hodnotami v Banachově prostoru $\mathscr{B}$; není-li uvedeno jinak, $\mathscr{B} = \mathbb{R}$ a μ je Lebesgueova míra

$L^\infty(U)$	vektorový prostor (tříd ekvivalence skoro všude shodných) reálných skoro všude omezených funkcí
$\hat{n}$	$:= \{1, 2, \ldots, n\}$
$\mathbb{N}_0$	množina nezáporných celých čísel, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\bar{\mathbb{N}}$	rozšířená množina přirozených čísel, $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
S^n	n–rozměrná sféra poloměru 1, $\|S^n\| = 2\pi^{\frac{n+1}{2}}/\Gamma(\frac{n+1}{2})$
supp	nosič funkce či zobecněné funkce/distribuce

1 Cvičení 1

- Explicitní příklady testovacích funkcí, vyhlazení pomocí konvoluce, základní operace na testovacích funkcích.

Příklad 1.1 (explicitní konstrukce testovacích funkcí)

i. Ukažte, že funkce

$$h(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

je hladká na $\mathbb{R}$.

ii. Využijte funkce h ke konstrukci nějaké netriviální testovací funkce.

iii. Pro a, b splňující $-\infty < a < b < +\infty$ nalezněte testovací funkci s nosičem $[a, b]$. K tomu využijte předchozího bodu.

iv. Promyslete si, že

$$\omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} C_n \mathrm{e}^{-1/(1-|\mathbf{x}|^2)} & |\mathbf{x}| < 1 \\ 0 & |\mathbf{x}| \geqslant 1, \end{cases}$$

kde $C_n \in \mathbb{R}$, leží v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Konvenčně budeme hodnotu C_n volit takovou, aby $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} = 1$.

v. Konečně pro $\varepsilon > 0$ položme $\omega_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-n}\omega(\mathbf{x}/\varepsilon)$. Jaké jsou nosič a L^1-norma funkce ω_ε?

♣ Funkce ω_ε z příkladu výše nazýváme *standardní vyhlazovací funkce.*

Řešení:

i. Funkce h je zřejmě hladká na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Soustřeďme se tedy dále na bod $x = 0$. Jelikož

$$\lim_{x\to 0+} h(x) = 0 = \lim_{x\to 0-} h(x) = h(0),$$

je funkce h spojitá v bodě nula. Dále jsou všechny levostranné derivace funkce h v $x = 0$ nulové. Ukážeme, že to samé platí i pro derivace pravostranné. Začneme první derivací, ta je dána limitou

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t} = \lim_{x\to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Druhou pravostrannou derivaci potom můžeme počítat jako

$$\lim_{t\to 0+} \frac{t^{-2}\mathrm{e}^{-1/t}}{t} = \lim_{x\to +\infty} x^3\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Nulové vyjdou i vyšší pravostranné derivace, protože pro libovolný polynom p platí $\lim_{x\to +\infty} p(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$. Celkem dostáváme $h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

ii. Funkce h má nosič $[0, +\infty)$, nejedná se tedy o funkci testovací. Nicméně například funkce $\varphi(x) = h(x)h(1-x)$ již leží v $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, neboť je dána součinem dvou hladkých funkcí a platí pro ni $\operatorname{supp}(\varphi) = [0, 1]$.

iii. Pomocí afinní transformace $x \mapsto (x-a)/(b-a)$, převedeme interval $[a, b]$ bijektivně na interval $[0, 1]$, tj. na nosič funkce φ z předchozího bodu. Funkce $\varphi_{a,b}(x) := \varphi((x-a)/(b-a))$ má potom požadované vlastnosti. To lze nahlédnouti velice rychle buď přímo či s využitím obecného poznatku, že afinní transformace (s regulární maticí) složená s testovací funkcí dává opět testovací funkci.

iv. Začneme případem $n = 1$. Funkci ω můžeme rozložit jako $\omega(x) = C_1 h(2(x + 1))h(2(1 - x))$, z čehož podobně jako ve druhém bodě dostáváme $\omega \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. V obecném případě (včetně $n = 1$) platí $\omega(\mathbf{x}) = C_n h(1 - |\mathbf{x}|^2)$. Funkce h a $\mathbf{x} \mapsto (1-|\mathbf{x}|^2)$ jsou hladké, tudíž $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dále nosič funkce ω je omezený z definice.

v. Jelikož $\operatorname{supp}(\omega) = B(\mathbf{0}, 1)$, platí $\operatorname{supp}(\omega_\varepsilon) = B(\mathbf{0}, \varepsilon)$. Dále máme

$$\|\omega_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\omega_\varepsilon| = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \omega(\mathbf{x}/\varepsilon)\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} = 1.$$

Příklad 1.2 (vyhlazená charakteristická funkce) *Buďte $\{\omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ třída vyhlazovacích funkcí z příkladu 1.1 a G otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Dále pro libovolné $\delta > 0$ zaveďme δ-okolí množiny G jako*

$$G_\delta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(\mathbf{x}, G) < \delta\}.$$

Potom funkce η_ε definovaná předpisem

$$\eta_\varepsilon := \omega_\varepsilon * \chi_{G_{2\varepsilon}},\ tj.,\ \eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y})\chi_{G_{2\varepsilon}}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}$$

má následující vlastnosti

i. $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

ii. $0 \leqslant \eta_\varepsilon \leqslant 1$,

iii. $\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = 1$ *pro* $x \in G_\varepsilon$,

iv. $\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = 0$ *pro* $x \notin G_{3\varepsilon}$,

v. $(\forall\alpha)(\exists K_\alpha)(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)(|D^\alpha \eta_\varepsilon(\mathbf{x})| \leqslant K_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|})$.

♣ Funkci η_ε z příkladu výše nazýváme *vyhlazená charakteristická funkce množiny G*.

Řešení:

i. Pro spojitost funkce η_ε stačí ukázat, že pro libovolné pevné $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ platí $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \eta_\varepsilon(\mathbf{x_0})$, tj.
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(\mathbf{x_0}-\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}.$$
Chceme tedy zaměnit integrál a limitu. K tomu je dle Lebesgueovy věty nutno najít integrabilní majorantu na $G_{2\varepsilon}$, která bude nezávislá na volbě $\mathbf{x}$ z jistého otevřeného (libovolně malého ale pevně zvoleného) okolí bodu $\mathbf{x_0}$. Za něj můžeme volit například kouli $B(\mathbf{x_0}, 1)$, na které platí odhad
$$(\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x_0},1))(\forall \mathbf{y} \in G_{2\varepsilon})(|\omega_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})| \leqslant \chi_{B(\mathbf{x_0},1+\varepsilon)}(\mathbf{y}) \sup_{\mathbb{R}^n} |\omega_\varepsilon| = C_n\varepsilon^{-n}\chi_{B(\mathbf{x_0},1+\varepsilon)}(\mathbf{y})),$$
přičemž majoranta je zjevně integrabilní. V odhadu jsme využili skutečnost, že nosič funkce $\mathbf{y} \mapsto \omega_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ je koule $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$.

Podívejme se nyní na první parciální derivaci funkce η_ε. Pokud by platilo
$$\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_j} = \int_{G_{2\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x_j}\omega_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y},$$
redukuje se důkaz spojitosti první derivace v bodě $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ na nalezení integrabilní majoranty pro integrand výše na nějakém okolí bodu $\mathbf{x_0}$ (přesněji stači uvažovat okolí j-té komponenty $\mathbf{x_0}$). To je současně kruciální podmínka pro záměnu integrálu a derivace podle parametru (kterým je v našem případě x_j), jež navíc s ostatními předpoklady věty o záměně implikuje existenci derivace integrálu podle parametru, tj. samotnou diferencovatelnost funkce η_ε. Podobně jako v důkaze spojitosti η_ε ale platí
$$(\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x_0},1))(\forall \mathbf{y} \in G_{2\varepsilon})\Big(\Big|\frac{\partial}{\partial x_j}\omega_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Big| \leqslant \chi_{B(\mathbf{x_0},1+\varepsilon)}(\mathbf{y}) \sup_{\mathbb{R}^n} \Big|\frac{\partial}{\partial x_j}\omega_\varepsilon\Big|\Big).$$
Jelikož $\omega_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, dostáváme $\sup_{\mathbb{R}^n} \big|\frac{\partial}{\partial x_j}\omega_\varepsilon\big| < +\infty$. (Funkce $\frac{\partial}{\partial x_j}\omega_\varepsilon$ je totiž spojitá a s kompaktním nosičem. Supremum je dokonce nabýváno.)

U vyšších derivací se postupuje naprosto analogicky.

ii. Pro spodní odhad si připomeňme, že $\omega_\varepsilon \geqslant 0$. Horní odhad dostaneme následovně

$$\eta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leqslant \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z} = 1.$$

iii. Je-li $\mathbf{x} \in G_\varepsilon$, potom v integrálu pro η_ε integrujeme přes celý nosič integrandu, ten se ale integruje na jedničku.

iv. Pro $\mathbf{x}$ vně $G_{3\varepsilon}$ naopak celý nosič funkce $\mathbf{y} \mapsto \omega_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ leží vně integrační oblasti $G_{2\varepsilon}$. V definčním vztahu pro $\eta_\varepsilon(\mathbf{x})$ tak integrujeme čistou nulu.

v. Dle prvního bodu platí

$$D^\alpha \eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = D^\alpha \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{G_{2\varepsilon}} D^\alpha_{\mathbf{x}} \omega_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y},$$

což dále upravíme na

$$D^\alpha \eta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{G_{2\varepsilon}} (D^\alpha \omega_\varepsilon)(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} = \varepsilon^{-n-|\alpha|} \int_{G_{2\varepsilon}} (D^\alpha \omega)\Big(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon}\Big)\mathrm{d}\mathbf{y}$$

Nakonec provedeme následující odhady

$$|D^\alpha \eta_\varepsilon(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon^{-n-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \Big|(D^\alpha \omega)\Big(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\varepsilon}\Big)\Big|\mathrm{d}\mathbf{y} = \varepsilon^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |(D^\alpha \omega)(\mathbf{z})|\mathrm{d}\mathbf{z}.$$

Poslední integrál je konečný, neboť $\omega \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Příklad 1.3 (operace na $\mathscr{D}$) *Pro $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ zaveďme funkci ψ jako*

i. $\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{a})$, *kde* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$,

ii. $\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\alpha\mathbf{x})$, *kde* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

iii. $\psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(\mathbf{x})$, *kde* $j \in \hat{n}$,

iv. $\psi(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$, *kde* $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ukažte, že $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Řešení:

i. Jelikož funkce $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}+\mathbf{a}$ a φ jsou hladké, je hladká i složená funkce ψ. Dále platí $\mathrm{supp}\,(\psi) = \{\mathbf{x}-\mathbf{a} : \mathbf{x} \in \mathrm{supp}\,(\varphi)\}$, tj. nosič funkce ψ se dostane z nosiče funkce φ prostým posunutím o konstantní vektor. Jmenované nosiče jsou tedy omezené právě současně.

ii. Protože funkce $\mathbf{x} \mapsto \alpha\mathbf{x}$ a φ jsou hladké, je hladká i složená funkce ψ. Nosič funkce ψ se dostane škálováním nosiče funkce ψ (smršťováním pro $|\alpha| > 1$, respektive natahováním pro $|\alpha| < 1$), které je v případě $\alpha < 0$ ještě nutno složit s prostorovou inverzí (středovou souměrností podle počátku), protože $\mathrm{supp}\,(\psi) = \{\alpha^{-1}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathrm{supp}\,(\varphi)\}$. Nosiče funkcí φ a ψ jsou tedy opět omezené právě současně.

iii. Libovolná derivace hladké funkce je hladká, speciálně to platí pro funkci ψ. Dále ukážeme, že $\mathrm{supp}\,(\psi) \subset \mathrm{supp}\,(\varphi)$ (může platit i rovnost). Uvažujme $\mathbf{x} \in N := \mathbb{R}^n \backslash \mathrm{supp}\,(\varphi)$. Množina N je z definice nosiče vždy otevřená, tj. existuje $\delta > 0$ s vlastností $B(\mathbf{x}, \delta) \subset N$. Pro libovolné $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta)$ tedy platí $\varphi(\mathbf{y}) = 0$. Potom ale nutně $(\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta))(\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{y}) = 0)$. Odtud dostáváme, že $\mathbf{x} \notin \mathrm{supp}\,(\psi)$. Kdyby totiž naopak $\mathbf{x} \in \mathrm{supp}\,(\psi)$, musel by v libovolném okolí bodu $\mathbf{x}$ existovat bod $\mathbf{y}$ s vlastností $\psi(\mathbf{y}) \neq 0$. Tím jsme odvodili, že $\mathbb{R}^n \backslash \mathrm{supp}\,(\varphi) \subset \mathbb{R}^n \backslash \mathrm{supp}\,(\psi)$, což je ekvivalentní dokazované inkluzi.

iv. Hladkost ψ plyne z pozorování, že součin hladkých funkcí je opět hladký. Navíc zřejmě platí $\mathrm{supp}\,(a\varphi) \subset \mathrm{supp}\,(\varphi)$, protože množina nulových bodů součinu $a\varphi$ se určitě nemůže zmenšit vůči množině nulových bodů funkce φ.

Bonus 1.1 *Standardně definujeme konvergenci na $\mathscr{D}$ následovně. Mějme $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Potom řekneme, že φ_n konverguje k φ v $\mathscr{D}$, značíme $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$, právě tehdy jsou-li následující dvě podmínky splněny: 1. $(\exists R > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\mathrm{supp}\,(\varphi_n) \subset B(\mathbf{0}, R))$; 2. $(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)(D^\alpha\varphi_n \overset{\mathbb{R}^d}{\rightrightarrows} D^\alpha\varphi)$. Lze však užívat definici alternativní: Řekneme, že φ_n konverguje v $\mathscr{D}$, značíme $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}}$, jsou-li následující dvě podmínky splněny: 1. $(\exists R > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\mathrm{supp}\,(\varphi_n) \subset B(\mathbf{0}, R))$; 2. $(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)(D^\alpha\varphi_n \overset{\mathbb{R}^d}{\rightrightarrows})$. V druhé definici* a priori *nepředpokládáme existenci limitní funkce a to, že nutně leží v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Dokažte, že obojí však platí!*

Bonus 1.2 *Na $\mathscr{D}$ jsme zavedli konvergenci přímo. Ve skutečnosti je možné na $\mathscr{D}$ zavést takovou topologii, že konvergence posloupnosti vzhledem k této topologii splývá s výše uvedenou konvergencí. Více k tématu například na `https://terrytao.wordpress.com/2009/04/19/245c-notes-3-distributions/`.*

2 Cvičení 2

- Konvergence testovacích funkcí.

Příklad 2.1 *Rozhodněte zda posloupnost funkcí*

$$\varphi_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-(n|\mathbf{x}|)^2)} & |\mathbf{x}| < 1/n \\ 0 & |\mathbf{x}| \geqslant 1/n, \end{cases}$$

konverguje v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

Řešení: Z příkladu 1.1 víme, že $(\forall n \in \mathbb{N})(\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d))$. Úloha je tedy smysluplně zadaná. Konvergence na $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ v sobě speciálně zahrnuje stejnoměrnou konvergenci na $\mathbb{R}^d$. Jediným možným kandidátem na stejnoměrnou limitu je limita bodová (pokud vůbec exituje), pro kterou dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1} & \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \end{cases}$$

což je nespojitá funkce. Stejnoměrná limita spojitých funkcí by ale byla nutně spojitá. Docházíme k závěru, že posloupnost (φ_n) v $\mathscr{D}$ nekonverguje.

Příklad 2.2 *Nechť posloupnost (φ_n) konverguje na $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Potom*

$$(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)(\exists K_\alpha \geqslant 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\sup_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha \varphi_n| \leqslant K_\alpha).$$

Řešení: Pro $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ označme $\sup_{\mathbb{R}^d} |\psi| =: \|\psi\|_\infty$. Zobrazení $\psi \mapsto \|\psi\|_\infty$ skutečně vyhovuje axiomům normy, speciálně pro něj platí trojúhelníková nerovnost. Jelikož $\varphi_n \overset{\mathscr{D}}{\to} \varphi$ pro nějaké $\varphi \in \mathscr{D}$, můžeme psát $(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)(\lim_{n\to\infty} \|D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi\|_\infty)$. To například znamená, že $(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n > n_1)(\|D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi\|_\infty < 1)$. Z trojúhelníkové nerovnosti odvodíme, že

$$\|D^\alpha \varphi_n\|_\infty \leqslant \|D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi\|_\infty + \|D^\alpha \varphi\|_\infty \leqslant \max\{1\} \cup \{\|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_\infty\}_{j=1}^{n_1} + \|D^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Zbývá pravou stranu označit jako K_α.

♣ Norma zavedená v příkladu výše se nazývá *supremová norma.* V případě testovacích funkcí je supremum dokonce nabýváno, můžeme tedy stejně dobře hovořit o *maximové normě.*

Příklad 2.3 *Zkuste vymyslet nějaké explicitní netriviální, tj. nikoliv od jistého členu konstantní, příklady posloupností konvergujících v $\mathscr{D}$.*

Řešení: Uvedeme několik možných příkladů.

- $(a_n \varphi)_{n=1}^{+\infty}$, kde $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ je libovolná konvergentní číselná posloupnost, $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, a φ je pevný prvek z $\mathscr{D}$. Zřejmě $\operatorname{supp}(a_n\varphi) \subset \operatorname{supp}(\varphi)$. Stejnoměrná konvergence všech derivací plyne z rovnosti

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} |D^\alpha(a_n\varphi(\mathbf{x})) - D^\alpha(a\varphi(\mathbf{x}))| = |a_n - a| \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} |D^\alpha \varphi(\mathbf{x})|,$$

neboť supremum na pravé straně je konečné na základě předpokladu $\varphi \in \mathscr{D}$.

