Rovnice matematické fyziky

Václav Klika

verze: 1. února 2021

Obsah

1 Motivace **4**
- 1.1 Co je Diracova δ-funkce . . . 4
- 1.2 Koncept testování funkcemi . . . 5
- 1.3 Testovací funkce . . . 6
- 1.4 L^2 Hilbertův prostor . . . 7
  - 1.4.1 Zavedení L^2 . . . 8

2 Zobecněné funkce **10**
- 2.1 Zavedení zobecněných funkcí . . . 10
  - 2.1.1 Příklady zobecněných funkcí . . . 11
  - 2.1.2 Vnoření klasických funkcí do zobecněných funkcí . . . 12
  - 2.1.3 Příklady . . . 14
- 2.2 Zavedení základních operací v $\mathscr{D}'$ . . . 15
  - 2.2.1 Derivace v $\mathscr{D}'$ . . . 15
  - 2.2.2 Regulární lineární transformace . . . 17
  - 2.2.3 Násobení hladkou funkcí v $\mathscr{D}'$ . . . 18
- 2.3 Vlastnosti základních operací v $\mathscr{D}'$ . . . 19
  - 2.3.1 Identity kalkulu . . . 20
- 2.4 Nosič zobecněné funkce a další poznatky o $\mathscr{D}'$ . . . 23
  - 2.4.1 Nosič zobecněné funkce . . . 23
  - 2.4.2 Uzavřenost $\mathscr{D}'$ . . . 25
- 2.5 Tenzorový součin a konvoluce . . . 26
  - 2.5.1 Zavedení tenzorového součinu . . . 26
  - 2.5.2 Vlastnosti tenzorového součinu v $\mathscr{D}'$ . . . 27
  - 2.5.3 Zavedení konvoluce . . . 28
  - 2.5.4 Konvoluce testovacích a zobecněných funkcí . . . 30
  - 2.5.5 Konvoluce zobecněných funkcí . . . 34
- 2.6 Užití konvoluce pro řešení diferenciálních rovnic v $\mathscr{D}'$ . . . 36

3 Integrální transformace **37**
- 3.1 Motivace . . . 37
- 3.2 Schwartzův prostor a prostor temperovaných zobecněných funkcí . . . 38
- 3.3 Fourierova transformace na $\mathscr{S}$ . . . 40
  - 3.3.1 Vlastnosti $\mathfrak{F}$ na $\mathscr{S}$ . . . 41
- 3.4 Fourierova transformace na $\mathscr{S}'$ . . . 44
  - 3.4.1 Motivace . . . 44
  - 3.4.2 Vlastnosti $\mathfrak{F}$ na $\mathscr{S}'$ . . . 44
- 3.5 Klasická Laplaceova transformace . . . 47
- 3.6 Zobecněná Laplaceova transformace . . . 49

4 Řešení počátečních úloh ODR a PDR **53**
4.1 Lineární ODR s konstantními koeficienty . . . 53
4.2 Parciální diferenciální rovnice . . . 59
4.2.1 PDR 1. řádu a metoda charakteristik . . . 59
4.2.2 Klasifikace PDR 2. řádu a převod na normální tvar . . . 61
4.2.3 Řešení počátečních úloh lineárních PDR 2. řádu . . . 66
4.2.4 Hledání fundamentálních řešení $\mathscr{E}$ vlnového a Laplaceova operátoru . . . 68
4.2.5 Vhled do kvalitativního chování řešení jednotlivých typů PDR . . . 70

5 Integrální rovnice, spektrum, ON báze **72**
5.1 Fredholmovy integrální rovnice . . . 72
5.1.1 Degenerované jádro . . . 72
5.1.2 Iterativní metody řešení . . . 73
5.1.3 Metoda postupných aproximací na $\mathcal{C}(\bar{G})$ . . . 75
5.1.4 Metoda iterovaných jader . . . 76
5.2 Volterrovy integrální rovnice . . . 77
5.2.1 Iterativní metody . . . 78
5.3 Spektrum, ortonormální báze a vlastnosti integrálních operátorů . . . 79

6 Eliptické diferenciální rovnice a operátory, Sturm-Liouvilleova teorie **83**
6.1 Vlastnosti L . . . 84
6.2 Sturm-Liouvilleova úloha pro 1 dimenzi . . . 86

Předmluva

Vážení čtenáři, zde bude v průběhu semestru vypracováván doprovodný text k přednášce z předmětu Rovnice matematické fyziky na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze. Dle dlouholeté a osvědčené tradice na FJFI, výklad vychází z Vladimirovovy monografie. Souhrnný rozsah látky z obou dílů skript by měl odpovídat tomu, co lze reálně odpřednášet během jednoho semestru v rozsahu dvě dvouhodinové přednášky týdně doplněné o jedno dvouhodinové cvičení. Látka se oproti Vladimirovově monografii trochu liší, zejména v těžších pasážích kolem konvolucí a tenzorového součinu.