- $(\varphi^n)_{n=1}^{+\infty}$, kde $\varphi \in \mathscr{D}$ je taková, že $(\exists C \in (0,1))(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d)(|\varphi(\mathbf{x})| \leqslant C)$. Zjevně platí $\operatorname{supp}(\varphi^n) = \operatorname{supp}(\varphi)$. Bodová limita φ^n je nulová funkce. Ukážeme, že se jedná dokonce o limitu na $\mathscr{D}$. Stejnoměrnou konvergenci dostáváme z odhadu

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}^d} |\varphi^n - 0| \leqslant \lim_{n\to\infty} C^n = 0.$$

Pro první derivaci dostaneme

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}^d} |\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi^n| = \lim_{n\to\infty} n \sup_{\mathbb{R}^d} |\varphi^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi| \leqslant \lim_{n\to\infty} nC^{n-1} \sup_{\mathbb{R}^d} |\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi| = 0,$$

protože supremum na pravé straně odhadu je konečné díky předpokladu $\varphi \in \mathscr{D}$. Podobně lze postupovat pro vyšší derivace, kdy je výraz pro $D^\alpha\varphi^n$ tvořen konečným součtem (počet členů lze odhadnout v termínech α) členů tvaru

$$b_n\varphi^{n-k}D^{\beta_1}\varphi D^{\beta_2}\varphi \dots D^{\beta_l}\varphi,$$

kde $\lim_{n\to+\infty} b_nC^{n-k} = 0$. Součet odhadneme z trojúhelníkové nerovnosti a každý člen odhadneme analogicky jako pro případ první derivace. (Alternativně dokážeme hypotézu, že $\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbb{R}^d}|D^\alpha\varphi^n| = 0$, pomocí matematické indukce dle stupně derivace.)

- $(\varphi * \omega_{1/n})_{n=1}^{+\infty}$, kde φ je pevný prvek v $\mathscr{D}$ a $\omega_{1/n}$ je standardní vyhlazovací funkce, viz příklad 1.1. Připomeňme, že

$$\varphi_n(\mathbf{x}) := (\varphi * \omega_{1/n})(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\omega_{1/n}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}.$$

Při hledání bodové limity posloupnosti φ_n narážíme na problém, že bodová limita posloupnosti $\omega_{1/n}(\mathbf{x})$ je $+\infty$ pro $\mathbf{x} = 0$ a 0 všude jinde. Kdybychom provedli záměnu limity a integrálu dostaneme jako limitní funkci posloupnosti (φ_n) nulu, což je, jak záhy uvidíme, špatný výsledek. Ostatně to ani neodpovídá již získané intuici, že konvoluce s $\omega_{1/n}$ má vyhlazovací účinek. Je tedy spíše rozumné předpokládat, že limitní funkce je φ samotná. Tu lze přepsat jako $\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\mathbf{x})\omega_{1/n}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}$, protože $\int_{\mathbb{R}^d}\omega_{1/n} = 1$. Z vlastností funkce $\omega_{1/n}$ a věty o přírůstku funkce postupně odvodíme

$$\begin{aligned}|\varphi_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^d}(\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}))\omega_{1/n}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\Big| \\ &\leqslant \int_{B(\mathbf{0},1/n)} |\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x})||\omega_{1/n}(\mathbf{y})|\mathrm{d}\mathbf{y} \leqslant \int_{B(\mathbf{0},1/n)} |\nabla\varphi(\mathbf{z})||\mathbf{y}|\,\omega_{1/n}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y},\end{aligned}$$

kde $\mathbf{z}$ leží někde na úsečce mezi body $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ a jeho volba závisí na konkrétních hodnotách $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Jelikož $\varphi \in \mathscr{D}$, máme $\sup_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^d}|\nabla\varphi(\mathbf{z})| =: C \in \mathbb{R}$. V odhadu tak můžeme pokračovat následovně

$$|\varphi_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \leqslant \frac{C}{n}\int_{B(\mathbf{0},1/n)}\omega_{1/n}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} = \frac{C}{n} \overset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Jelikož horní odhad C/n je nezávislý na $\mathbf{x}$, právě jsme odvodili stejnoměrnou konvergenci φ_n k φ na $\mathbb{R}^d$.

Pokud bychom ukázali, že $D^\alpha(\varphi * \omega_{1/n}) = (D^\alpha\varphi) * \omega_{1/n}$, mohli bychom odvodit i potřebný vztah $D^\alpha\varphi_n \overset{\mathbb{R}^d}{\rightrightarrows} D^\alpha\varphi$ naprosto stejně jako výše, protože $D^\alpha\varphi \in \mathscr{D}$. Podívejme se na první derivaci. Ptáme se tedy, zda platí

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\omega_{1/n}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\omega_{1/n}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y},$$

tj. jestli můžeme zaměnit integrál a derivaci podle parametru (n je nyní fixní). Ta kruciální ze sady postačujících podmínek záměny říká, že musíme najít integrabilní majorantu pro integrand na pravé straně na nějakém okolí parametru x_j (ten je libovolný, protože záměnu chceme provádět na celém $\mathbb{R}$, ale fixní). Velkoryse za toto okolí vezmeme celé $\mathbb{R}$, kde provedeme odhad

$$(\forall x_j \in \mathbb{R})(\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d)\left(\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\omega_{1/n}(\mathbf{y})\right| \leqslant \sup_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^d}\left|\frac{\partial}{\partial z_j}\varphi(\mathbf{z})\right|\chi_{B(\mathbf{0},1/n)}(\mathbf{y})\right).$$

Pravá strana je integrabilní na $\mathbb{R}^d$. Pro vyšší derivace bychom postupovali zcela analogicky.

Zbývá ukázat, že nosiče φ_n jsou stejně omezené. Z integrální definice konvoluce spolu s faktem, že $\operatorname{supp}(\omega_{1/n}) = B(\mathbf{0}, 1/n)$, nahlédneme, že

$$\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset \overline{(\operatorname{supp}(\varphi))_{1/n}}.$$

Připomínáme, že dolním indexem u množiny rozumíme její odpovídající okolí. Všechny nosiče tudíž leží v $\overline{(\operatorname{supp}(\varphi))_1}$.

Bonus 2.1 *Rozhodněte pro jaká $p \in [1, +\infty]$ platí $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Bonus 2.2 *Pro jaké $a \in \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty)$ a jakou otevřenou podmnožinu $G \subset \mathbb{R}^d$ platí $x^{-a} \in L^p(G)$.*

3 Cvičení 3

- Příklady zobecněných funkcí.

Příklad 3.1 *Rozhodněte, zda je následující zobrazení $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ prvkem $\mathscr{D}'$:*

i. $(f, \varphi) = \lim_{x\to 0}\varphi(x)$

ii. $(f, \varphi) = \lim_{x\to \pi}\varphi^{(100)}(x)$

iii. $(f, \varphi) = \varphi(0) + 5.5$

iv. $(f,\varphi)=\int_{\mathbb{R}}\cos(ax)\varphi(x)\mathrm{d}x$ *pro nějaké* $a\in\mathbb{R}$

v. $(f,\varphi)=\lim_{a\to 0+}\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$

vi. $(f,\varphi)=\int_M \nu(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\mathrm{d}S(\mathbf{x})$*, kde* M *je po částech hladká nadplocha v* $\mathbb{R}^d, d\geqslant 2$*, a* $\nu\in L^1(M,\mathrm{d}S)$

vii. $(f,\varphi)=(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi):=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)}\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x.$

Řešení: Připomeňme, že $f\in\mathscr{D}'$ právě tehdy, pokud f je lineární spojité zobrazení na prostoru $\mathscr{D}$. Spojitostí míníme, že f převádí libovolnou konvergentní posloupnost $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathscr{D}$ na konvergentní posloupnost $((f,\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathbb{R}$. Máme-li již dokázanou linearitu, stačí pro libovolné lineární zobrazení dokazovat spojitost v libovolném pevném bodě, za něj bývá výhodné volit nulový vektor, tj. v našem případě nulovou funkci (v $\mathscr{D}$). Níže tedy (φ_n) bude představovat libovolnou posloupnost v $\mathscr{D}$ splňující $\varphi_n\xrightarrow{\mathscr{D}}0$. Pro spojitost lineárního funkcionálu f se budeme snažit ukázat, že $\lim_{n\to 0}(f,\varphi_n)=0$.

i. Jelikož $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\varphi(0)$ pro libovolnou $\varphi\in\mathscr{D}$, dostáváme, že f je Diracova δ-funkce, tedy prvek $\mathscr{D}$–viz přednáška.

ii. Podobně jako výše nahlédneme, že f je stá derivace δ-funkce s nosičem v $x=\pi$. Pro libovolné $\varphi\in\mathscr{D}$ totiž platí

$$(f,\varphi)=\lim_{x\to\pi}\varphi^{(100)}(x)=\varphi^{(100)}(\pi)=(\delta_\pi,\varphi^{(100)})=(-1)^{100}(\delta_\pi^{(100)},\varphi)=(\delta_\pi^{(100)},\varphi).$$

Obecně platí, že libovolná derivace zobecněné funkce je opět zobecněná funkce, viz přednáška, ale zkusme si to v tomto případě ověřit i přímo.

V první řadě z linearity derivace a limity ověříme, že f je lineární. Dále uvažujme libovolnou posloupnost (φ_n) s vlastností $\varphi_n\xrightarrow{\mathscr{D}}0$, tedy speciálně $\varphi_n^{(100)}\overset{\mathbb{R}^d}{\rightrightarrows}0^{(100)}=0$, z čehož již plyne

$$\lim_{n\to\infty}(f,\varphi_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n^{(100)}(\pi)=0.$$

Shrnujeme, že $f\in\mathscr{D}'$.

iii. Zobrazení f není ani lineární, snadno například nahlédneme, že

$$(f,2\varphi)=2\varphi(0)+5.5\neq 2\varphi(0)+11=2(f,\varphi).$$

iv. Jelikož $\cos(ax)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, jedná se o regulární distribuci, tedy nutně prvek $\mathscr{D}'$. Zkusme si to odvodit přímo. Linearitu f dostáváme z linearity integrálu. Pro libovolnou výše popsanou posloupnost (φ_n) máme

$$\lim_{n\to\infty}(f,\varphi_n)=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\cos(ax)\varphi_n(x)=\int_{\mathbb{R}}\cos(ax)\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\int_{\mathbb{R}}0=0.$$

V druhém kroce jsme použili Lebesgueovu větu s integrabilní majorantou $K_0\chi_B$, kde B je taková koule, že $(\forall n\in\mathbb{N})(\operatorname{supp}(\varphi_n)\subset B)$. Existence takové koule je zaručena stejnou omezeností nosičů konvergentní posloupnosti (φ_n). Konstanta K_0 má vlastnost, že $(\forall n \in \mathbb{N})(\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_n| \leqslant K_0)$. Její existenci jsme odvodili v příkladě 2.2.

v. Předpis pro f upravíme následovně

$$\lim_{a \to 0+} \int_a^{+\infty} \varphi(x) \mathrm{d}x = \lim_{a \to 0+} \int_0^{+\infty} \chi_{(a,+\infty)} \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{a \to 0+} \chi_{(a,+\infty)} \varphi(x) \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{+\infty} \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(0,\infty)}(x) \varphi(x) \mathrm{d}x = (\chi_{(0,\infty)}, \varphi).$$

Zde jsme v druhé rovnosti aplikovali Lebesgueovu větu s integrabilní majorantou $\sup_{\mathbb{R}} |\varphi| \ \chi_{\operatorname{supp}(\varphi)}(x)$. Odtud $f = \chi_{(0,\infty)}$ jako funkcionál na $\mathscr{D}$, kde po částech konstatní funkce $\chi_{(0,\infty)}$ je zřejmě lokálně integrabilní, a tudíž se jedná o regularní distribuci.

vi. Linearita f je důsledkem linearity integrálu. Nechť $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$. Potom

$$\lim_{n \to \infty} (f, \varphi_n) = \lim_{n \to \infty} \int_M \nu(\mathbf{x}) \varphi_n(\mathbf{x}) \mathrm{d}S(\mathbf{x}) = \int_M \nu(\mathbf{x}) \lim_{n \to \infty} \varphi_n(\mathbf{x}) \mathrm{d}S(\mathbf{x}) = 0.$$

V druhé rovnosti jsme opět použili Lebesgueovu větu, tentokrát s integrabilní majorantou $K_0|\nu|$, kde K_0 je konstanta z příkladu (2.2).

vii. Nejprve si upravíme integrál v definici f následujícím způsobem

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{1}{x} \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \mathrm{d}x, \quad (1)$$

kde jsme v prvním integrálu substituovali $x \mapsto -x$. Integrál na pravé straně si dále přepíšeme jako

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \chi_{(\varepsilon,+\infty)}(x) \ \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Pro takto zapsaný integrand jsme již schopni najít integrabilní majorantu nezávislou na ε (všimněte si, že pro původní integrál to není možné). Konkrétně máme

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in (0,+\infty))\left(\left| \chi_{(\varepsilon,+\infty)}(x) \ \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| \leqslant \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| \right).$$

Věta o přírůstku funkce říká, že existuje $\xi_x \in (-x, x)$ takové, že $\varphi(x) - \varphi(-x) = \varphi'(\xi_x) 2x$. Horní odhad ve vztahu výše je tedy omezený. Spolu s omezeností $\operatorname{supp}(\varphi)$ nám toto implikuje, že

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \in L^1((0,+\infty), \mathrm{d}x). \quad (2)$$

Po záměně limity a integrálu v (1) dostáváme

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Linearita funkcionálu $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ je zjevná. Prozkoumejme nyní jeho spojitost. Nechť $\varphi_n \overset{\mathscr{D}}{\to} 0$. Potom z Lebesgueovy věty odvodíme

$$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi_n) = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{x}\mathrm{d}x = 0.$$

Zde jsme integrabilní majorantu nalezli pomocí odhadu $(\forall n \in N)\,(\forall x \in (0,+\infty))$

$$\left|\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{x}\right| = 2|\varphi_n'(\xi_{x,n})| \leqslant 2K_1\chi_B(x),$$

kde hodnota $\xi_{x,n} \in (-x,x)$ pochází z věty o přírůstku funkce, K_1 je zavedeno v příkladě 2.2 a B je koule (zde konkrétně interval) se středem v počátku obsahující nosiče všech funkcí φ_n (a tedy i nosiče jejich derivací). Celkem jsme tedy dokázali, že $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

♣ Zobecněná funkce zavedená v bodě *vi.* předchozího příkladu se nazývá *jednoduchá vrstva* a značí se $\nu\delta_S$. Zobecněná funkce $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ je tzv. *regularizací* $\frac{1}{x}$ *ve smyslu hlavní hodnoty* (anglicky *principal value*).

Příklad 3.2 *Zjednodušte v $\mathscr{D}'$ výraz $x\mathcal{P}\frac{1}{x}$.*

Řešení: Pro libovolnou $\varphi \in \mathscr{D}$ platí

$$\begin{aligned}(x\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi) &= (\mathcal{P}\frac{1}{x},x\varphi(x)) = \int_0^{+\infty}\frac{x\varphi(x)-(-x)\varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty}\varphi(x)+\varphi(-x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} 1\varphi(x)\mathrm{d}x = (1,\varphi).\end{aligned}$$

Zde jsme využili vztah (3). Dospíváme k závěru, že na $\mathscr{D}'$ platí $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$.

4 Cvičení 4

- Sochockého vzorce, operace se zobecněnými funkcemi, limita poslupnosti zobecněných funkcí.

Příklad 4.1 *Připomeňte si další možné regularizace $\frac{1}{x}$ na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ dané jako*

$$(\frac{1}{x\pm i0},\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0+}(\frac{1}{x\pm i\varepsilon},\varphi) \quad (\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}))$$

a dokažte platnost tzv. Sochockého vzorců*:*

$$\boxed{\frac{1}{x\pm i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\delta}.$$

Řešení: Pro libovolné $\varphi \in \mathscr{D}$ a $\varepsilon > 0$ provedeme následující úpravy

$$\begin{aligned}(\frac{1}{x \pm i\varepsilon}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} \mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} - \frac{\varphi(-x)}{x \mp i\varepsilon} \mathrm{d}x \\ = \int_{0}^{+\infty} \frac{x(\varphi(x) - \varphi(-x))}{x^2 + \varepsilon^2} \mathrm{d}x \mp i\varepsilon \int_{0}^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x^2 + \varepsilon^2} \mathrm{d}x\end{aligned}$$

a limitu pro $\lim_{\varepsilon \to 0+} (\frac{1}{x \pm i\varepsilon}, \varphi)$ spočteme zvlášť pro reálnou a imaginární část. Jelikož $(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall x > 0)$

$$\left| \frac{x(\varphi(x) - \varphi(-x))}{x^2 + \varepsilon^2} \right| \leqslant \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right|,$$

kde horní odhad je integrabilní na $(0, +\infty)$–viz (2), dostáváme z Lebesgueovy věty, že

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{0}^{+\infty} \frac{x(\varphi(x) - \varphi(-x))}{x^2 + \varepsilon^2} \mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \mathrm{d}x = (\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi).$$

Dále přepíšeme imaginární část $(\frac{1}{x \pm i\varepsilon}, \varphi)$ jako

$$\begin{aligned}\mp \varepsilon \int_{0}^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{x^2 + \varepsilon^2} \mathrm{d}x = \mp\varepsilon \left(\int_{0}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{\varphi(-x)}{x^2 + \varepsilon^2} \mathrm{d}x \right) \\ = \mp\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} \mathrm{d}x = \mp \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\varepsilon x)}{1 + x^2} \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Pomocí Lebesgueovy věty, kde za integrabilní majorantu vezmeme $\sup_{\mathbb{R}} |\varphi|\ (1 + x^2)^{-1}$, potom snadno odvodíme

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \mp \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\varepsilon x)}{1 + x^2} \mathrm{d}x = \mp \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(0)}{1 + x^2} = \mp\pi\varphi(0) = \mp\pi(\delta, \varphi).$$

Celkem jsme tak dokázali

$$(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\frac{1}{x \pm i\varepsilon}, \varphi) = (\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) \mp i\pi(\delta, \varphi),$$

jinými slovy na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ platí Sochockého vzorce.

Příklad 4.2 *Pro $n \in \mathbb{N}$ nalezněte $(x^n)'$ v $\mathscr{D}'$.*

Řešení: Nejprve si uvědomme, že úloha má smysl, neboť x^n, $n \in \mathbb{N}$, je regulární zobecněná funkce. Buď nyní $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ libovolná, potom

$$\begin{aligned}((x^n)', \varphi) = -(x^n, \varphi') = -\int_{\mathbb{R}} x^n \varphi'(x) \mathrm{d}x = -[x^n \varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} n x^{n-1} \varphi(x) \mathrm{d}x \\ = \int_{\mathbb{R}} n x^{n-1} \varphi(x) \mathrm{d}x = (n x^{n-1}, \varphi).\end{aligned}$$

Zde hraniční člen v integraci per–partes vyšel nulový díky omezenosti $\operatorname{supp}(\varphi)$. I slepý nyní vidí, že na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ platí $(x^n)' = n x^{n-1}$, stejně jako v případě klasických funkcí.

Příklad 4.3 *Dokažte, že na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ platí $\delta_{x_0}(x) = \delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$.*

Řešení: Pro libovolnou testovací funkci φ platí

$$\begin{aligned}(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x + x_0)) = \varphi(x_0) = (\delta_{x_0}, \varphi)\\ = (\delta(x), \varphi(x_0 - x)) = (\delta(x_0 - x), \varphi(x)),\end{aligned}$$

z čehož obdržíme dokazovanou rovnost.

Příklad 4.4 *Upravte na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ výraz $x^2\delta''(x)$.*

Řešení: Pro libovolnou testovací funkci φ platí

$$(x^2\delta''(x), \varphi(x)) = (\delta''(x), x^2\varphi(x)) = (\delta(x), 2\varphi(x) + 4x\varphi'(x) + x^2\varphi''(x)) = (2\delta(x), \varphi(x))$$

a tudíž $x^2\delta''(x) = 2\delta(x)$.

Příklad 4.5 *Upravte na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ výraz $x^n\delta^{(k)}(x)$, kde $n, k \in \mathbb{N}$.*

Řešení: Pro libovolné $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ dostáváme

$$\begin{aligned}(x^n\delta^{(k)}(x), \varphi(x)) &= (\delta^{(k)}(x), x^n\varphi(x)) = (-1)^k(\delta(x), (x^n\varphi(x))^{(k)})\\ &= (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Big((x^n)^{(j)}\varphi^{(k-j)}(x)\Big)\Big|_{x=0} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n > k\\ (-1)^k\binom{k}{n}n!\varphi^{(k-n)}(0) & \text{pro } n \leqslant k.\end{cases}\end{aligned}$$

Ve výsledku pro druhou alternativu dále provedeme následující úpravy

$$\binom{k}{n}n!\varphi^{(k-n)}(0) = \frac{k!}{(k-n)!}\varphi^{(k-n)}(0) = \frac{k!}{(k-n)!}(\delta, \varphi^{(k-n)}) = \frac{(-1)^{k-n}k!}{(k-n)!}(\delta^{(k-n)}, \varphi).$$

Můžeme tedy psát

$$x^n\delta^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n > k\\ \frac{(-1)^n k!}{(k-n)!}\delta^{(k-n)} & \text{pro } n \leqslant k.\end{cases}$$

Příklad 4.6 *Spočtěte první tři derivace v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ zobecněné funkce $f(x) = \cos(x)|x|$.*

Řešení: Všimněme si, že regulární zobecněná funkce f je součinem hladké funkce $\cos(x)$ s funkcí $|x|$, která je diferencovatelná všude na $\mathbb{R}$ vyjma bodu $x = 0$. Na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ přitom platí $|x|' = \operatorname{sgn}(x)$. Z Leibnizova pravidla potom máme

$$f'(x) = -\sin(x)|x| + \cos(x)\operatorname{sgn}(x).$$

Podobně dostaneme

$$
\begin{aligned}
f''(x) = &-\cos(x)|x| - \sin(x)\,\mathrm{sgn}(x) - \sin(x)\,\mathrm{sgn}(x) + \cos(x)2\delta(x) \\
&= -\cos(x)|x| - 2\sin(x)\,\mathrm{sgn}(x) + 2\delta(x).
\end{aligned}
$$

Zde jsme využili poznatků, že $\mathrm{sgn}(x)' = \{0\} + 2\delta(x)$ a pro libovolnou $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ platí $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$. Pomocí daru přítele Leibnize spočítáme i třetí derivaci jako

$$f'''(x) = \sin(x)|x| - 3\cos(x)\,\mathrm{sgn}(x) + 2\delta'(x).$$

Příklad 4.7 *Spočtěte na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ limitu $\lim_{n\to\infty} nf(nx)$ s volbou $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$.*

Řešení: Připomeňme, že posloupnost zobecněných funkcí (f_n) má limitu $f \in \mathscr{D}'$ právě tehdy, pokud $(\forall \varphi \in \mathscr{D})(\lim_{n\to\infty}(f_n, \varphi) = (f, \varphi))$. Jelikož zadaná posloupnost je tvořena regulárními zobecněnými funkcemi, působí na testovací funkce skrze integrál. Ten upravíme pomocí substituce $x \mapsto \frac{x}{n}$,

$$(n\chi_{(-1,1)}(nx), \varphi(x)) = n\int_{\mathbb{R}} \chi_{(-1,1)}(nx)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-1,1)}(x)\varphi(\frac{x}{n})\mathrm{d}x.$$

Limitu výrazu na pravé straně vypočteme pomocí Lebesgueovy věty s integrabilní majorantou $\sup_{\mathbb{R}} |\varphi|\ \chi_{(-1,1)}(x)$ jako

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-1,1)}(x)\varphi(\frac{x}{n})\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-1,1)}(x)\varphi(0)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-1,1)}(x)\mathrm{d}x\ (\delta, \varphi) = (2\delta, \varphi).$$

Na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tedy platí rovnost $\lim_{n\to\infty} nf(nx) = 2\delta$.

♣ Všimněme si, že v řešení výše jsme použili pouze skutečnost, že $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pro obecné f s touto vlastností potom platí $\lim_{n\to\infty} nf(nx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x\ \delta$. Pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ obdržíme podobný vztah $\lim_{n\to\infty} n^d f(n\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\ \delta_{\mathbf{0}}$. Zřejmou obměnou lze odvodit, že $\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^{-d} f(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\ \delta_{\mathbf{0}}$.

Příklad 4.8 *Pomocí výsledku předchozího příkladu sestrojte posloupnost zobecněných funkcí konvergující na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ k δ'.*

Řešení: Stačí si uvědomit, že pokud $\lim f_n = f$ na $\mathscr{D}'$, potom i $\lim D^\alpha f_n = D^\alpha f$ na $\mathscr{D}'$. Pro libovolné $\varphi \in \mathscr{D}$ totiž máme

$$\lim_{n\to\infty}(D^\alpha f_n, \varphi) = (-1)^\alpha \lim_{n\to\infty}(f_n, D^\alpha\varphi) = (-1)^\alpha(f, D^\alpha\varphi) = (D^\alpha f, \varphi).$$

Na $\mathscr{D}'$ je tedy vždy možno zaměnit limitu a derivaci!

Pokud konkrétně volíme $f_n(x) = n\chi_{(-1,1)}(nx) = n\chi_{(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})}(x)$, potom

$$f_n'(x) = n(\delta_{-\frac{1}{n}}(x) - \delta_{\frac{1}{n}}(x)) = \frac{\delta(x+\frac{1}{n}) - \delta(x-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

a současně s využitím výsledku předchozího příkladu platí $\lim_{n\to\infty} f_n' = 2\delta'$ na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Nyní je i mrtvému jasné, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{\delta(x+\frac{1}{n}) - \delta(x-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \delta'(x) \quad \text{na } \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

Příklad 4.9 *Nalezněte limitu* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos(nx)$ *na* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Řešení: Pro libovolné $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ platí

$$|(\frac{1}{n}\cos(nx),\varphi)| = \Big|\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n}\cos(nx)\varphi(x)\mathrm{d}x\Big| \leqslant \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\mathrm{d}x,$$

a tedy $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\cos(nx),\varphi) = 0$, což znamená, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos(nx) = 0$ na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Příklad 4.10 *Nalezněte limitu* $\lim_{n\to\infty} n\cos(nx)$ *na* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Řešení: Označíme posloupnost z předchozího příkladu jako $f_n(x) = \frac{1}{n}\cos(nx)$ a povšimneme si, že $f_n''(x) = -n\cos(nx)$. Ze záměnosti limity a derivace na $\mathscr{D}'$ tak dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} n\cos(nx) = -\lim_{n\to\infty} f_n''(x) = -(\lim_{n\to\infty} f_n)'' = -0'' = 0$$

na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

♣ Porovnejte tento výsledek s výsledkem příkladu 4.7 a za ním následujícím komentářem. Zdánlivý nesoulad je ozřejmen pozorováním, že $\cos(x) \notin L^1(\mathbb{R})$. Podobně jako výše bychom na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ ukázali i vztahy

$$\lim_{n\to\infty} n^k\cos(nx) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} n^k\sin(nx) = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{Z}).$$

5 Cvičení 5

- Nosič zobecněných funkcí, tenzorový součin zobeněných funkcí.

♣ Pro otevřenou podmnožinu $U \subset \mathbb{R}^d$ budeme symbolem $\mathscr{D}(U)$ rozumět vektorový prostor hladkých funkcí na U s nosičem v U. Rozšíříme-li takové funkce na celé $\mathbb{R}^d$ nulou, dostaneme prvky $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Buď totiž například $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ a $V := \operatorname{supp}\varphi$. Potom v U leží celé nějaké ε–okolí množiny V (to si zapišme jako množinu $V_\varepsilon := \bigcup_{x\in V} B(x,\varepsilon)$). Předpokládejme opak. Potom pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in V$ tak, že $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U$. Vzhledem ke kompaktnosti V lze z (x_n) vybrat konvergentní podposloupnost (x_{k_n}). Označme její limitu $x \in V \subset U$. Jelikož U je otevřená, existuje $\delta > 0$ tak, že $B(x,\delta) \subset U$. Od jistého indexu n_δ výše ale platí $B(x_{k_n}, \frac{1}{k_n}) \subset B(x,\delta) \subset U$, což je spor. Dokázali jsme tedy, že nosič funkce φ je "odražen"od hranice množiny U. Rozšíření φ nulou si tedy zachová hladkost i při přechodu přes tuto hranici.

Naopak libovolné $\varphi \in \{\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp}(\varphi) \subset U\}$ lze zúžit na U a získat tak jednoznačně určený prvek prostoru $\mathscr{D}(U)$. Proto se běžně identifikují množiny $\{\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp}(\varphi) \subset U\}$ a $\mathscr{D}(U)$. Tak to budeme v zájmu zkrácení zápisu činit i my.

Příklad 5.1 *Nalezněte zobecněný nosič funkce δ_{x_0}, kde $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Řešení: Připomeňme, že $\operatorname{supp}\delta_{x_0} = \mathbb{R}\backslash\mathcal{N}$, kde $\mathcal{N}$ je největší (ve smyslu inkluze) otevřená množina, na které platí

$$(\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{N}))(\delta_{x_0}, \varphi) = 0. \tag{4}$$

Jelikož $(\delta_{x_0}, \varphi) = \varphi(x_0)$, nabízí se volit $\mathcal{N} = \mathbb{R}\backslash\{x_0\}$. Potom skutečně platí (4). Jediná větší množina než $\mathcal{N}$ je $\mathbb{R}$, pro kterou ale (4) s $\mathbb{R}$ namísto $\mathcal{N}$ již neplatí. Stačí volit nějaké $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ nenulové v x_0.

Příklad 5.2 *Nalezněte zobecněný nosič funkce $\theta(x)x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, a porovnejte jej s klasickým nosičem.*

Řešení: Klasický nosič funkce $f(x) := \theta(x)x^n$ je $[0,+\infty)$. To nám dává rozumného kandidáta na nosič zobecněný. Ověříme tedy hypotézu, že nulová množina $\mathcal{N}$ zobecněné funkce f je dána intervalem $(-\infty, 0)$. V první řadě má platit, že $(\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{N}))((f,\varphi) = 0)$. To ale plyne z pozorování

$$(f,\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x)x^n\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{(0,+\infty)\cap\operatorname{supp}(\varphi)} x^n\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\varnothing} x^n\varphi(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Libovolnou otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}$ lze napsat jako sjednocení otevřených intervalů. Tudíž libovolný kandidát na větší nulovou množinu obsahuje množinu tvaru $\mathcal{N}' := \mathcal{N} \cup (a,b)$, kde $(a,b) \not\subset \mathcal{N}$. Buď $P := (a,b) \cap (0,+\infty)$. Potom P je z konstrukce otevřená neprázdná podmnožina $(0,+\infty)$ Vezmeme-li nyní libovolné nezáporné $\varphi \in \mathscr{D}(P)\backslash\{0\} \subset \mathscr{D}(\mathcal{N}')\backslash\{0\}$, dostáváme

$$(f,\varphi) = \int_{(0,+\infty)\cap\operatorname{supp}(\varphi)} x^n\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_P x^n\varphi(x)\mathrm{d}x > 0,$$

tj. $\mathcal{N}'$ není nulovou množinou zobecněné funkce f. Zobecněný nosič tedy splývá s tím klasickým.

♣ Pro $f \in \mathscr{D}'_{\text{reg}}(\mathbb{R}^d)$ lze podobně jako výše odvodit, že zobecněný nosič f splývá s tzv. *esenciálním nosičem* funkce f. Ten lze definovat následovně

$$\text{ess supp}\,(f) := \mathbb{R}^d \backslash \{x \in \mathbb{R}^d : (\exists \text{ okolí } U_x)(f(x) = 0 \text{ s.v. na } U_x)\}.$$

Všimněte si, že definice je smysluplná, nezávisí totiž na volbě konkrétního reprezentanta $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Příklad 5.3 *Nalezněte zobecněný nosič funkce* $\mathcal{P}\frac{1}{x}$.

Řešení: Nosič klasické funkce $x \mapsto \frac{1}{x}$ je celé $\mathbb{R}$. Jako vhodný kandidát na nulovou množinu zobecněné funkce $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ se tak nabízí $\mathcal{N} = \emptyset$. Podmínku nulovosti splňuje triviálně. Podívejme se na podmínku maximality. Libovolná větší otevřená podmnožina v $\mathbb{R}$ obsahuje neprázdný otevřený interval, řekněmě (a, b). Pro takový pevně zvolený interval určitě existuje $\varepsilon_0 > 0$ s vlastností, že rozdíl $(a, b)\backslash(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ obsahuje neprázdný otevřený interval P, který navíc leží v jedné z poloos $(-\infty, 0)$ nebo $(0, +\infty)$. Pro libovolné nezáporné $\varphi \in \mathscr{D}(P)\backslash\{0\} \subset \mathscr{D}((a, b))\backslash\{0\}$, dostáváme

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x = \int_P \frac{\varphi(x)}{x} \neq 0,$$

protože spojitý integrand je všude na P buď nezáporný nebo nekladný a současně není na P identicky nulový.

Příklad 5.4 *Dokažte na* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ *identitu* $\delta(x) \otimes \delta(y) = \delta(x, y)$.

Řešení: Pro libovolné $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ postupně dostáváme

$$(\delta(x)\otimes\delta(y), \varphi(x, y)) = (\delta(x), (\delta(y), \varphi(x, y))) = (\delta(x), \varphi(x, 0)) = \varphi(0, 0) = (\delta(x, y), \varphi(x, y)),$$

z čehož již plyne dokazovaný vztah.

♣ Říkáme, že $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, ležící v $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ *nezávisí na* $\mathbf{y}$ právě tehdy, pokud existuje $h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ takové, že $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{x}) \otimes 1$.

Příklad 5.5 *Dokažte, že pokud* $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ *nezávisí na* x_k*, potom* $\partial_{x_k} f = 0$.

Řešení: Jelikož f nezávisí na x_k, existuje podle definice $h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{d-1})$ s vlastností, že $f = h \otimes 1$, kde konstantní regulární distribuce 1 působí v proměnné x_k. Pro libovolnou $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ tak máme

$$(\frac{\partial f}{\partial x_k}, \varphi) = -(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) = -(h \otimes 1, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) = -(h, (1, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k})) = (h, (\frac{\partial 1}{\partial x_k}, \varphi)) = (h, 0) = 0,$$

tj. $\partial_{x_k} f = 0$.

Alternativně a ještě rychleji dostaneme stejný výsledek z vlastností tenzorového součinu, protože

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \partial_{x_k}(h \otimes 1) = h \otimes \partial_{x_k} 1 = h \otimes 0 = 0.$$

Příklad 5.6 *Pro $f \in C^2(\mathbb{R}^{1+n})$ označme $f_{\theta_t}(t,\mathbf{x}) = \theta(t)f(t,\mathbf{x})$. Spočtěte $\partial_t f_{\theta_t} + \Delta f_{\theta_t}$.*

Řešení: Laplacián Δ se skládá z parciálních derivací v prostorových proměnných. Pro fixní t je ale funkce f_{θ_t} vždy třídy $C^2(\mathbb{R}^n)$. Platí tedy $\Delta f_{\theta_t}(t,x) = \theta(t)\Delta f(t,x)$. V proměnné t však může mít funkce f_{θ_t} skok. Spočítáme tedy odpovídající zobecněnou derivaci opatrně přímo z definice. Pro libovolnou $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{1+n})$ pomocí Fubiniho věty a následné integrace per partes dostaneme

$$
\begin{aligned}
(\partial_t f_{\theta_t}(t,\mathbf{x}), \varphi(t,\mathbf{x})) &= -(f_{\theta_t}(t,\mathbf{x}), \partial_t\varphi(t,\mathbf{x})) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^{1+n}} \theta(t)f(t,\mathbf{x})\partial_t\varphi(t,\mathbf{x})\mathrm{d}t\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty} f(t,\mathbf{x})\partial_t\varphi(t,\mathbf{x})\mathrm{d}t\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} [f(t,\mathbf{x})\varphi(t,\mathbf{x})]_{t=0}^{+\infty}\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty} \partial_t f(t,\mathbf{x})\varphi(t,\mathbf{x})\mathrm{d}t\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(0,\mathbf{x})\varphi(0,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty} \partial_t f(t,\mathbf{x})\varphi(t,\mathbf{x})\mathrm{d}t\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= (\delta(t), \int_{\mathbb{R}^n} f(0,\mathbf{x})\varphi(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}) + \int_{\mathbb{R}^{1+n}} \theta(t)\partial_t f(t,\mathbf{x}))\varphi(t,\mathbf{x})\mathrm{d}t\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\qquad = (\delta(t) \otimes f(0,\mathbf{x}), \varphi(t,\mathbf{x})) + (\theta(t)\partial_t f(t,\mathbf{x}), \varphi(t,\mathbf{x})).
\end{aligned}
$$

Na $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{1+n})$ tedy platí

$$
(\partial_t f_{\theta_t} + \Delta f_{\theta_t})(t,\mathbf{x}) = \theta(t)\left(\partial_t f + \Delta f\right)(t,\mathbf{x}) + \delta(t) \otimes f(0,\mathbf{x}).
$$

6 Cvičení 6

- Konvoluce klasických a zobecněných funkcí.