Je mou milou povinností poděkovat studentovi Ing. Janovi Mazáčovi za sepsání podkladového textu na základě přednášek (wikiskriptum), ze kterého nyní s výhodou čerpám. Dále děkuji za velmi pečlivé korektury studentům Janovi Hrubému, Pavlovi Stojaspalovi, Tadeášovi Němcovi a Evě Fialové. Za veškeré chyby a nepřesnosti, které v současném textu zůstaly, nesu ovšem plnou odpovědnost já. Dopředu se za ně omlouvám a prosím na jejich upozornění.

Václav Klika

Kapitola 1

Motivace

Praktickým cílem předmětu je vybudovat metody řešení parciálních diferenciálních rovnic. Kromě toho si představíme důležité teoretické koncepty mající široké uplatnění jako Diracova delta funkce, slabá derivace, Greenova funkce či samotný koncept zobecněných funkcí. Na závěr si též předvedeme rozšíření pojmu báze z lineární algebry i do nekonečných prostorů funkcí a užijeme ho k řešení okrajových úloh.

Jelikož budeme vytvářet novou teorii, teorii zobecněných funkcí, tak stěžejní roli v našich úvahách bude hrát motivace nových pojmů. Nyní se pokusme ilustrovat, proč je vhodné zobecňovat standardní koncept funkcí i jejich vyhodnocování či studium pomocí funkčních hodnot.

1.1 Co je Diracova δ-funkce

Často se při popisu reálných dějů uchylujeme ke vhodnému zjednodušování. Jedním takovým příkladem je bodový zdroj jakožto aproximace objektu s nenulovým objemem (např. bodový zdroj záření v teoretické fyzice), kde však potřebujeme i mít možnost vyjádření intenzity tohoto zdroje (např. různá jasnost hvězd na obloze).

Na první pohled se zdá být rozumná definice

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

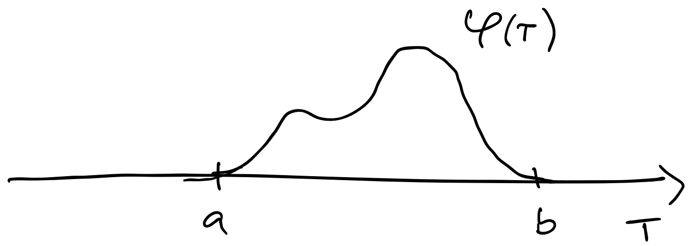
kde zároveň požadujeme (abychom měli možnost popisovat různou intenzitu)

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Avšak ze znalosti Lebesgueova integrálu hned vidíme, že taková funkce neexistuje. Integrace totiž nezávisí na množině míry nula. Je třeba zavést Diracovu δ-funkci jiným způsobem, aby tyto požadované vlastnosti byly zachovány. Problém u výše uvedeného zavádění Diracovy δ-funkce je v nesprávnosti přiřazování funkčních hodnot k bodům z $\mathbb{R}$. K tomu poslouží jisté zobecnění klasických funkcí, které se zde ukazuje býti nedostatečné, a které budeme nazývat *zobecněnými funkcemi.* Je zde třeba poznamenat, že samotný (geniální) Paul Dirac pracoval s touto funkcí intuitivně i před současnou přesnou formulací, kterou si ukážeme, avšak správně. Snahu o přesnost zde lze tedy i (správně) vyložit jako nutnost pro nás, kteří nemáme intuici dostatečně správnou.

Zároveň jakožto další pozvánku do teorie zobecněných funkcí prozradíme dopředu, že se spoustou analytických nástrojů se bude v zobečněných funkcích pracovat snadněji. Např. problémy existence derivace (každá zobecněná funkce bude mít všechny derivace), záměny limit či limity a derivace budou odstraněny. Otázkou je, jakou daň za to bude třeba zaplatit. Toto vše bude během pár týdnů/stránek objasněno.