Bonus 6.1 (Youngova nerovnost pro klasickou konvoluci) *Buď $p, q \geqslant 1$ a $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, potom funkce*

$$
\mathbf{x} \mapsto (f * g)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}
$$

leží v $L^{r'}(\mathbb{R}^d)$, kde r' je dáno vztahem $r'^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - 1$, přičemž existuje konstanta $C(p,q,d)$ nezávislá na konkrétní volbě funkcí f a g taková, že platí Youngova nerovnost

$$
\|f * g\|_{r'} \leqslant C(p,q,d)\|f\|_p\|g\|_q.
$$

Zejména potom platí, že konvoluce dvou funkcí z prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$ zůstává v $L^1(\mathbb{R}^d)$. Důkaz Youngovy nerovnosti spolu s dalšími detaily lze nalézt například na
http://people.math.gatech.edu/~loss/10springtea/Lecture1.pdf
nebo
https://qnlw.info/post/youngs-inequality/.

Příklad 6.1 *Pro $f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$, kde $a > 0$, spočtěte klasickou konvoluci $f * f$.*

Řešení: Přímým výpočtem provedeme následující integraci

$$(f*f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-a(x-y)^2}\mathrm{e}^{-ay^2}\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-ax^2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2ay^2+2axy}\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-ax^2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2a(y-\frac{x}{2})^2+\frac{a}{2}x^2}\mathrm{d}y$$
$$= \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x^2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2ay^2}\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x^2}.$$

Příklad 6.2 *Pro $f(x) = \theta(a - |x|)$, kde $a > 0$, spočtěte klasickou konvoluci $f * f$.*

Řešení: Jelikož nosič funkce $y \mapsto \theta(a - |y|)$ je interval $[-a, a]$ a nosič funkce $y \mapsto \theta(a - |x - y|)$ je interval $[x - a, x + a]$, dostáváme

$$(f * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \theta(a - |x - y|)\theta(a - |y|)\mathrm{d}y = \begin{cases} 0 & |x| \geqslant 2a \\ a - (x - a) = 2a - x & x \in (0, 2a) \\ x + a - (-a) = 2a + x & x \in (-2a, 0), \end{cases}$$

což znamená, že $(f * f)(x) = \theta(2a - |x|)(2a - |x|)$.

Bonus 6.2 *Ukažte, že $e^{-ax^2} * \chi_{[-1,1]}(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

♣ Po martýriu na přednášce víme, že pro dvě zobecněné funkce f a g s kompaktními nosiči lze *konvoluci* zavést jako

$$((f * g)(x), \varphi(x)) := (f(x), (g(y), \varphi(x + y))) \quad (= \text{“}(f(x) \otimes g(y), \varphi(x + y))\text{”}).$$

S touto definicí je konvoluce komutativní, asociativní, spojitá v obou argumentech (nikoliv však současně-viz příklad 6.5) a derivaci lze přetáhnout na libovolnou z dvojice funkcí, jejichž konvoluci počítáme. Poslední z jmenovaných vlastností si záhy dokážeme.

Příklad 6.3 *Buďte $f, g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ s kompaktním nosičem. Dokažte, že platí $(f * g)' = f' * g = f * g'$.*

Řešení: Pro libovolnou $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ platí

$$((f * g)', \varphi) = -(f * g, \varphi') = -(f(x), (g(y), \varphi'(x + y))) = -(f(x), (g(y), \partial_y\varphi(x + y)))$$
$$= (f(x), (\partial_y g(y), \varphi(x + y))) = (f(x), (g'(y), \varphi(x + y))) = (f * g', \varphi),$$

tj. $(f * g)' = f * g'$. Zde jsme v poslední rovnosti využili definice konvoluce pro zobecněné funkce s kompaktním nosičem. Musíme si tedy rozmyslet, že $\operatorname{supp} g'$ je omezený, má-li tuto vlastnost $\operatorname{supp} g$.

Buď tedy $\mathcal{N}$ nějaká nulová množina zobecněné funkce g, tzn. $(\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{N}))((g, \varphi) = 0)$. Pro libovolné $\varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{N})$ potom platí $(g', \varphi) = -(g, \varphi') = 0$, tedy $\mathcal{N}$ je i nulová množina zobecněné funkce g'. Odtud již plyne inkluze $\operatorname{supp} g' \subset \operatorname{supp} g$, speciálně je tedy $\operatorname{supp} g'$ skutečně omezený.

Identita $(f * g)' = f' * g$ plyne z předchozího v kombinaci s komutativitou konvoluce.

Příklad 6.4 (užití konvolucí k řešení ODR v $\mathscr{D}'$) *Uvažujme lineární diferenciální operátor $L = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}$ s konstantními koeficienty a_k a s $a_n = 1$. Dále $z \in C^\infty(\mathbb{R})$ buď klasické řešení homogenní rovnice $Lz = 0$ s počáteční podmínkou $z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-2)}(0) = 0$ a $z^{(n-1)}(0) = 1$. Dokažte, že $\mathcal{E}(x) := \theta(x)z(x)$ je* fundamentální řešení *L v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, tj. na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ platí identita $L\mathcal{E} = \delta$.*

Řešení: Zobecněnou funkci $\mathcal{E}$ budeme chápat jako součin hladké funkce $z(x)$ s po částech spojitou a po částech diferencovatelnou funkcí θ. S použitím Leibnizova pravidla tak dostaneme $\mathcal{E}' = z'\theta + z\delta = z'\theta + z(0)\delta = z'\theta$, kde poslední rovnost plyne z podmínky $z(0) = 0$. Podobně odvodíme, že $\mathcal{E}^{(k)} = z^{(k)}\theta$ pro všechna $k = 2, 3, \ldots n-1$ a $\mathcal{E}^{(n)} = z^{(n)}\theta + z^{(n-1)}(0)\delta = z^{(n)}\theta + \delta$. Celkem tedy platí $L\mathcal{E} = \theta Lz + \delta = \delta$, protože $Lz = 0$ dle předpokladu.

Příklad 6.5 *Konvoluce není spojitá v obou argumentech současně ani při omezení se na zobecněné funkce s kompaktními nosiči. Demonstrujte to na protipříkladě s posloupností $(\delta_n * \delta_{-n})_{n=1}^{\infty}$.*

Řešení: Nejprve si uvědomme, že $\lim_{n\to\infty} \delta_{\pm n} = 0$. Pro libovolnou $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ totiž díky omezenosti jejího nosiče platí

$$\lim_{n\to\infty} (\delta_{\pm n}, \varphi) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\pm n) = 0 = (0, \varphi).$$

Na druhou stranu pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$(\delta_n * \delta_{-n}, \varphi) = (\delta_n(x), (\delta_{-n}(y), \varphi(x+y))) = (\delta_n(x), \varphi(x-n)) = \varphi(0) = (\delta, \varphi),$$

odkud plyne $\delta_n * \delta_{-n} = \delta$. Z výše uvedeného již odvodíme nespojitost konvoluce v obou argumentech současně, protože

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta = \lim_{n\to\infty} (\delta_n * \delta_{-n}) \neq (\lim_{n\to\infty} \delta_n) * (\lim_{n\to\infty} \delta_{-n}) = 0 * 0 = 0.$$

7 Cvičení 7

- Klasická Fourierova transformace, temperované distribuce.

Příklad 7.1 *Buďte $a > 0, b \in \mathbb{R}$. Nalezněte Fourierovu transformaci funkce f, která je dána předpisem*

i. $f(x) = \theta(a - |x|)$,

ii. $f(x) = \theta(x)\mathrm{e}^{-ax}$,

iii. $f(x) = \theta(-x)\mathrm{e}^{ax}$,

iv. $f(x) = \theta(x)\mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)$,

v. $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}\cos(bx)$,

vi. $f(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$.

Řešení: Jelikož ve všech zadaných případech $f \in L^1(\mathbb{R})$, můžeme k výpočtu Fourierovy transformace bez okolků použít integrální formule

$$(\mathscr{F}f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi x} f(x)\mathrm{d}x.$$

i.

$$(\mathscr{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi x}\theta(a - |x|)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{i\xi x}\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} \cos(\xi x)\mathrm{d}x + i\int_{-a}^{a} \sin(\xi x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-a}^{a} \cos(\xi x)\mathrm{d}x = 2\frac{\sin(a\xi)}{\xi}$$

ii.

$$(\mathscr{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi x}\theta(x)\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{(i\xi - a)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{i\xi - a}[\mathrm{e}^{(i\xi - a)x}]_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{a - i\xi},$$

zde jsme se dopustili zločinu formální integrace funkce $x \mapsto \mathrm{e}^{zx}$, kde $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Nicméně lze velmi snadno matematicky korektně dokázat, že $x \mapsto \frac{1}{z}\mathrm{e}^{zx}$ je skutečně její primitivní funkcí, neboť s označením $c := \Re z$, $d := \Im z$ platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{z}\mathrm{e}^{zx}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^{cx}}{c^2 + d^2}(c\cos(dx) + d\sin(dx)) + i\frac{\mathrm{e}^{cx}}{c^2 + d^2}(c\sin(dx) - d\cos(dx))\right)$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^{cx}}{c^2 + d^2}(c\cos(dx) + d\sin(dx))\right) + i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^{cx}}{c^2 + d^2}(c\sin(dx) - d\cos(dx))\right)$$
$$= \ldots = \mathrm{e}^{cx}\cos(dx) + i\mathrm{e}^{cx}\sin(dx) = \mathrm{e}^{zx}.$$

Alternativně lze integrovat reálnou a imaginární část podobně jako v bodě *i*.

iii. Zřejmě $f(x) = \tilde{f}(-x)$, kde $\tilde{f}(x) = \theta(x)\mathrm{e}^{ax}$ jsme transformovali v předchozím bodě s výsledkem $(\mathscr{F}\tilde{f})(\xi) = 1/(a - i\xi)$. Dále platí

$$(\mathscr{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi x}\tilde{f}(-x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\xi x}\tilde{f}(x)\mathrm{d}x = (\mathscr{F}\tilde{f})(-\xi),$$

odkud již máme

$$(\mathscr{F}f)(\xi) = \frac{1}{a + i\xi}.$$

iv. Pomocí integrace per-partes a výsledku o derivaci funkce e^{zx} z bodu *ii.* odvodíme

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi x}\theta(x)\mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(i\xi - a)x}\sin(bx)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{b}[\mathrm{e}^{(i\xi-a)x}\cos(bx)]_0^{+\infty} + \frac{i\xi - a}{b}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(i\xi-a)x}\cos(bx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{b} + \frac{i\xi - a}{b}\left(\frac{1}{b}[\mathrm{e}^{(i\xi-a)x}\sin(bx)]_0^{+\infty} - \frac{i\xi - a}{b}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(i\xi-a)x}\sin(bx)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{b} - \left(\frac{i\xi - a}{b}\right)^2 (\mathscr{F}f)(\xi).\end{aligned}$$

Odtud již snadno spočítáme, že

$$(\mathscr{F}f)(\xi) = \frac{b}{b^2 + (a - i\xi)^2}.$$

V celém výpočtu jsme uvažovali $b \neq 0$. Nicméně výsledná formule platí pro každé $b \in \mathbb{R}$.

v. Nejprve pomocí parity integrandu provedeme následující úpravy

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi x}\mathrm{e}^{-a|x|}\cos(bx)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \cos(\xi x)\mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \cos((\xi + b)x)\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \cos((\xi - b)x)\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Podobně jako v bodě *iv.* se odvodí, že pro libovolné $\beta \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_0^{+\infty} \cos(\beta x)\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2 + \beta^2}.$$

Celkem tak dostáváme

$$(\mathscr{F}f)(\xi) = \frac{a}{a^2 + (\xi + b)^2} + \frac{a}{a^2 + (\xi - b)^2}.$$

vi. Doplněním na $\square$ dostáváme

$$(\mathscr{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi x}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-a(x-\frac{i\xi}{2a})^2}\mathrm{d}x.$$

Integrál na pravé straně vypočteme elegantně za pomoci komplexní analýzy. Lze si totiž povšimnouti, že

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-a(x-\frac{i\xi}{2a})^2}\mathrm{d}x = \lim_{L\to+\infty} \int_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-a(x-\frac{i\xi}{2a})^2}\mathrm{d}x = \lim_{L\to+\infty} \int_{\gamma_L} \mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z,$$

kde $\gamma_L : x \in (-L, L) \mapsto (x - \frac{i\xi}{2a}) \in \mathbb{C}$ je úsečka v komplexní rovině rovnoběžná s reálnou osou. Tuto úsečku doplníme na obdélník s vrcholy $-L$, L, $L-\frac{i\xi}{2a}$, $-L-\frac{i\xi}{2a}$, jehož hranici označíme jako Γ_L. Jelikož $z \mapsto \mathrm{e}^{-az^2}$ je holomorfní na $\mathbb{C}$, z Cauchyho teorému plyne

$$\int_{\Gamma_L} \mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z = 0. \tag{5}$$

Na druhou stranu můžeme integrál podél obdélníku rozložit na čtveřici integrálů po úsečkách jako

$$\int_{\Gamma_L} \mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z = \int_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-a(L-it)^2}\mathrm{d}t - \int_{\gamma_L} \mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z + \int_{\frac{\xi}{2a}}^{0} \mathrm{e}^{-a(-L-it)^2}\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Pro druhý (a podobně i pro čtvrtý z integrálů) odvodíme

$$\Big|\int_0^{\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{-a(L-it)^2}\mathrm{d}t\Big| \leqslant \mathrm{e}^{-aL^2}\int_0^{\frac{\xi}{2a}} \mathrm{e}^{at^2}\mathrm{d}t \overset{L\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Limitním přechodem v (6) s přihlédnutím k (5) tak dostáváme

$$\lim_{L\to+\infty} \int_{\gamma_L} \mathrm{e}^{-az^2}\mathrm{d}z = \lim_{L\to+\infty} \int_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Celkem jsme tak odvodili

$$\boxed{(\mathscr{F}(\mathrm{e}^{-ax^2}))(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}}}.$$

♣ Právě jsme odvodili, že Fourierova transformace Gaussovy funkce je opět Gaussova funkce. Je-li směrodatná odchylka původní Gaussovy funkce (ta je nepřímo úměrná $\sqrt{a}$) malá, je směrodatná odchylka transformované funkce velká a naopak. To je speciální případ tzv. *Heisenbergových relací neurčitosti*-ty mají podobu jisté nerovnosti, přičemž rovnost v nich nastává právě pro případ Gaussovy funkce.

Příklad 7.2 *Rozhodněte, které ze zobecněných funkcí*

i. x^k, $k \in \mathbb{N}$,

ii. $\theta(x)$,

iii. $\operatorname{sgn}(x)$,

iv. $\sin(ax)$, $a \in \mathbb{R}$,

v. $\theta(a - |x|)$, $a > 0$,

vi. $\theta(x)\mathrm{e}^{-x}$,

vii. $\theta(x)x^3\mathrm{e}^{-x}$,

viii. e^{iax}, $a \in \mathbb{R}$,

ix. e^{-x}

jsou temperované distribuce, tj prvky $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

Řešení: Všechny vypsané funkce jsou spojité nebo po částech spojité funkce na $\mathbb{R}$, leží tedy v $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, tj. ztotožňujeme je s prvky $\mathscr{D}'_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$. K tomu aby $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ náležela dokonce do $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ *postačuje*, aby existovala konstanta $m \in \mathbb{N}_0$ taková, že

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^m} \mathrm{d}x < +\infty. \tag{7}$$

Speciálně tedy prvky $L^1(\mathbb{R})$ patří mezi (regulárními) prvky $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Odtud okamžitě vidíme, že v funkce zadané v *v.* – *vii.* jsou temperované distribuce. Funkce z bodů *ii.* – *iv.* a *viii.* nejsou sice integrabilní na $\mathbb{R}$, jsou ale omezené, odhad (7) pro ně tudíž platí pro libovolné $m \geqslant 2$. Pro funkci z prvního bodu odvodíme z limitního srovnávacího kritéria v kritických bodech $x = \pm\infty$ (se srovnávací funkcí x^{-2}), že

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|x^k|}{(1+|x|)^{k+2}} \mathrm{d}x < +\infty,$$

tj. (7) opět platí. Funkce zadaná v bodě *ix.* ale není regulární temperovanou distribucí. Jelikož pro libovolné $m \in \mathbb{N}_0$ máme

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+|x|)^m} = +\infty,$$

podmínku (7) nelze nikdy splnit, neplatila by totiž nutná podmínka konvergence integrálu na okolí bodu $x = -\infty$. Nicméně (7) je pouze podmínka postačující. Přímo ale ukážeme, že e^{-x} ani nelze zavést jako regulární distribuci na celém $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Zvolíme-li totiž například $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{1+x^2}} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, potom

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\sqrt{1+x^2}-x}\mathrm{d}x > \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\sqrt{1+x^2}-x}\mathrm{d}x.$$

Spodní odhad je divergentní, protože $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{1+x^2}-x} = 1 \neq 0$, tj. není splňena nutná podmínka konvergence integrálu.

Příklad 7.3 *Ukažte, že*

i. δ_{x_0},

ii. $\mathcal{P}\frac{1}{x}$

náleží do $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

Řešení: Již dříve jsme ukázali, že oba zkoumané funkcionály jsou lineární na všech funkcích, kde dávají smysl, stačí tedy vyšetřit jejich spojitost na $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. (Skutečnost, že jsou na celém $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ definovány ověříme při důkazu spojitosti.) Pro tento účel buď $(\varphi_n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ posloupnost konvergentní na $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ k limitní funkci $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, tj. $(\forall\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0)(\lim_{n\to\infty} \|x^\alpha D^\beta(\varphi_n - \varphi)\|_\infty = 0)$. Budeme se snažit ukázat, že potom $\lim_{n\to\infty}(f, \varphi_n) = (f, \varphi)$, kde za f uvažujeme funkcionály ze zadání. (Poznamenejme, že BÚNO bychom mohli položit $\varphi = 0$.)

i. Protože speciálně platí $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_\infty = 0$, tj. (φ_n) konverguje na $\mathbb{R}$ stejnoměrně (a tedy i bodově) k φ, dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}(\delta_{x_0}, \varphi_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) = \varphi(x_0) = (\delta_{x_0}, \varphi).$$

ii. Stejně jako v příkladě 3.1 přepíšeme akci $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ na

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{+\infty} \chi_{(\varepsilon,+\infty)}(x)\ \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x.$$

V limitním přechodu nelze postupovat zcela stejně jako na $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, protože nemáme nutně zaručenou omezenost $\operatorname{supp}(\varphi)$. Proto si integrál rozdělíme na dvě části

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{\delta} \chi_{(\varepsilon,+\infty)}(x)\ \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x + \int_\delta^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x,$$

kde $\delta > 0$ je libovolné ale fixní. Pro první integrál najdeme integrabilní majorantu opět pomocí věty o střední hodnotě s využitím skutečnosti, že prvky $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ mají omezené derivace. Druhý integrál konverguje na okolí $+\infty$, protože lze přepsat jako akce omezené regulární temperované distribuce $\chi_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)}(x)x^{-1}$ na φ–viz (7). Stejně jako na $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ můžeme tedy nakonec psát

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x.$$

(Právě jsme mimoděk ukázali, že funkcionál $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ je dobře definován na celém $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.) Nyní si uvědomíme, že zcela analogicky jako v příkladě 2.2 lze nahlédnout, že
Pokud posloupnost (φ_n) konverguje na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, potom

$$(\forall\alpha,\ \beta\in\mathbb{N}_0^d)(\exists K_{\alpha,\beta}\geqslant 0)(\forall n\in\mathbb{N})(\|x^\alpha D^\beta\varphi_n\|_\infty\leqslant K_{\alpha,\beta}).$$

Akci $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ na posloupnost (φ_n) rozdělme do dvou integrálů

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi_n) = \int_0^{\delta} \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{x}\mathrm{d}x + \int_\delta^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Pokud pro oba integrály najdeme integrabilní majoranty nezávislé na n, bude tím spojitost $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ dokázána, protože bodová limita φ_n je právě φ. Podle věty o střední hodnotě existuje $\xi_{x,n}\in(-x,x)$ tak, že $\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)=\varphi_n'(\xi_{x,n})2x$. Máme tedy

$$\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{x} = 2\varphi_n'(\xi_{x,n}).$$

V prvním z integrálů lze tutíž za integrabilní majorantu volit konstantu $2K_{0,1}$. Jelikož druhý integrál je přes neomezenou oblast, musíme zvolit jinou strategii. Jmenovitě na $(\delta,+\infty)$ učiníme odhad

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{x}\Big| \leqslant \frac{1}{\delta}(|\varphi_n(x)|+|\varphi_n(-x)|) = \frac{1}{\delta x^2}(|x^2\varphi_n(x)|+|(-x)^2\varphi_n(-x)|)\\ \leqslant \frac{2K_{2,0}}{\delta x^2}\in L^1((\delta,+\infty)).\end{aligned}$$

A jsme doma.

8 Cvičení 8

- Fourierova transformace temperovaných distribucí.

Příklad 8.1 *Vypočtěte (zobecněnou) Fourierovu transformaci temperované distribuce f dané předpisem*

i. $f(x)=\theta(x)$,

ii. $f(x)=\theta(-x)$,

iii. $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$,

iv. $f(x) = 1$,

v. $f(x) = \mathcal{P}\frac{1}{x}$,

vi. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$,

vii. $f(x) = \mathrm{e}^{i\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

viii. $f(x) = \sin(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

ix. $f(x) = \cos(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení:

i. Pro libovolnou $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ platí

$$(\mathscr{F}[\theta], \varphi) = (\theta, \mathscr{F}[\varphi]) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixy} \varphi(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixy} \varphi(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x,$$

protože θ je regulární temperovaná distribuce. Nyní se nabízí prohodit pořadí integrace. Není však splněn základní předpoklad Fubiniho věty, neboť $|\mathrm{e}^{ixy}\varphi(y)| = |\varphi(y)| \notin L^1((0, +\infty) \times \mathbb{R})$ (vyjma triviálního případu $\varphi \equiv 0$). Pomůžeme si tedy trikem, kdy do integrandu přidáme vhodně zvolenou funkci konvergující bodově k jedničce, která nám integrabilitu zajistí. Konkrétně díky Lebesgueově větě *ve vnějším integrálu* platí

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixy} \varphi(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\varepsilon x} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixy} \varphi(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

Za majorantu lze volit $|\mathscr{F}[\varphi]|$, jejíž integrabilita plyne z poznatku $\mathscr{F}[\varphi] \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Dále pro každé $\varepsilon > 0$ pomocí Fubiniho věty dostáváme

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\varepsilon x} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixy} \varphi(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(iy-\varepsilon)x} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = i \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y + i\varepsilon} \varphi(y) \mathrm{d}y.$$

V limitě $\varepsilon \to 0+$ jsme tedy odvodili

$$(\mathscr{F}[\theta], \varphi) = i\Big(\frac{1}{y + i0_+}, \varphi(y)\Big),$$

odkud plyne

$$\mathscr{F}[\theta(x)](y) = i\, \frac{1}{y + i0_+} = i\, \mathcal{P}\frac{1}{y} + \pi\delta(y). \tag{8}$$

ii. Z vlastností Fourierovy transformace spolu s (8) okamžitě obdržíme

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\theta(-x)](y) = \frac{1}{|-1|} \mathscr{F}[\theta(x)]\Big(\frac{y}{-1}\Big) = \mathscr{F}[\theta(x)](-y) = i\, \frac{1}{-y + i0_+} \\ = -i\, \frac{1}{y + i0_-} = -i\, \mathcal{P}\frac{1}{y} + \pi\delta(y).\end{aligned}$$

iii. Jelikož Fourierova transformace je lineární a $\operatorname{sgn}(x) = \theta(x) - \theta(-x)$, odvodíme za pomoci předešlých dvou výsledků, že

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\operatorname{sgn}(x)](y) &= \mathscr{F}[\theta(x)](y) - \mathscr{F}[\theta(-x)](y) \\ &= i\,\mathcal{P}\frac{1}{y} + \pi\delta(y) - \big(-i\,\mathcal{P}\frac{1}{y} + \pi\delta(y)\big) = 2i\,\mathcal{P}\frac{1}{y}. \end{aligned} \tag{9}$$

iv. Podobným argumentem jako v předešlém bodě dostaneme

$$\mathscr{F}[1](y) = \mathscr{F}[\theta(x)](y) + \mathscr{F}[\theta(-x)](y) = i\,\mathcal{P}\frac{1}{y} + \pi\delta(y) + \big(-i\,\mathcal{P}\frac{1}{y} + \pi\delta(y)\big) = 2\pi\delta(y). \tag{10}$$

v. Jelikož pro inverzní Fourierovu transformaci platí identita

$$\mathscr{F}^{-1}[f](y) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[f](-y),$$

s pomocí (9) dostáváme

$$\mathscr{F}[\mathcal{P}\frac{1}{x}](y) = 2\pi\ \mathscr{F}^{-1}[\mathcal{P}\frac{1}{x}](-y) = 2\pi\frac{\operatorname{sgn}(-y)}{2i} = i\pi\operatorname{sgn}(y).$$

vi. S využitím identity

$$\mathscr{F}[(ix)^n f(x)] = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\mathscr{F}[f(x)](y)$$

a výsledku (10) snadno odvodíme, že

$$\mathscr{F}[x^n](y) = (-i)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\mathscr{F}[1](y) = (-i)^n 2\pi\delta^{(n)}(y).$$

vii. Identita

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{i\alpha x}f(x)] = \mathscr{F}[f(x)](y+\alpha)$$

spolu s výsledkem (10) dávají

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{i\alpha x}](y) = \mathscr{F}[1](y+\alpha) = 2\pi\delta(y+\alpha) = 2\pi\delta_{-\alpha}(y).$$

viii. Z linearity $\mathscr{F}$ a výsledku výše i německý ovčak po lobotomii vidí, že

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\sin(\alpha x)](y) = \mathscr{F}[\frac{\mathrm{e}^{i\alpha x} - \mathrm{e}^{-i\alpha x}}{2i}](y) &= \frac{1}{2i}(\mathscr{F}[\mathrm{e}^{i\alpha x}](y) - \mathscr{F}[\mathrm{e}^{-i\alpha x}](y)) \\ &= i\pi(\delta_\alpha(y) - \delta_{-\alpha}(y)).\end{aligned}$$

ix. Zcela analogicky jako v předchozím bodě dojdeme k závěru, že

$$\mathscr{F}[\cos(\alpha x)](y) = \pi(\delta_\alpha(y) + \delta_{-\alpha}(y)).$$

Příklad 8.2 *Nalezněte Fourierovu transformaci jednoduché vrstvy δ_{S_R}, kde S_R představuje sféru v $\mathbb{R}^3$ o poloměru R.*

Řešení: V první řadě je nutné si uvědomit, že $\delta_{S_R} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$–ověření je analogické tomu z příkladu 3.1 *vi*.

Nyní pro libovolnou $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ dostaneme s pomocí přítele Fubiniho

$$(\mathscr{F}[\delta_{S_R}], \varphi) = (\delta_{S_R}, \mathscr{F}[\varphi]) = \int_{S_R} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{i\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \mathrm{d}S_{\mathbf{y}} = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x}) \int_{S_R} \mathrm{e}^{i\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}} \mathrm{d}S_{\mathbf{y}} \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Vnitřní integraci provedeme ve sférických souřadnicích (R, θ, ϕ), které orientujeme tak, aby kladná poloosa z ukazovala stejným směrem jako vektor $\mathbf{x}$, tj. pomyslný severní pól sféry ležel ve směru vektoru $\mathbf{x}$. Souřadnice θ tak měří úhel svíraný $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Máme potom $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{y}||\mathbf{x}| \cos\theta = R|\mathbf{x}| \cos\theta$ a

$$\int_{S_R} \mathrm{e}^{i\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}} \mathrm{d}S_{\mathbf{y}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{iR|\mathbf{x}|\cos\theta} R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{iR|\mathbf{x}|\cos\theta} \sin\theta \mathrm{d}\theta.$$

Poslední integrál spočteme pomocí substituce $t = \cos\theta$ jako

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{iR|\mathbf{x}|\cos\theta} \sin\theta \mathrm{d}\theta = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{iR|\mathbf{x}|t} \mathrm{d}t = 2 \int_0^1 \cos(R|\mathbf{x}|t) \mathrm{d}t = \frac{2\sin(R|\mathbf{x}|)}{R|\mathbf{x}|}.$$

Celkem tak dostáváme

$$(\mathscr{F}[\delta_{S_R}], \varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{x}) \; 4\pi R \, \frac{\sin(R|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \mathrm{d}\mathbf{x},$$

tj. $\mathscr{F}[\delta_{S_R}]$ regulární temperovaná distribuce s generátorem

$$\mathscr{F}[\delta_{S_R}](\mathbf{x}) = 4\pi R \, \frac{\sin(R|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}.$$

Bonus 8.1 *Nalezněte $\mathscr{F}[|x|]$, $\mathscr{F}[\theta(x)x^n]$, $n \in \mathbb{N}$.*

Bonus 8.2 *Nalezněte $\mathscr{F}[e^{ix^2}]$.*

♣ Dodatek obsahuje tabulku význačných vlastností Fourierovy a Laplaceovy transformace spolu s přehledem vybraných obrazů a vzorů (převzato z `http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/~klikavac/wp-content/uploads/2016/12/tabulka_vlastnosti.pdf`).

9 Cvičení 9

- Laplaceova transformace.

♣ Pro klasickou funkci f na $(0,+\infty)$ splňující bodový odhad

$$\forall x \in (0,+\infty) \quad |f(x)| \leqslant C\mathrm{e}^{\alpha x}$$

pro nějaké $C \geqslant 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ zavádíme *Laplaceovu transformaci* funkce f jako funkci na $\{z \in \mathbb{C} | \Re z > \alpha\}$ předpisem

$$\mathscr{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t) \mathrm{d}t.$$

Injektivitu $\mathscr{L}$ pro třídu po částech spojitých funkcí jako první dokázal *Matyáš Lerch* v roce 1903.

Pro temperovanou distribuci $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ se $\operatorname{supp} f \subset [0,+\infty)$ takovou, že $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \sigma > a)(\mathrm{e}^{-\sigma t} f(t) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}))$ klademe pro $p = \sigma + i\omega$, kde $\sigma > a$ a $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\mathscr{L}[f(t)](p) := \mathscr{F}[\mathrm{e}^{-\sigma t} f(t)](-\omega),$$

kde $\mathscr{F}$ značí zobecněnou Fourierovu transformaci.

Příklad 9.1 *Pro $a > 0,\ b > 0$ spočítejte*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \mathrm{d}t.$$

Řešení: Zde po druhé v životě a dost možná naposledy potkáváme tzv. *Frullaniho integrál*, viz `https://en.wikipedia.org/wiki/Frullani_integral`. Nově jej v tomto speciálním případě spočteme pomocí Laplaceovy transformace. Pozor integrál nelze rozdělit na dvojici integrálů s exponenciálami! Laplaceovu transformaci dostaneme do hry pomocí identity

$$\int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t = \lim_{p \to 0+} \mathscr{L}[f(t)][p] = \lim_{p \to 0+} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t) \mathrm{d}t,$$

kde se uvažuje pouze $p > 0$. Tato rovnost se ukáže pomocí Lebesguovy věty, kde za majorantu vezmeme funkci $|f|$. Platí tedy určitě pro $f \in L^1((0,+\infty))$, což je v našem případě splněno.

Můžeme tedy psát

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \mathrm{d}t = \lim_{p \to 0+} \mathscr{L}\Big[\frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\Big](p) = \lim_{p \to 0+} \int_p^{+\infty} \mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}](q) \mathrm{d}q,$$

kde druhá rovnost plyne z jedné z identit pro Laplaceovu transformaci, viz Dodatek. Jelikož $\mathscr{L}$ je lineární stačí nyní napočítat $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. To provedeme přímočaře pomocí integrální formule, kterou lze použít kdykoliv $\Re q > -\alpha$,

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}](q) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-qt}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(q+\alpha)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{q+\alpha}. \tag{11}$$

Platí tedy

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0+}\int_p^{+\infty} \frac{1}{q+a} - \frac{1}{q+b}\,\mathrm{d}q = \lim_{p\to 0+}\left[\ln\frac{q+a}{q+b}\right]_{q=p}^{+\infty} \\ = \lim_{p\to 0+} \ln\frac{p+b}{p+a} = \ln\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

Hurá!

Bonus 9.1 *Vyřešte úlohu výše za použití identity*

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathscr{L}[g](t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathscr{L}[f](t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Příklad 9.2 *Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice*

$$u'' + u' + u = e^t(3\cos t + 2\sin t), \quad u(0) = 0,\ u'(0) = 1.$$

Řešení: Trik spočívá v převedení obou stran rovnice na Laplaceovy obrazy. Pro první derivaci platí identita

$$\mathscr{L}[u'(t)](p) = p\mathscr{L}[u(t)](p) - u(0_+)$$

jejíž opětovnou aplikací dostaneme

$$\mathscr{L}[u''(t)](p) = p\mathscr{L}[u'(t)](p) - u'(0_+) = p^2\mathscr{L}[u(t)](p) - pu(0_+) - u'(0_+).$$

Po dosazení počáteční podmínky a zalistování v tabulce Laplaceových obrazů, viz Dodatek, dojdeme ke vztahu

$$p^2\mathscr{L}[u](p) - 1 + p\mathscr{L}[u](p) + \mathscr{L}[u](p) = 3\frac{p-1}{(p-1)^2+1} + 2\frac{1}{(p-1)^2+1},$$

odkud plyne

$$\mathscr{L}[u](p) = \frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

Dalším nahlédnutím do tabulek a s poděkováním Matyáši Lerchovi odhalíme, že

$$u(t) = \theta(t)\mathrm{e}^t\sin t.$$

Funkce $t \mapsto \mathrm{e}^t \sin t$ dokonce řeší naši diferenciální rovnici na celém $\mathbb{R}$ a automaticky vyhovuje počáteční podmínce.

Příklad 9.3 *Pomocí Laplaceovy transformace vyřešte integro-diferenciální rovnici*

$$u' + 2u + 2\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau = 1, \quad u(0) = 0$$

na $(0, +\infty)$.

Řešení: Na obě strany rovnice opět vypustíme zdivočelou Laplaceovu transformaci a vedle dříve uvedené identity pro derivaci použijeme ještě zaklínadlo

$$\mathscr{L}\Big[\theta(t)\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau\Big](p) = \frac{\mathscr{L}[u](p)}{p}.$$

Dostaneme tak rovnost

$$p\mathscr{L}[u](p) + 2\mathscr{L}[u](p) + 2\frac{\mathscr{L}[u](p)}{p} = \frac{1}{p},$$

kde jsme již dosadili počáteční podmínku a využili platnosti (11) s $\alpha = 0$. Snadnou algebraickou úpravou odvodíme, že

$$\mathscr{L}[u](p) = \frac{1}{(p+1)^2 + 1}.$$

Po náhlednutí do tabulky Laplaceových obrazů tedy můžeme psát

$$u(t) = \theta(t)\mathrm{e}^{-t}\sin t.$$

Přímým dosazením lze ověřit, že $t \mapsto \theta(t)\mathrm{e}^{-t}\sin t$ je řešením na celém $\mathbb{R}$. Platnost počáteční podmínky je opět automaticky splněna.

Bonus 9.2 *Pokuste se vyřešit rovnici z předchozí úlohy bez použití Laplaceovy transformace.*

Příklad 9.4 *Pro* $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ *spočtěte*

$$\int_0^\infty e^{-at}\frac{\sin^2(bt)}{t}\mathrm{d}t.$$

Řešení: Na zkoumaný integrál můžeme nahlížet jako na hodnotu klasické Laplaceovy transformace funkce

$$f(t) = \frac{\sin^2(bt)}{t}$$

v bodě a. Jelikož $(\forall x \in \mathbb{R})(|\sin x| \leqslant |x|)$, máme $\forall t \in (0, +\infty)$ odhad

$$\left|\frac{\sin^2(bt)}{t}\right| \leqslant |b||\sin(bt)| \leqslant |b| \leqslant |b|\mathrm{e}^{0t},$$

odkud $\mathscr{L}[f](p)$ je dobře definována $\forall p \in \mathbb{C} : \Re p > 0$. Pro $a > 0$ tedy skutečně můžeme psát

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-at}\frac{\sin^2(bt)}{t}\mathrm{d}t &= \mathscr{L}\Big[\frac{\sin^2(bt)}{t}\Big](a) = \int_a^{+\infty}\mathscr{L}[\sin^2(bt)](q)\mathrm{d}q \\ &= \int_a^{+\infty}\mathscr{L}\Big[\frac{1-\cos(2bt)}{2}\Big](q)\mathrm{d}q = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\mathscr{L}[1](q) - \mathscr{L}[\cos(2bt)](q)\ \mathrm{d}q \\ &= \frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\frac{1}{q} - \frac{q}{q^2+4b^2}\ \mathrm{d}q = \frac{1}{2}[\ln q - \frac{1}{2}\ln(q^2+4b^2)]_a^{+\infty} = \frac{1}{4}\ln\frac{a^2+4b^2}{a^2},\end{aligned}$$

kde jsme použili znalosti tabelovaných Laplaceových obrazů.