Klíčovým, avšak zcela odlišným, konceptem od klasické analýzy je zjišťování vlastností funkce pomocí testování jinými funkcemi, tzv. *testovacími funkcemi.* Jak bylo naznačeno u Diracovy δ-funkce, na funkci nebudeme pohlížet *bodově.*



Obrázek 1.1: Příklad distribuce teplot v materiálu.

1.2 Koncept testování funkcemi

Funkce a její vlastnosti mohou být zkoumány různými způsoby, jak si nyní ukážeme, byť obvyklý způsob v klasické analýze je založený jen na bodovém funkčním předpisu. Nastíníme si jednotlivé možnosti a pokusíme se přesvědčit, že testování pomocí testovacích funkcí může být dokonce přirozenější.

Mezi nejběžnější způsoby vyhodnocování funkcí (v 1D pro jednoduchost) patří:

1. bodové vyhodnocování, tj. funkční předpis $y = f(x)$ v konkrétním a každém bodě $x \in \mathbb{R}$;
2. průměrování přes intervaly (viz níže);
3. pomocí testovacích funkcí - nejpřirozenější (a jak uvidíme později i v jistém smyslu nejsilnější).

Pro ilustraci a porovnání všech přístupů uvažme experimentátora zkoumající jistou vlastnost látky v závislosti na teplotě. Tu však nemůže přesně kontrolovat, bude proměnlivá v jistém rozsahu teplot $a \leq T \leq b$. V takovéto situaci se bodový přístup jevý jako nereálný. Naopak se zdá být správně uvažovat průměrování vlastnosti v závislosti na teplotě přes jistý rozsah teplot, avšak ani tento postup není ideální, jelikož např. extrémních teplot v rozsahu bude nabýváno méně často než typických kolem středu fluktuací, viz graf 1.1.

Jak tedy vylepšit ono průměrování? Chceme zjistit onu vlastnost látky v závislosti na teplotě T testováním látky s rozdělením teploty $\varphi(T)$. Stačí uplatnit vážené průměrování. Totiž ono naivní zprůměrování zmiňované výše odpovídá předpisu

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(T)dT,$$

což odpovídá vážení při stejnoměrném rozdělení teploty na $[a, b]$. Vážený průměr je tedy přirozeně (zapomeňme na normalizační konstantu před integrálem)

$$\int_a^b f(T)\varphi(T)dT = \int_{\mathbb{R}} f(T)\varphi(T)dT,$$

kde jsme využili předpokladu, že fluktuace jsou omezených hodnot. Klíčové je, že hodnota váženého průměrování závisí na zvolené testovací funkci φ a (intuitivně) budeme-li jich mít dostatek k otestování, tak jistou představu o chování funkce f získáme (na místě je otázka, jak ale lze tuto informaci o f rekonstruovat).

Poznámka. Integrál

$$\int_a^b f(T)\varphi(T)\mathrm{d}T = \langle f, \varphi\rangle$$

je totožný s definicí skalárního součinu na prostoru spojitých funkcí na uzavřeném intervalu $[a, b]$ (viz kurzy lineární algebry).

1.3 Testovací funkce

Nyní si zavedeme vhodnou množinu testovacích funkcí, i když její vhodnost vyvstane až s postupem přednášky. Mějme na paměti nutnost velkého množství testovacích funkcí k získání informací o dané testované funkci. Vybízím čtenáře, aby si zkusil zavést svůj jiný prostor testovacích funkcí a vyzkoušel si vybudovat jiné, své vlastní, nezávislé, zobecněné funkce. Prvním problémem bude hned zopakování první důležité věty v této sekci, která zajišťuje právě onu klíčovou možnost nahradit studium funkce pomocí studia funkčních předpisů za studium pomocí testování testovacími funkcemi.

Definice 1.3.1. **Nosičem funkce (supportem)** φ rozumíme uzávěr množiny všech argumentů funkce s nenulovým obrazem, tj. $\overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\}}$ a označujeme jej $\operatorname{supp}\varphi$.