Bonus 9.3 *Vyřešte úlohu výše za použití identity* (9.1).

Bonus 9.4 *Pro $b \in \mathbb{R}$ nalezněte $\mathscr{L}[sin^2(bt)/t^2]$. (Nápověda: Vyjděte z identity* (9.1).*)*

10 Cvičení 10

- Fundamentální řešení pro význačných obyčejné a parciální diferenciální rovnice.

Příklad 10.1 *Nalezněte fundamentální řešení pro $L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a$, kde $a > 0$.*

Řešení: Podle úlohy 6.4 je hledané fundamentální řešení dáno jako $\mathcal{E}(x) = \theta(x)z(x)$, kde z je řešení problému

$$Lz = z' + az = 0, \quad z(0) = 1,$$

tedy $z(x) = \mathrm{e}^{-ax}$. Celkem máme $\mathcal{E}(x) = \theta(x)\mathrm{e}^{-ax}$.

Alternativně je možné aplikovat Fourierovu transformaci na vztah

$$L\mathcal{E} = \mathcal{E}' + a\mathcal{E} = \delta.$$

Tak dostaneme rovnost

$$-iy\mathscr{F}[\mathcal{E}](y) + a\mathscr{F}[\mathcal{E}](y) = 1,$$

které vyhovuje

$$\mathscr{F}[\mathcal{E}](y) = \frac{1}{a-iy}.$$

Vzor této funkce identifikujeme pomocí tabulky Fourierovy transformace jako $\mathcal{E}(x) = \theta(x)\mathrm{e}^{-ax}$. V tomto kroce jsme použili předpoklad $a > 0$, který je při prvním postupu nadbytečný (lze tak ve skutečnosti uvažovat $a \in \mathbb{R}$).

Příklad 10.2 *Nalezněte fundamentální řešení pro $L = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a^2$, kde $a > 0$*

Řešení: Na základě příkladu 6.4 budeme uvažovat přidružený problém

$$Lz = z'' + a^2 z = 0, \quad z(0) = 0,\, z'(0) = 1,$$

jehož obecné řešení má tvar $z(x) = C_1 \cos(ax) + C_2 \sin(ax)$. Po dosazení počáteční podmínky dostáváme $z(x) = \sin(ax)/a$. Celkem tak máme

$$\mathcal{E}(x) = \theta(x)\frac{\sin(ax)}{a}.$$

Bonus 10.1 *Lze předchozí úlohu řešit pomocí Fourierovy nebo Laplaceovy transformace? (Nápověda: Pouze při použití Laplaceovy transformace vyjde obraz jako (regulární) temperovaná distribuce.)*

Příklad 10.3 (FŘ rovnice vedení tepla) *Nalezněte fundamentální řešení pro*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$.

Řešení: Aplikací částečné Fourierovy transformace v proměnné $\mathbf{x} \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ na definiční vztah $L\mathcal{E} = \delta$ dostaneme

$$\frac{\partial \mathscr{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}]}{\partial t}(t, \mathbf{y}) + a^2|\mathbf{y}|^2 \mathscr{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) = \delta(t) \otimes 1(\mathbf{y}).$$

Pravá strana v této zobecněné rovnosti působí v proměnné $\mathbf{y}$ jako regulární distribuce, předpokládejme proto to samé o $\mathscr{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}]$. Pro libovolné $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{1+n})$ potom máme

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) + a^2|\mathbf{y}|^2 \mathscr{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}), \varphi(t, \mathbf{y})\Big)\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} (\delta(t), \varphi(t, \mathbf{y}))\mathrm{d}\mathbf{y},$$

kde $\mathbf{y}$ vystupuje v kulatých závorkách jako fixní parametr. Jelikož s fixním $\mathbf{y}$, $\varphi(\cdot, \mathbf{y}) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, *stačí* nyní volit $\mathscr{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}]$ tak, aby platilo $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) + a^2|\mathbf{y}|^2 \mathscr{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) = \delta(t) \quad (\text{na } \mathscr{S}'(\mathbb{R})).$$

Na základě příkladu 10.1 tedy můžeme psát

$$\mathscr{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) = \theta(t)\mathrm{e}^{-a^2|\mathbf{y}|^2 t}.$$

Po nahlédnutí do tabulek Fourierových obrazů docházíme k závěru, že

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathscr{F}_{\mathbf{y}}[\mathscr{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y})](t, -\mathbf{x}) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\mathscr{F}_{\mathbf{y}}[\mathrm{e}^{-a^2 t|\mathbf{y}|^2}](t, -\mathbf{x}) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4a^2 t}}.$$

Příklad 10.4 (FŘ jednorozměrné vlnové rovnice) *Nalezněte fundamentální řešení pro*

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \textit{kde } a > 0.$$

Řešení: Budeme postupovat podobně jako v předchozí úloze a problém budeme uvažovat zatím v libovolné (prostorové) dimenzi. Definiční vztah pro fundamentální řešení vypadá po aplikaci částečné Fourierovy transformace v proměnné $\mathbf{x}$ jako

$$\frac{\partial^2 \mathscr{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}]}{\partial t^2}(t, \mathbf{y}) + a^2 |\mathbf{y}|^2 \mathscr{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) = \delta(t) \otimes 1(\mathbf{y}).$$

Postačuje tedy, aby pro $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platilo

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \mathscr{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) + a^2 |\mathbf{y}|^2 \mathscr{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) = \delta(t) \quad (\text{na } \mathscr{S}'(\mathbb{R})).$$

Podle příkladu 10.2 je řešením této rovnice

$$\mathscr{F}_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}](t, \mathbf{y}) = \theta(t) \frac{\sin(a|\mathbf{y}|t)}{a|\mathbf{y}|}. \tag{12}$$

V jedné dimenzi je Fourierův vzor znám,

$$\mathcal{E}(t, x) = \theta(t) \frac{1}{2a} \theta(at - |x|).$$

Příklad 10.5 (FŘ trojrozměrné vlnové rovnice) *Nalezněte fundamentální řešení pro*

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad \textit{kde } a > 0.$$

Řešení: Vztah (12) umíme invertovat i ve třech prostorových dimenzích–viz příklad 8.2, ze kterého odvodíme, že

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(\mathbf{x}).$$

11 Cvičení 11

- Řešení význačných obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic pomocí fundamentálního řešení.

Příklad 11.1 *Vyřešte následující diferenciální rovnici převedením na zobecněnou úlohu*

$$y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = \mathrm{e}^{-x}; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

Řešení: Postup rozdělíme do několika kroků.

převedení na zobecněnou úlohu Z klasické teorie obyčejných diferenciálních rovnic víme, že ve studovaném případě řešení existuje a je dokonce hladké. Označme ho jako y a položme $\tilde{y} = \theta y$, kde θ je Heavisideova funkce. Platí, že

$$\begin{aligned}\tilde{y}'(x) &= \theta(x)y'(x) + (\tilde{y}(0+) - \tilde{y}(0-))\delta(x) = \theta(x)y'(x) + \delta(x)\\ \tilde{y}''(x) &= \theta(x)y''(x) + (\tilde{y}'(0+) - \tilde{y}'(0-))\delta(x) + \delta'(x) = \theta(x)y''(x) + 2\delta(x) + \delta'(x).\end{aligned}$$

Odtud dostáváme následující úlohu na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$

$$\tilde{y}'' + 2\pi\tilde{y}' + \pi^2\tilde{y} = \theta(y'' + 2\pi y' + \pi^2 y) + \delta' + 2(1+\pi)\delta = \theta f + \delta' + 2(1+\pi)\delta,$$

kde $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ je původní pravá strana.

nalezení fundamentálního řešení Podle příkladu 6.4 stačí najít klasické řešení z problému

$$z'' + 2\pi z' + \pi^2 z = 0; \quad z(0) = 0,\, z'(0) = 1,$$

a přenásobit ho θ-funkcí. Charakteristický polynom pro výše uvedou rovnici má zřejmě dvojnásobný kořen $\lambda = -\pi$. Obecné řešení homogenní rovnice tak vypadá jako $z(x) = C_1\mathrm{e}^{-\pi x} + C_2 x\mathrm{e}^{-\pi x}$. Po dosazení počáteční podmínky dostáváme $z(x) = x\mathrm{e}^{-\pi x}$. Fundamentální řešení zobecněného problému je tudíž

$$\mathcal{E}(x) = \theta(x)x\mathrm{e}^{-\pi x}.$$

konvoluce s pravou stranou Řešení $\tilde{y}$ obdržíme pomocí konvoluce jako $\tilde{y} = \mathcal{E} * (\theta f + \delta' + 2(1+\pi)\delta)$. Jelikož konvoluce působí lineárně ve svých argumentech, stačí jednotlivé příspěvky napočítat zvlášť. Okamžitě dostáváme $\mathcal{E} * \delta = \mathcal{E}$ a $\mathcal{E} * \delta' = (\mathcal{E} * \delta)' = \mathcal{E}'$. Dále platí

$$\begin{aligned}(\mathcal{E} * \theta f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \theta(x-y)\mathrm{e}^{-(x-y)}\theta(y)y\mathrm{e}^{-\pi y}\,\mathrm{d}y = \theta(x)\mathrm{e}^{-x}\int_0^x y\mathrm{e}^{(1-\pi)y}\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{\theta(x)}{1-\pi}\Big(x\mathrm{e}^{-\pi x} - \frac{1}{1-\pi}(\mathrm{e}^{-\pi x} - \mathrm{e}^{-x})\Big).\end{aligned}$$

Celkem jsme tak odvodili, že

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= \frac{\theta(x)}{1-\pi}\Big(x\mathrm{e}^{-\pi x} - \frac{1}{1-\pi}(\mathrm{e}^{-\pi x} - \mathrm{e}^{-x})\Big) + 2(1+\pi)\theta(x)x\mathrm{e}^{-\pi x} + \theta(x)(\mathrm{e}^{-\pi x} - \pi x\mathrm{e}^{-\pi x})\\ &= \theta(x)\Big[\Big(2 + \pi + \frac{1}{1-\pi}\Big)x\mathrm{e}^{-\pi x} + \Big(1 - \frac{1}{(1-\pi)^2}\Big)\mathrm{e}^{-\pi x} + \frac{1}{(1-\pi)^2}\mathrm{e}^{-x}\Big].\end{aligned}$$

(Všimněte si, že zobecněná derivace $\mathcal{E}'$ obsahuje jen regulární část, neboť $\mathcal{E}(0+) = \mathcal{E}(0-) = 0$.)

okamžik vítězství Z přednášky víme, že výraz v hranaté závorce výše je řešení *původní* úlohy na kladné poloose a vyhovuje zadané počáteční podmínce! (Oboje lze zkontrolovat i prostým dosazením.)

Příklad 11.2 *Převedením na zobecněnou úlohu vyřešte*

$$u'' + a^2 u = f, \quad u(0) = u_0,\, u'(0) = u_1,$$

kde $a > 0$ *a* $f \in C([0,\infty))$.

Řešení: Budeme postupovat stejně jako v předchozí úloze. Pro klasické řešení rovnice u zavedeme $\tilde{u} := \theta u$, které na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ vyhovuje rovnici

$$\tilde{u}'' + a^2 \tilde{u} = \theta(u'' + a^2 u) + u_1\delta + u_0\delta' = \theta f + u_1\delta + u_0\delta'.$$

Fundamentální řešení pro levou stranu jsme nalezli již v příkladě 10.2 jako

$$\mathcal{E}(x) = \theta(x)\frac{\sin(ax)}{a}.$$

Zřejmě platí $\mathcal{E} * \delta = \mathcal{E}$ a

$$\mathcal{E} * \delta'(x) = (\mathcal{E} * \delta)'(x) = \mathcal{E}'(x) = \theta(x)\cos(ax) + (\mathcal{E}(0+) - \mathcal{E}(0-))\delta(x) = \theta(x)\cos(ax).$$

Celkem tak pro řešení zobecněné úlohy máme

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x) &= (\mathcal{E} * (\theta f + u_1\delta + u_0\delta'))(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \theta(x-y) f(x-y)\theta(y)\frac{\sin(ay)}{a}\mathrm{d}y + u_1\theta(x)\frac{\sin(ax)}{a} + u_0\theta(x)\cos(ax) \\
&= \theta(x)\Big[\frac{1}{a}\int_0^x f(x-y)\sin(ay)\mathrm{d}y + u_1\frac{\sin(ax)}{a} + u_0\cos(ax)\Big].
\end{aligned}$$

S odvoláním na přednášku nakonec nahlédneme, že výraz v hranaté závorce vyhovuje na kladné poloose původnímu problému.

Příklad 11.3 *Vyřešte na* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *zobecněnou úlohu*

$$y'' + 3y' + 2y = 5\delta + \delta'$$

a nalezněte jí odpovídající klasickou úlohu.

Řešení: Začneme již rutinně hledáním fundamentálního řešení, to je dáno jako $\mathcal{E} = \theta z$, kde z řeší problém

$$z'' + 3z' + 2z = 0; \quad z(0) = 0,\, z'(0) = 1.$$

Obecné řešení tohoto problému je $z(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}$, počáteční podmínkce potom vyhovuje $z(x) = (\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x})$. Takto jsme napočetli, že

$$\mathcal{E}(x) = \theta(x)(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}).$$

Zobecněnou úlohu tedy řeší funkce

$$y(x) = (\mathcal{E} * (5\delta + \delta'))(x) = 5\mathcal{E}(x) + \mathcal{E}'(x) = \theta(x)(4\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x}).$$

Na pravé straně zobecněné úlohy stojí jen δ-funkce a její derivace, které odpovídají počáteční podmínce klasického problému. Ten vypadá jako

$$u'' + 3u' + 2u = 0; \quad u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1.$$

Pokud nyní zapíšeme $y = \theta u$, potom

$$\begin{aligned} y' &= \theta u' + u_0 \delta \\ y'' &= \theta u'' + u_1 \delta + u_0 \delta', \end{aligned}$$

což po dosazení do původního zobecněného problému dává

$$\theta(u'' + 3u' + 2u) + (u_1 + 3u_0)\delta + u_0 \delta' = 5\delta + \delta'.$$

Porovnáním příslušných koeficientů potom dostáváme $u_0 = 1$ a $u_1 = 2$.

Příklad 11.4 (Cauchyova úloha pro jednorozměrnou rovnici vedení tepla) *Pro $t > 0$ nalezněte řešení úlohy*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t); \quad u(x, 0+) = u_0(x),$$

kde $a > 0$ a $u_0 \in C(\mathbb{R})$ a $f \in C(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ ubývají dost rychle v nekonečnu (viz integrály v řešení níže).

Řešení: Postup si opět rozložíme do několika kroků.

převedení na zobecněnou úlohu Předpokládejme, že existuje klasické řešení problému výše; označme jej jako u. Pro $\tilde{u} = \tilde{u}(x,t) := \theta(t) u(x,t)$ platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x,t) &= \theta(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x,t) &= \theta(t) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u_0(x) \otimes \delta(t), \end{aligned} \tag{13}$$

viz příklad 5.6. Máme tedy

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \theta(t) \Big(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big) + u_0 \otimes \delta = \tilde{f} + u_0 \otimes \delta, \tag{14}$$

kde $\tilde{f}(x,t) := \theta(t) f(x,t)$.

nalezení fundamentálního řešení Z příkladu 10.3 s $n = 1$ již víme, že fundamentální řešení problému výše je dáno vztahem

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

konvoluce s pravou stranou Zobecněné řešení rovnice (14) je dáno konvolucí $\tilde{u} = \varepsilon * (\tilde{f} + u_0 \otimes \delta(t))$. Spočítáme každý z příspěvků zvlášť. Prostým dosazením do integrální formule pro konvoluci (platné například pro integrabilní f) dostaneme

$$\begin{aligned}(\mathcal{E} * \tilde{f})(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}} \theta(\tau) f(y,\tau) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}y \\ &= \theta(t) \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(y,\tau) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Dále pro libovolné $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ platí

$$\begin{aligned}(\mathcal{E} * u_0 \otimes \delta, \varphi) &= (\mathcal{E}(y,\tau), (u_0(x) \otimes \delta(t), \varphi(y+x, \tau+t))) \\ &= (\mathcal{E}(y,\tau), (u_0(x), (\delta(t), \varphi(y+x,\tau+t)))) = (\mathcal{E}(y,\tau), (u_0(x), \varphi(y+x,\tau))) \\ &= (\mathcal{E}(\cdot,\tau) *_x u_0, \varphi(\cdot,\tau)),\end{aligned}$$

kde v posledním výrazu provádíme konvoluci jen v prostorové proměnné, což jsme označili symbolem $*_x$. Ubývá-li u_0 dost rychle v nekonečnu (leží-li například v $L^1(\mathbb{R})$), můžeme psát

$$(\mathcal{E} *_x u_0)(x,t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} u_0(y) \mathrm{d}y.$$

Celkem docházíme k výsledku

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi}} \left[\int_{\mathbb{R}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(y,\tau) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}y + \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} u_0(y) \mathrm{d}y \right].$$

grand finale Pro $t > 0$ splývá klasické řešení u se zobecněným, což lze ověřit přímo dosazením, zároveň vyhovuje počáteční podmínce (chápané limitně). Druhé tvrzení si dokážeme. Zřejmě máme

$$u(x, 0+) = \lim_{t \to 0+} (g_{\sqrt{t}} *_x u_0)(x).$$

Výše jsme zavedli jednoparametrickou množinu funkcí

$$g_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \text{kde } g(x) := \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2}}, \quad (\forall \varepsilon > 0).$$

Jelikož konvoluce je spojitá ve svých argumentech a $\lim_{\varepsilon \to 0+} g_\varepsilon = \delta$ na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, dostáváme

$$u(x, 0+) = \delta *_x u_0 = u_0.$$

Bonus 11.1 *Podobně lze postupovat ve více dimenzích. Zkuste si to!*

Příklad 11.5 (Cauchyova úloha pro jednorozměrnou vlnovou rovnici) *Pro $t > 0$, nalezněte řešení úlohy*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t); \quad u(x,0+) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0+) = u_1(x),$$

kde $a > 0$ a $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ a $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$.

Řešení: K zobecněné formulaci přejdeme opět aplikací levé strany rovnice na $\tilde{u} = \tilde{u}(x,t) := \theta(t)u(x,t)$, kde u je klasické řešení, jehož existenci zprvu jen předpokládáme (nicméně pro formulaci zobecněné úlohy nemusí ani existovat). Derivací vztahu (13) obdržíme

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(x,t) = \theta(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + u_0(x) \otimes \delta'(t) + u_1(x) \otimes \delta(t).$$

Pomocí této identity spolu s výchozí rovnicí odvodíme, že

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tilde{f} + u_0 \otimes \delta' + u_1 \otimes \delta,$$

kde $\tilde{f}(x,t) := \theta(t)f(x,t)$. Fundamentální řešení pro tento problém jsme odhalili již v úloze 10.4 jako

$$\mathcal{E}(x,t) = \theta(t)\frac{1}{2a}\theta(at - |x|).$$

Zbývá vypočítat konvoluci $\mathcal{E} * (\tilde{f} + u_0 \otimes \delta' + u_1 \otimes \delta)$, což opět provedeme člen po členu. Dosazením do integrální formule dostaneme

$$\begin{aligned}(\mathcal{E} * \tilde{f})(x,t) &= \frac{1}{2a}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \theta(t-\tau)\theta(a(t-\tau) - |x-y|)\theta(\tau)f(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\theta(t)}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Pomocí formulky odvozené v příkladu 11.4 odvodíme, že

$$(\mathcal{E} * u_1 \otimes \delta)(x,t) = (\mathcal{E}(\cdot,t) *_x u_1)(x) = \frac{\theta(t)}{2a}\int_{\mathbb{R}} \theta(at - |x-y|)u_1(y)\mathrm{d}y = \frac{\theta(t)}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(y)\mathrm{d}y.$$

Pro zbývající příspěvek dostáváme podobně následující

$$\mathcal{E} * (u_0 \otimes \delta') = \mathcal{E} * \partial_t(u_0 \otimes \delta) = \partial_t(\mathcal{E} * (u_0 \otimes \delta)) = \partial_t(\mathcal{E} *_x u_0),$$

odkud již

$$\begin{aligned}(\mathcal{E} * (u_0 \otimes \delta'))(x,t) &= \partial_t \frac{\theta(t)}{2a}\int_{\mathbb{R}} \theta(at - |y|)u_0(x-y)\mathrm{d}y = \partial_t \frac{\theta(t)}{2a}\int_{-at}^{at} u_0(x-y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{\theta(t)}{2a}(u_0(x-at)a - u_0(x+at)(-a)) = \frac{\theta(t)}{2}(u_0(x+at) + u_0(x-at)).\end{aligned}$$

(Všimněte si, že v zobecněné derivaci podle t se neobjevil singulární člen.) Celkem tedy máme

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2a}\left[\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau + \int_{x-at}^{x+at} u_1(y)\mathrm{d}y + a(u_0(x+at) + u_0(x-at))\right]. \tag{15}$$

Pro $t > 0$ klasické řešení u splývá s tímto zobecněným řešením, jak se lze přesvědčit přímým dosazením.

Bonus 11.2 *Podobně lze postupovat ve dvou a třech dimenzích, kde známe potřebná fundamentální řešení. Zkuste si to!*

Bonus 11.3 *Ověřte, že pro $t > 0$ funkce* (15) *řeší Cauchyovu úlohu pro jednorozměrnou vlnovou rovnici, tj. splňuje difrenciální rovnici v klasickém smyslu a vyhovuje počáteční podmínce.*

Bonus 11.4 *Potenciál $U = U(\mathbf{x})$ gravitačního pole splňuje na $\mathbb{R}^3$ rovnici $\Delta U = k\rho$, kde $\rho = \rho(\mathbf{x})$ je hustota hmoty a k je gravitační konstanta.*

i. Vyjádřete potenciál U pomocí integrálu. (Nápověda: fundamentální řešení operátoru Δ je $\varepsilon = 1/(4\pi|\mathbf{x}|)$.)

ii. Najděte potenciál U pro hustotu $\rho = \delta_{S_R}$.

12 Cvičení 12

- Integrální operátory, integrální rovnice.

Příklad 12.1 *Vyřešte integrální rovnici*

$$\varphi(x) = 4\int_0^\infty e^{-(x+y)}\varphi(y)\mathrm{d}y - 4xe^{-x}.$$

Řešení: Nejprve poznamenejme, že iterační metody odvozené na přednášce mají konvergenci *zaručenou* pouze pro omezené integrační oblasti a dostatečně malé hodnoty parametru před integrálem. My však úlohu vyřešíme i bez nich, navíc snadno a přímo! Integrální jádro je totiž degenerované. Máme tedy

$$\varphi(x) = 4\mathrm{e}^{-x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\varphi(y)\mathrm{d}y - 4xe^{-x} = A\mathrm{e}^{-x} - 4x\mathrm{e}^{-x},$$

kde $A \in \mathbb{R}$ závisí na φ. Hodnotu A nalezneme zpětným dosazením do integrální rovnice, odkud

$$A = 4\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}(A\mathrm{e}^{-y} - 4y\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y = 4A\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y - 16\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y = 2A - 4,$$

a tedy $A = 4$. Zadání tudíž na celé poloose $(0, +\infty)$ vyhovuje funkce

$$\varphi(x) = 4\mathrm{e}^{-x}(1 - x).$$

Příklad 12.2 *Metodou postupných aproximací vyřešte integrální rovnici*

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 x^2 y^3 \varphi(y) \mathrm{d}y + x.$$

Řešení: I v této úloze vystupuje degenrované jádro, řešení lze tedy hledat ve tvaru $\varphi(x) = Ax^2 + x$. Ze cvičných důvodů ale nasadíme v souladu se zadáním metodu postupných aproximací. Jako nultou iteraci zvolíme "pravou stranu" $f(x) = x$; položme tedy $\varphi_0(x) = x$. První iteraci dostaneme dosazením nulté do integrální rovnice, tj.

$$\varphi_1(x) = \lambda \int_0^1 x^2 y^3 \varphi_0(y) \mathrm{d}y + x = \lambda x^2 \int_0^1 y^4 \mathrm{d}y + x = \frac{\lambda}{5} x^2 + x.$$

Podobně k-tou iteraci napočteme dosazením $(k - 1)$-té iterace do integrální rovnice. Tímto způsobem odvodíme, že

$$\varphi_2(x) = \lambda \int_0^1 x^2 y^3 \varphi_1(y) \mathrm{d}y + x = \lambda x^2 \int_0^1 y^3 \Big(\frac{\lambda}{5} y^2 + y \Big) \mathrm{d}y + x = \frac{\lambda^2}{5 \cdot 6} x^2 + \frac{\lambda}{5} x^2 + x$$

a

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= \lambda \int_0^1 x^2 y^3 \varphi_2(y) \mathrm{d}y + x = \lambda x^2 \int_0^1 y^3 \Big(\frac{\lambda^2}{5 \cdot 6} y^2 + \frac{\lambda}{5} y^2 + y \Big) \mathrm{d}y + x \\ &= \frac{\lambda^3}{5 \cdot 6^2} x^2 + \frac{\lambda^2}{5 \cdot 6} x^2 + \frac{\lambda}{5} x^2 + x = \frac{\lambda}{5} \big(\frac{\lambda^2}{6^2} + \frac{\lambda^1}{6^1} + \frac{\lambda^0}{6^0} \big) x^2 + x. \end{aligned}$$

Odtud uhádneme (a čtenář si to i snadno potvrdí matematickou indukcí podle k), že

$$\varphi_k(x) = \frac{\lambda}{5} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda}{6} \right)^l x^2 + x.$$

Pro $\lambda : |\lambda| < 6$ suma výše konverguje, když $k \to +\infty$, čímž dostáváme

$$\varphi(x) = \lim_{k \to +\infty} \varphi(x) = \frac{\lambda}{5} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{6}} x^2 + x = \frac{6\lambda}{5(6 - \lambda)} x^2 + x \quad (\forall x \in (0, 1)).$$

♣ Metoda postupných aproximací konvergovala v úloze výše pro všechna $\lambda : |\lambda| < 6$. Podle obecného výsledku z přednášky víme, že φ je určitě řešením, tj. že aproximace konvergují k řešení, pokud

$$|\lambda| < \frac{1}{|(0,1)| \sup_{(x,y)\in(0,1)^2} |x^2y^3|} = 1.$$

Pokud bychom řešení od počátku hledali ve tvaru $\varphi(x) = Ax^2 + x$, uspěli bychom pro všechna $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{6\}$. Podívejme se krátce, co je na hodnotě $\lambda = 6$ tak speciálního. Zkoumanou integrální rovnici můžeme pro $\lambda \neq 0$ přepsat jako $(K - z)\varphi = f$, kde K je integrální operátor na $(0,1)$ s integrálním jádrem x^2y^3, $z := \frac{1}{\lambda}$ a $f(x) := -\frac{x}{\lambda}$. Snadno ověříme, že operátor K má jedinou vlastní hodnotu $z = \frac{1}{6}$, které odpovídá právě $\lambda = 6$. Jelikož při řešení integrální rovnice typicky postupujeme tak, že v konečném důsledku hledáme $(K - z)^{-1}$, není divu, že je-li z vlastní hodnotou K, tak potom neuspějeme. Rozmyslete si, pro jakou pravou stranu f bychom nalezli řešení φ i pro $\lambda = 6$.

Příklad 12.3 *Metodou iterovaných jader řešte rovnici*

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x+y)\varphi(y)\mathrm{d}y + \sin(x).$$

Řešení: Jelikož $\sin(x+y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$, jedná se i v tomto případě o degenerované jádro. Řešení integrální rovnice bude mít tedy nutně tvar $\varphi(x) = A\sin x + B\cos x$ (tak jsme zahrnuli i "pravou stranu" $\sin x$). Budeme ale nyní předstírat amnézii a ze cvičných důvodů rovnici vyřešíme metodou iterovaných jader. Ta vychází z metody postupných aproximací, kdy, po přepsání zadání na tvar $\varphi = \lambda K\varphi + f$, v k-tém kroce počítáme

$$\begin{aligned}\varphi_k = \lambda K\varphi_{k-1} + f = \lambda K(\lambda K\varphi_{k-2} + f) + f = \lambda^2K^2\varphi_{k-2} + \lambda Kf + f \\ = \ldots = \lambda^kK^kf + \lambda^{k-1}K^{k-1}f + \ldots + \lambda Kf + f = \sum_{l=0}^{k} \lambda^l K^l f,\end{aligned} \tag{16}$$

kde K^0 je identické zobrazení a $K^2 = K \circ K$, atd. Operátory K^l, $k \in \mathbb{N}$, jsou integrální operátory s jádry $\mathscr{K}_l$, kde

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_1(x,y) &= \mathscr{K}(x,y) := \sin(x+y) \\ \mathscr{K}_2(x,y) &= \int_0^\pi \mathscr{K}_1(x,z)\mathscr{K}_1(z,y)\mathrm{d}z \\ &\vdots \\ \mathscr{K}_l(x,y) &= \int_0^\pi \mathscr{K}_1(x,z)\mathscr{K}_{l-1}(z,y)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Metoda iterovaných jader vychází z optimistického předpokladu, že všechna jádra $\mathscr{K}_l$ lze explicitně napočítat. V našem konkrétním případě to je skutečně možné, máme totiž

$$\mathscr{K}_2(x,y) = \int_0^\pi \sin(x+z)\sin(z+y)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(\cos(x-y) - \cos(x+y+2z)\big)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\cos(x-y)$$

a

$$\mathscr{K}_3(x,y) = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin(x+z)\cos(z-y)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\int_0^\pi \big(\sin(x-y+2z) + \sin(x+y)\big)\mathrm{d}z = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(x+y) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \mathscr{K}_1(x,y),$$

odkud vidíme, že výpočet $\mathscr{K}_l$ se až na konstantu zacyklil. Můžeme tedy okamžitě psát

$$\mathscr{K}_l(x,y) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{l-1} \begin{cases} \cos(x-y) & \text{pro } l \text{ sudé} \\ \sin(x+y) & \text{pro } l \text{ liché.} \end{cases}$$

Provedeme-li nyní v (16) limitní přechod, dostaneme $\varphi = \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \lambda^l K^l\right) f$, což lze přepsat jako

$$\varphi = \lambda R_\lambda f + f,$$

kde R_λ, tzv. *rezolventa*, je operátor s integrálním jádrem

$$\mathscr{R}(x,y;\lambda) = \sum_{l=1}^{+\infty} \lambda^{l-1} \mathscr{K}_l(x,y).$$

V našem případě platí

$$\mathscr{R}(x,y;\lambda) = \cos(x-y)\sum_{m=0}^{+\infty} \lambda^{2m+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1} + \sin(x+y)\sum_{m=0}^{+\infty} \lambda^{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} = \frac{1}{1-(\frac{\lambda\pi}{2})^2}\left(\frac{\lambda\pi}{2}\cos(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

a následně, $\forall x \in (0,\pi)$,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lambda\int_0^\pi \mathscr{R}(x,y;\lambda)\sin y \,\mathrm{d}y + \sin x \\ &= \frac{\lambda}{1-(\frac{\lambda\pi}{2})^2}\left(\int_0^\pi \frac{\lambda\pi}{2}\cos(x-y)\sin y\,\mathrm{d}y + \int_0^\pi \sin(x+y)\sin y\,\mathrm{d}y\right) + \sin x \\ &= \frac{1}{1-(\frac{\lambda\pi}{2})^2}\sin x + \frac{\frac{\lambda\pi}{2}}{1-(\frac{\lambda\pi}{2})^2}\cos x.\end{aligned}$$

Pro konvergenci geometrické řady ve výrazu pro $\mathscr{R}$ jsme požadovali, aby $|\lambda| < \frac{2}{\pi}$. Podle obecné věty z přednášky je φ určitě řešením pro $|\lambda| < \frac{1}{\pi}$. Nicméně přímým dosazením lze ověřit, že φ vyhovuje zadané integrální rovnici kdykoliv se v jeho koeficientech nedělí nulou, tj. $\lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}$.

Bonus 12.1 *Řešte předchozí úlohu přímo s využitím skutečnosti, že integrální operátor má degenerované jádro! Pro jaká λ naleznete řešení?*

Příklad 12.4 *Nalezněte vlastní čísla a vlastní funkce operátoru L, který je dán předpisem*

$$L\varphi(x) = \int_0^{2\pi} \sin(x+y)\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

Řešení: Připomeňme, že $z \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo lineárního operátoru L právě tehdy, pokud existuje *nenulová* funkce ψ *v definičním oboru* L tak, že $L\psi = z\psi$. V našem případě je L definován na spojitých omezených funkcích na intervalu $(0, 2\pi)$. Jelikož

$$L\psi(x) = \sin x \int_0^{2\pi} \cos y\ \psi(y)\mathrm{d}y + \cos x \int_0^{2\pi} \sin y\ \psi(y)\mathrm{d}y,$$

budeme vlastní funkce hledat nejprve ve tvaru $\psi = A\sin + B\cos$, kde $|A| + |B| > 0$. Dosazením do rovnice na vlastní čísla dostaneme podmínku

$$L\psi(x) = \pi A\cos x + \pi B\sin x = z(A\sin x + B\cos x) \quad (\forall x \in (0, 2\pi)),$$

která je splněna právě tehdy, pokud $\pi A = zB \wedge \pi B = zA$. Tato soustava připouští netriviální řešení jen a pouze pro $z = \pm\pi$. V případě $z = \pi$ je odpovídající vlastní podprostor lineárním obalem funkce $\sin + \cos$, v případě $z = -\pi$ je vlastní podprostor nabalen na funkci $\sin - \cos$.

Pokud $z = 0$, potom rovnice na odpovídající vlastní funkce přejde na $L\psi = 0$. Libovolné nenulové ψ vyhovující podmínkám

$$\int_0^{2\pi} \cos y\ \psi(y)\mathrm{d}y = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \sin y\ \psi(y)\mathrm{d}y = 0$$

je tedy vlastní funkcí L s vlastním číslem $z = 0$. Ze znalosti Fourierovy ortonormální báze nahlédneme, že vlastní funkce nuly leží právě v lineárním obalu lineárně nezávislých funkcí

$$\{\cos(nx) |\, n = 0, 2, 3, \ldots\} \cup \{\sin(nx) |\, n = 2, 3, \ldots\}.$$

Nula je tak vlastní číslo nekonečné násobnosti!

Příklad 12.5 *Řešte* Volterrovu *integrální rovnici*

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{y^2}{x^2}\varphi(y)\mathrm{d}y + \mathrm{e}^x.$$

Řešení: Nejprve se nedáme nachytat, že se jedná o úlohu s degenerovaným jádrem. Horní mez totiž závisí na x. Pokud bychom ji nahradili mezí $x = +\infty$, vypadalo by integrální jádro jako $\theta(x-y)y^2x^{-2}$, což je již neseparovatelný výraz!

Nejpřímějším postupem bude rovnici upravit jako

$$x^2\varphi(x) = \int_0^x y^2\varphi(y)\mathrm{d}y + x^2\mathrm{e}^x$$

a tento vztah zderivovat podle x. Tak dostaneme lineární diferenciální rovnici

$$x^2\varphi'(x) + 2x\varphi(x) = x^2\varphi(x) + x^2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x,$$

kterou snadno vyřešíme nalezením integračního faktoru jako

$$\varphi(x) = \left(\frac{C}{x^2} + \frac{x}{3} + 1\right)\mathrm{e}^x.$$

Integrační konstantu dostaneme dosazením φ do původní integrální rovnice. Pro libovolné $x > 0$ musí tedy platit

$$\left(\frac{C}{x^2} + \frac{x}{3} + 1\right)\mathrm{e}^x = \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(C + \frac{y^3}{3} + y^2\right)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y + \mathrm{e}^x$$
$$= \frac{C}{x^2}(\mathrm{e}^x - 1) + \frac{1}{x^2}\left(\left[\frac{y^3}{3}\mathrm{e}^y\right]_0^x - \int_0^x y^2\mathrm{e}^y\mathrm{d}y + \int_0^x y^2\mathrm{e}^y\mathrm{d}y\right) + \mathrm{e}^x = \left(\frac{C}{x^2} + \frac{x}{3} + 1\right)\mathrm{e}^x - \frac{C}{x^2},$$

odkud nutně $C = 0$. Hledané řešení je proto tvaru

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{3} + 1\right)\mathrm{e}^x \quad (\forall x > 0).$$

Bonus 12.2 *Metodou postupných aproximací vyřešte*

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^x \sqrt{xy}\varphi(y)\mathrm{d}y + \sqrt{x}.$$

Příklad 12.6 *Metodou iterovaných jader vyřešte*

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^x \frac{x^3}{y^2}\varphi(y)\mathrm{d}y + x^3.$$

13 Cvičení 13

- Eliptické operátory, Greenova funkce.