Definice 1.3.2. Množinu $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp}\varphi \text{ je omezený}\}$ nazvěme **množinou testovacích funkcí**. Tzn. **testovací funkce** jsou funkce třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ s kompaktním nosičem (uzávěr v definici nosiče je důležitý). Buď nyní $G = G^o$ otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Pak definujeme $\mathscr{D}(G) = \{\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp}\varphi \subset G\}$

Poznámka. Je zřejmé, že pokud $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, pak $\alpha\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$. Máme-li $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, pak součet $\varphi + \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ a nosič $\operatorname{supp}(\varphi + \psi)$ je zřejmě podmnožinou sjednocení $\operatorname{supp}\varphi \cup \operatorname{supp}\psi$. Buď nyní f hladká funkce. Pak rovněž $f\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Odtud již plyne, že $\mathscr{D}$ s operacemi sčítání a násobení skalárem tvoří lineární vektorový prostor. (Doporučuji si explicitně rozmyslet vztahy mezi nosiči při těchto operacích a umět je ukázat.)

Nyní se pokusíme o předběžnou definici pojmu zobecněné funkce f na základě předchozí motivace. Tuto definici sice později upravíme, bude se však jednat o důležitý speciální příklad.

Definice 1.3.3. Nechť f je reálná funkce reálné proměnné (celý koncept zobecněných funkcí lze zobecnit i na komplexní funkce). Nechť dále

$$\exists \int_{[a,b]} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x < +\infty,\ \forall [a,b]\,,\ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^1).$$

Pak tento integrál ve smyslu funkcionálu, tj. zobrazení $\mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, nazýváme **zobecněnou funkcí**. Proměnnými funkcionálu tedy jsou $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^1)$, nikoliv $x \in [a,b]$, a jeho hodnotu při daném φ pak nazýváme *a*kcí testovací funkce φ na f a značíme

$$(f, \varphi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Poznámka. Zkuste najít (co největší) množinu funkcí f tak, aby pro ni definice zobecněných funkcí (výše) byla rozumná.

Užité značení pro akci testovací funkce na f je obvyklé. Odkazuje se na souvislost se skalárním součinem.

Věta 1.3.4. Nechť f, g jsou spojité reálné funkce reálné proměnné a nechť dále akce libovolné testovací funkce φ na f a g jsou shodné, tj.

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Pak platí $f = g$.

Poznámka. Tato věta je klíčová v konceptu testování funkcí, jelikož nám ukazuje, že má smysl zkoumat pomocí testovacích funkcí přinejmenším spojité funkce, protože z výsledků akce s dostatečným počtem $\varphi(x)$ jsme schopni dvě takové funkce od sebe rozlišit. Všimněte si, kolikrát (a jak) je v důkaze použita vlastnost, že testovacích funkcí je dostatečně mnoho.

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Pro ten předpokládejme, že $\exists x_0$ takové, že $f(x_0) \neq g(x_0)$. Dále víme z rovnosti akcí, že

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x))\, \varphi(x) \mathrm{d}x = 0.$$

Ze spojitosti funkcí f a g plyne existence okolí U_{x_0} takového, že $\forall x \in U_{x_0}$ je BÚNO $f(x) > g(x)$. Nakonec vezměme testovací funkci $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ takovou, že $\operatorname{supp}\psi \subset U_{x_0}$. Pak získáme snadno následující odhady

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x))\, \psi(x) \mathrm{d}x = \int_{\operatorname{supp}\psi} (f(x) - g(x))\, \psi(x) \mathrm{d}x \geq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \mathrm{d}x > 0,$$

kde poslední nerovnost platí proto, že mohu vždy vhodně pozměnit zvolenou testovací funkci ψ tak, aby její integrál byl nenulový (ze základních vlastností lin. vekt. prostoru testovacích funkcí zmíněných výše). Získaný odhad je však ve sporu s počátečním předpokladem. □

Poznámka. Zkuste explicitně sestrojit jakýkoli netriviální příklad testovací funkce. Ideálně zkuste i ukázat, že užitá testovací funkce ψ z důkazu tvrzení zaručeně existuje (pro libovolně malé ε a okolí U_{x_0}). Případně se o tom přesvědčíte na cvičeních.

1.4 L^2 Hilbertův prostor

Vraťme se nyní k otázce, kterou jsme si na začátku této kapitoly položili: Jaké funkce volit, aby byla ona prozatímní definice zobecněných funkcí rozumná? Odpovědí jsou tzv. lokálně integrovatelné funkce na G, které si nyní představíme.

Definice 1.4.1. Množinu

$$\mathcal{L}^1_{loc}(G) := \left\{ f \mid \forall x_0 \in G\ \exists U_{x_0} \text{ takové, že } \int_{U_{x_0}} |f| < +\infty \right\}$$

nazýváme **lokálně integrovatelné funkce na** G, tj. přesně v souladu s definicí.