Příklad 13.1 *Pro $f \in C([0,1])$ nalezněte řešení Sturm–Liouvilleovy úlohy*

$$-(1+x^2)u'' - 2xu' = f, \quad u(0) = u'(1) = 0.$$

Řešení: Levá strana zkoumané rovnice je skutečně tvaru $Lu = -(pu')' + qu$, kde $p(x) = (1+x^2)$ a $q(x) = 0$. Z obecné teorie víme, že řešení zadané úlohy můžeme potom vyjádřit jako $u = L^{-1}f$, přičemž L^{-1} je integrální operátor, jehož jádro, tzv. *Greenova funkce*, je dáno předpisem

$$\mathcal{G}(x,y) = -\frac{1}{p(0)w(0)}\begin{cases} v_1(x)v_2(y) & \text{pro } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ v_1(y)v_2(x) & \text{pro } 1 \geqslant x > y \geqslant 0, \end{cases} \tag{17}$$

kde v_i, $i = 1, 2$, jsou nenulová řešení homogenní rovnice $Lv = 0$, v_1 splňuje hraniční podmínku v levém krajním bodě $x = 0$, v_2 vyhovuje hraniční podmínce v pravém krajním bodě $x = 1$ a

$$w := \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme, že veličina pw je konstatní na celém intervalu $[0, 1]$.

V našem případě vyřešíme homogenní rovnici $Lv = -(1+x^2)v'' - 2xv' = 0$ substitucí $\tilde{v} = v'$. Nová funkce vyhovuje rovnici

$$-(1+x^2)\tilde{v}' - 2x\tilde{v} = -((1+x^2)\tilde{v})' = 0.$$

Integrací tak postupně dostaneme

$$\tilde{v}(x) = \frac{A}{1+x^2} \quad \text{a} \quad v(x) = A\arctan x + B.$$

Řešení v_i jsou určena až na multiplikativní konstantu, protože hraniční podmínka v jednom z krajních bodů fixuje vždy jen jednu z konstant A, B (případně jejich poměr). My je zvolíme tak, že

$$v_1(x) = \arctan x, \quad v_2(x) = 1.$$

S touto volbou platí $w(x) = -(1+x^2)^{-1}$ a $p(x)w(x) = -1$. Dosazením do (17) zjistíme, že

$$\mathcal{G}(x,y) = \begin{cases} \arctan x & \text{pro } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ \arctan y & \text{pro } 1 \geqslant x > y \geqslant 0, \end{cases}$$

a tudíž

$$u(x) = \int_0^1 \mathcal{G}(x,y)f(y)\mathrm{d}y = \int_0^x \arctan y\ f(y)\mathrm{d}y + \arctan x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y \quad (\forall x \in [0,1]).$$

Příklad 13.2 *Pro $f \in C([0,1])$ nalezněte řešení Sturm–Liouvilleovy úlohy*

$$-xu'' - u' = f, \quad |u(0)| < \infty, u(1) = 0.$$

Řešení: V první řadě si všimněme, že hraniční podmínka je mimo rámec standardní formulace Sturm–Liouvilleovy úlohy. Dále snadno nahlédneme, že $p(x) = x$. Tato funkce však vymizí v levém krajním bodě $x = 0$, což nás opět dostává mimo standardní (regulární) formulaci. Přesto se pokusme postupovat běžným způsobem s tím, že platnost takto získaného výsledku ověříme prostým dosazením.

Homogenní problém $-xv'' - v' = -(xv')' = 0$ má obecné řešení $v(x) = A \ln x + B$. Dvojici řešení v_i, $i = 1, 2$, můžeme potom volit jako

$$v_1(x) = 1 \quad \text{a} \quad v_2(x) = \ln x.$$

Odtud již dopočteme $w(x) = x^{-1}$, $p(x)w(x) = 1$ a

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{cases} -\ln y & \text{pro } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ -\ln x & \text{pro } 1 \geqslant x > y \geqslant 0. \end{cases}$$

Náš kandidát na řešení tedy vypadá jako

$$u(x) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, y) f(y) \mathrm{d}y = -\ln x \int_0^x f(y) \mathrm{d}y - \int_x^1 \ln y \; f(y) \mathrm{d}y \quad (\forall x \in [0, 1]).$$

Jelikož f je omezená, druhý integrál konverguje i pro $x = 0$. Navíc platí

$$u'(x) = -\frac{1}{x} \int_0^x f(y) \mathrm{d}y - \ln x \; f(x) + \ln x \; f(x) = -\frac{1}{x} \int_0^x f(y) \mathrm{d}y$$
$$u''(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x f(y) \mathrm{d}y - \frac{1}{x} f(x).$$

Vidíme, že u není obecně spojitě dvakrát diferencovatelné na $[0, 1]$, nicméně pro všechna $x \in (0, 1)$ řeší výchozí rovnici, navíc vyhovuje oběma hranicčním podmínkám.

Příklad 13.3 *Převeďte Sturm–Liouvilleovu úlohu*

$$-u'' - u = f, \quad u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

na integrální rovnici.

Řešení: Všimněme si, že "potenciál" $q(x) = -1$ je negativní na $(0, \pi)$. Nemáme tedy zaručeno, že standardní postup povede k výsledku. Přesvědčíme se, že skutečně nevede k cíli. Řešení homogenní rovnice $-u'' - u = 0$ vyhovující podmínce $u(0) = 0$, respektive $u(\pi) = 0$, je $v_1(x) = C_1 \sin x$, respektive $v_2(x) = C_2 \sin x$. Řešení jsou lineárně závislá, odkud wronskián $w \equiv 0$ a $\sin x$ je vlastní funkce zadaného operátoru s vlastní hodnotou 0–operátor tedy nelze invertovat!

Přepíšeme tedy naši úlohu jako

$$-u'' = f + u, \quad u(0) = 0, u(\pi) = 0.$$

Odpovídající homogenní úloha má obecné řešení $v(x) = C_1x + C_2$, odkud odvodíme že $v_1(x) = x$, $v_2(x) = x - \pi$, $w(x) = \pi$ a

$$\mathcal{G}(x,y) = -\frac{1}{\pi}\begin{cases} x(y-\pi) & \text{pro } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi \\ y(x-\pi) & \text{pro } \pi \geqslant x > y \geqslant 0. \end{cases}$$

Hledaná integrální rovnice potom vypadá jako

$$\begin{aligned} u(x) = &\int_0^\pi \mathcal{G}(x,y)(f(y)+u(y))\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi - x}{\pi}\int_0^x y(f(y)+u(y))\mathrm{d}y - \frac{x}{\pi}\int_x^\pi (y-\pi)(f(y)+u(y))\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Příklad 13.4 *Nalezněte vlastní hodnoty* $-\Delta$ *na obdélníku* $(-\pi,\pi)\times(0,\pi)$ *se smíšenou (Robinovou) hraniční podmínkou,*

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u(-\pi,y) = u(x,0) = u(\pi,y) = \partial_y u(x,\pi) = 0.$$

Řešení: Problém lze vyřešit tzv. *separací proměnných*, tj. vlastní funkce budeme hledat ve tvaru

$$u(x,y) = f(x)g(y)$$

pro zatím blíže neurčené funkce jedné proměnné f, g. Dosazením do rovnice na vlastní čísla dostaneme

$$-f''(x)g(y) - f(x)g''(y) = \lambda f(x)g(y),$$

což přepíšeme jako

$$-\frac{f''(x)}{f(x)} - \frac{g''(y)}{g(y)} = \lambda,$$

odkud podíly $f''(x)/f(x)$ a $g''(y)/g(y)$ musí být konstantní. Uvážíme-li ještě hraniční podmínku pro u, dostáváme dvojici jednorozměrných úloh na vlastní čísla

$$-f'' = \mu f, \quad f(\pm\pi) = 0$$

a

$$-g'' = \nu g, \quad g(0) = g'(\pi) = 0,$$

přičemž $\mu + \nu = \lambda$.

První z nich má obecné řešení $f(x) = A\sin(\sqrt{\mu}x) + B\cos(\sqrt{\mu}x)$ pro $\mu \neq 0$ a $f(x) = Ax + B$ pro $\mu = 0$. V druhém případě vyhovuje hraniční podmínce jen nulová funkce. Hraniční podmínka v případě $\mu \neq 0$ dává $0 = f(\pm\pi) = \pm A\sin(\sqrt{\mu}\pi) + B\cos(\sqrt{\mu}\pi)$, odkud $B\cos(\sqrt{\mu\pi}) = 0$. Platí tedy $B = 0$ nebo $\cos(\sqrt{\mu\pi}) = 0$. V prvním případě zvolíme A libovolné nenulové a dostáváme $\sqrt{\mu}\pi = k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, a tedy $\mu = k^2$. V druhém případě nutně platí $\sqrt{\mu}\pi = (k+\frac{1}{2})\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, tj. $\mu = (k+\frac{1}{2})^2$; následně

$A = 0$ a B volíme libovolné nenulové. Rozmyslete si, že není nutné a priori předpokládat, že μ je nezáporné (byť to plyne z toho, že v úloze vystupuje *nezáporný operátor*) nebo dokonce reálné. Oba typy vlastních čísel a funkcí můžeme zapsat jednotně jako

$$\mu_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2, \quad f_n(x) = \begin{cases} \cos(\frac{n}{2}x) & \text{pro } n \text{ liché} \\ \sin(\frac{n}{2}x) & \text{pro } n \text{ sudé}, \end{cases}$$

kde $n \in \mathbb{N}$.

Podobným postupem odvodíme

$$\nu_m = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2, \quad g_m(y) = \sin\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)x\right],$$

kde $m \in \mathbb{N}$. Pro původní problém jsme tak nalezli následující vlastní čísla a funkce

$$\lambda_{n,m} = \mu_n + \nu_m, \quad u_{n,m}(x,y) = f_n(x)g_m(y) \quad (\forall n, m \in \mathbb{N}).$$

Pozorný čtenář si položí otázku, zda nemohou existovat ještě nějaké další vlastní funkce. Odpověď zní *ne* a opírá se o následující poznatky funkcionální analýzy. V první řadě funkce $\{f_n\}$, respektive $\{g_m\}$, tvoří ortogonální bázi na $L^2(-\pi,\pi)$, respektive $L^2(0,\pi)$, z čehož plyne, že $\{u_{n,m}\} \equiv \{f_n \otimes g_m\}$ tvoří ortogonální bázi $L^2((-\pi,\pi) \times (0,\pi)) \equiv L^2((-\pi,\pi)) \otimes L^2((0,\pi))$. Dále zkoumaný operátor je samosdružený na $L^2((-\pi,\pi) \times (0,\pi))$, a tudíž jakoukoliv jeho další vlastní funkci by mělo být možné volit ortogonální k těm stávajícím. Jediná funkce kolmá ke všem $u_{n,m}$ je ale nulová funkce.

Bonus 13.1 *Nalezněte vlastní hodnoty $-\Delta$ na obdélníku $(0,a) \times (0,b)$, kde $a, b > 0$, s Neumannovou (tj. normálová derivace podél hranice vymizí) hraniční podmínkou.*

Dodatek

Vlastnosti Fourierovy transformace
$\mathscr{F}[f(cx)](\xi) = \frac{1}{\lvert c\rvert^n}\mathscr{F}[f(t)](\frac{\xi}{c})$
$\mathscr{F}[(ix)^\alpha f(x)](\xi) = \mathcal{D}^\alpha \mathscr{F}[f(x)](\xi)$
$\mathscr{F}[\mathcal{D}^\alpha\big(f(x)\big)](\xi) = (-i\xi)^\alpha\ \mathscr{F}[f(x)](\xi)$
$\mathscr{F}[1](\xi) = (2\pi)^n\delta(\xi)$
$\mathscr{F}\mathscr{F}[f(x)] = (2\pi)^n f(-x)$
$\mathsf{e}^{i\mu\xi}\ \mathscr{F}[f(x)](\xi) = \mathscr{F}[f(x-\mu)](\xi)$
$\mathscr{F}[\mathsf{e}^{i\mu x}f(x)](\xi) = \mathscr{F}[f(x)](\xi+\mu)$
$\lim_{\lvert\xi\rvert\to\infty}\mathscr{F}[f(x)](\xi) = 0$
$\mathscr{F}[f(x) * g(x)] = \mathscr{F}[f(x)]\cdot\mathscr{F}[g(x)]$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathscr{F}[g(y)](x)\ \mathtt{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}[f(y)](x)\ g(x)\ \mathtt{d}x$
$\mathscr{F}:\mathscr{S}\mapsto\mathscr{S}$ i $\mathscr{F}:\mathscr{S}'\mapsto\mathscr{S}'$ jsou spojité

Fourieův vzor	Fourieův obraz	Obor
$\mathsf{e}^{-a\lvert\mathbf{x}\rvert^2}$	$(\frac{\pi}{a})^{n/2}\mathsf{e}^{-\frac{\lvert\xi\rvert^2}{4a}}$	$\mathbb{R}^n$
$\theta(x)\ \mathsf{e}^{-ax},\ \ \Re(a)>0$	$\frac{1}{a-i\xi} = \frac{i}{\xi+ia}$	$\mathbb{R}$
$\theta(x)\ \mathsf{e}^{-a\lvert x\rvert},\ \ \Re(a)>0$	$\frac{2a}{a^2+\xi^2}$	$\mathbb{R}$
$\delta(\mathbf{x}-\mu)$	$\mathsf{e}^{i\xi\cdot\mu}$	$\mathbb{R}^n$
$\theta(x)$	$\pi\delta(\xi)\ +\ i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$	$\mathbb{R}$
$\theta(-x)$	$\pi\delta(\xi)\ -\ i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sgn}(x)$	$2i\ \mathcal{P}\frac{1}{\xi}$	$\mathbb{R}$
1	$(2\pi)^n\ \delta(\xi)$	$\mathbb{R}^n$
$\mathcal{P}\frac{1}{x}$	$i\pi\ \mathrm{sgn}(\xi)$	$\mathbb{R}$
$\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$	$-\pi\ \lvert\xi\rvert$	$\mathbb{R}$
e^{ix^2}	$\sqrt{\pi}\ \mathsf{e}^{-\frac{i}{4}(\xi^2-\pi)}$	$\mathbb{R}$
$\theta(\mathtt{R}-\lvert x\rvert)$	$2\ \frac{\sin(\mathtt{R}\xi)}{\xi}$	$\mathbb{R}$
$\frac{\theta(\mathtt{R}-\lvert\mathbf{x}\rvert)}{\sqrt{\mathtt{R}^2-\lvert\mathbf{x}\rvert^2}}$	$2\pi\ \frac{\sin(\mathtt{R}\lvert\xi\rvert)}{\lvert\xi\rvert}$	$\mathbb{R}^2$
$\delta_{S_\mathtt{R}}(\mathbf{x})$	$4\pi\mathtt{R}\ \frac{\sin(\mathtt{R}\lvert\xi\rvert)}{\lvert\xi\rvert}$	$\mathbb{R}^3$
$\mathbf{x}^\alpha$	$(-i)^{\lvert\alpha\rvert}(2\pi)^n\delta^{(\alpha)}(\xi)$	$\mathbb{R}^n$
e^{icx}	$2\pi\delta(\xi+c)$	$\mathbb{R}$
$\cos(cx)$	$\pi\big(\delta(\xi-c)+\delta(\xi+c)\big)$	$\mathbb{R}$
$\sin(cx)$	$i\pi\big(\delta(\xi-c)-\delta(\xi+c)\big)$	$\mathbb{R}$

Vlastnosti Laplaceovy transformace
$\mathscr{L}[f(ct)](p) = \frac{1}{c}\mathscr{L}[f(t)](\frac{p}{c})$
$\mathscr{L}[(-t)^n f(t)](p) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\mathscr{L}[f(t)](p)$
$\mathscr{L}[\dot{f}(t)](p) = p\ \mathscr{L}[f(t)](p) \boxed{-f(0_+)}$, zarámovaný člen není v zob. $\mathscr{L}$
$\mathscr{L}[\theta(t)\int_0^t f(\tau)\ \mathrm{d}\tau](p) = \frac{1}{p}\mathscr{L}[f(t)](p)$
$\mathscr{L}[\frac{f(t)}{t}](p) = \int_p^\infty \mathscr{L}[f(t)](q)\ \mathrm{d}q$
$\mathsf{e}^{ap}\mathscr{L}[f(t)](p) = \mathscr{L}[f(t+a)](p)$
$\mathscr{L}[\mathsf{e}^{at} f(t)](p) = \mathscr{L}[f(t)](p-a)$
$\int_0^\infty f(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \lim_{p\to 0_+} \mathscr{L}[f(t)](p)$
$\mathscr{L}[f(t) * g(t)] = \mathscr{L}[f(t)] \cdot \mathscr{L}[g(t)]$
$\int_0^\infty f(t)\ \mathscr{L}[g(\tau)](t)\ \mathsf{d}t = \int_0^\infty \mathscr{L}[f(\tau)](t)\ g(t)\ \mathsf{d}t$

Laplaceův vzor	Laplaceův obraz
$\delta(t-\tau)$	$\mathsf{e}^{-p\tau}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{p}$
$\theta(t)\ t^n\ \ (n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\theta(t)\ t^\alpha\ \ (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$\theta(t)\ \mathsf{e}^{\mu t}$	$\frac{1}{p-\mu}$
$\theta(t)\ \sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
$\theta(t)\ \cos(\beta t)$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
$\theta(t)\,(\sin(t) - t\cos(t))$	$\frac{2}{(1+p^2)^2}$
$\theta(t)\ \mathsf{e}^{\mu t}\cos(\omega t)$	$\frac{p-\mu}{(p-\mu)^2+\omega^2}$
$\theta(t)\ \mathsf{e}^{\mu t}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-\mu)^2+\omega^2}$
$\theta(t)\ \sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\theta(t)\ \cosh(\omega t)$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$