Nejprve si ukážeme pomocné tvrzení.

Věta 1.4.2. $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(G) \Leftrightarrow \forall K \subset G$ kompaktní $\exists \int_K |f| < +\infty$.

Důkaz. (pro úplnost, není vyžadován) Důkaz provedeme z definice kompaktnosti:

Poznámka (z MAA pro MAB). Řekneme, že množina K je *pokrytá* systémem množin $\mathcal{S}$, pokud $K \subset \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$. *Podpokrytí* je podmnožina $\mathcal{S}$. Řekneme, že K je *kompaktní*, právě když každé pokrytí K má konečné podpokrytí. Konečně lze ukázat, že sekvenční kompaktnost, tj. kompaktnost definovaná přes posloupnosti (vyskytující se v MAB i MAA), je identická této definici kompaktnosti přes pokrytí.

$\Leftarrow$ Triviální - stačí nalézt K tak, aby $U_{x_0} \subset K$.

$\Rightarrow$ Mějme K libovolnou kompaktní množinu, kterou jistě můžeme pokrýt okolími U_{x_0} pro všechna $x_0 \in K$. Jelikož je ale K kompaktní množina, víme, že existuje konečné podpokrytí $\{U_{x_0^k} | k \in \{1, 2, \ldots, N\}\}$. Pak můžeme odhadovat

$$\int_K f \leq \int_K |f| = \int_{\bigcup_{k=1}^N U_{x_0}^k} |f| \leq \sum_{k=1}^N \int_{U_{x_0}^k} |f| < +\infty$$

□

Poznámka. Nyní je již snadné nahlédnout, že každá lokálně integrovatelná funkce je zobecněnou funkcí z prozatimní definice. Totiž jestliže $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, pak

$$(f,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \overset{\varphi\in\mathscr{D}}{=} \int_{\operatorname{supp}\varphi} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \leq C\int_{\operatorname{supp}\varphi} f(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

Předposlední nerovnost plyne z faktu, že nosič φ je v $\mathbb{R}^n$ kompaktní množinou a tedy φ je omezená funkce. Konečně f je integrabilní na kompatním nosiči φ, jak jsme právě ukázali.

1.4.1 Zavedení L^2

Viděli jsme, že testování funkcí funkcemi úzce souviselo se skalárním součinem na prostoru spojitých funkcí. Abychom tento koncept rozšířili na obecnější funkce (bližší právě zmíněným lokálně integrabilním), tak zkusíme rozšířit skalární součin ze spojitých funkcí na kvadraticky integrovatelné.

Mějme prostor $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, tj. prostor všech komplexních funkcí $f(x)$ reálné proměnné Lebesgueovsky integrabilních s kvadrátem, tj. $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\mathrm{d}x < +\infty$. Pro $f,\ g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ definujme zobrazení $\langle f,g\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$. Je toto zobrazení skalárním součinem na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$? Definici skalárního součinu doporučujeme v detailu si čtenářem připomenout. My zde poukážeme na fakt, že skalárním součinem zobrazení nemůže být, jelikož definitnost diagonály skalárního součinu vyžaduje $\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Tuto podmínku splňuje však nejen nulový prvek $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, dokonce nekonečně mnoho funkcí. Jmenovitě jsou to právě takové funkce, které se od nulové liší na množině míry nula.

Možná oprava spočívá v pozměnění prostoru integrovatelných funkcí a to tak, že zobrazení již normou bude. Pro tyto účely zavedeme relaci $\sim$, která bude relací ekvivalence (viz obecná algebra).

Definice 1.4.3. Buďte $f,\ g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, tj. $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\mathrm{d}x < +\infty$, $\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p\mathrm{d}x < +\infty$. Relaci $\sim$ definujeme následovně: $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0$ s. v. (skoro všude). Tedy dvě funkce jsou v relaci, pokud se liší nejvýše na množině míry nula.

Jedná se o relaci ekvivalence, neboť je symetrická, reflexivní a transitivní (opět viz obecná algebra). [1] Množina $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ se díky této relaci ekvivalence rozpadá na disjunktní množiny, tzv. třídy ekvivalence (množiny, které jsou tvořeny funkcemi vzájemně ekvivalentními vzhledem k relaci $\sim$). Říkáme, že jsme faktorizovali množinu $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ a ony disjunktní třídy ekvivalence seskupíme do nové množiny $L^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)|_{\sim}$. Konečně pro tuto množinu je již snadné cvičení ukázat, že uvedené zobrazení je skalárním součinem (ukažte). Poznamenáváme jen, že její prvky nejsou funkce, ale třídy ekvivalence. Provedli jsme totiž obvyklé ztotožnění třídy ekvivalence s jedním jejím zástupcem. Správně bychom měli ještě dokázat, že námi zavedený skalární součin a veškeré následně užívané operace pro Lebesgueovsky integrovatelné funkce (např. násobení atd.) nezávisí na volbě zástupce. Tyto detaily budeme pro jednoduchost vynechávat a přenecháme čtenáři k rozmyšlení. Pak se již jedná o prostor funkcí a definice našeho skalárního součinu v něm dává dobrý smysl. Podobně lze postupovat i pro faktorizaci prostoru lokálně integrovatelných funkcí a obdržet tak množinu tříd ekvivalencí $L^1_{loc}(G)$.

Připomeňme ještě několik důležitých pojmů o vektorových prostorech:

Definice 1.4.4. Buď V vektorový prostor s normou, posloupnost $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (V,\ \|\cdot\|)$. Řekneme, že **posloupnost** $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ **konverguje k** $a \in V$, značíme $a_k \to a$, právě tehdy, když číselná posloupnost $\|a_k - a\| \to 0$ pro $k \to +\infty$.

Vidíme, že jsme definici konvergence na vektorovém prostoru (nový pojem) definovali pomocí konvergence v $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ (známý pojem).

[1] Pro přiblížení nabízíme paralelu ke ztotožňování zlomků, kdy různé zlomky $1/2,\ 2/4,\ 3/6,\ldots$ lze „ztotožnit“ do jedné třídy ekvivalence, kde relací by byla stejná hodnota zlomku.

Definice 1.4.5. Buď V vektorový prostor s normou, posloupnost $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (V,\ \|\cdot\|)$. Řekneme, že **posloupnost** $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ **je cauchyovská**, právě když

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists k_0 \in \mathbb{N})\,(\forall m,\ n > k_0)\,(\|a_m - a_n\| < \varepsilon)\,.$$

Definice 1.4.6. Řekneme, že lineární vektorový prostor V s normou je **Banachův**, právě tehdy, když každá cauchyovská posloupnost konverguje ve V.

Poznámka. Konvergenci cauchyovské posloupnosti lze ekvivalentně vyjádřit jako požadavek, aby limitní prvek byl prvkem V, tzn. prostor V je úplný.

Poznámka. Bolzano-Cauchyovo kritérium pro číselné posloupnosti je důkazem úplnosti $\mathbb{R}^n$. Pojmy výše zmíněné je možné zobecnit na prostory s obecnějším měřením vzdálenosti (který ani nevyžaduje lineární strukturu prostoru) pomocí metriky.

Definice 1.4.7. Úplný lineární prostor se skalárním součinem nazýváme **Hilbertův**.

Nyní uvedeme pár pozorování (z funkcionální analýzy) bez důkazu, avšak pro náš výklad RMF jsou důležitá.

Věta 1.4.8 (Riesz-Fischer)**.** Prostory

$$L^p = \left\{\text{třídy ekvivalence na } \mathcal{L}^p \mid \|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\right\}$$

jsou Banachovy prostory.

Poznámka. Důležitým důsledkem této věty je fakt, že L^2 je Hilbertův prostor.

Poznámka. Předchozí tvrzení můžeme „rozšířit“ na podmnožiny $G \subset \mathbb{R}^n$. Pak se zavádí $L^p(G)$ s normou $\|f\|_{L^p(G)} = \left(\int_{G\subset\mathbb{R}^n} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Na konečných podmnožinách lze pak Lebesgueovy prostory uspořádat: Nechť G je otevřená množina taková, že $\mu(G) < +\infty$. Pak $L^q(G) \subset L^p(G) \Leftrightarrow p < q$.

Poznámka. Prostor testovacích funkcí je podmnožinou libovolného L^p prostoru, $\mathscr{D} \subset L^p$. Později toto pozorování vylepšíme o naopak hustotu prostoru testovacích funkcí v L^p prostorech.

Důkaz. Stačí integrovat po kompaktním nosiči, na kterém φ nutně nabývá svého maxima M. Integrál pak lze shora odhadnout

$$\|\varphi\|_p = \sqrt[p]{\int_{\operatorname{supp}\varphi} |\varphi(x)|^p \,\mathrm{d}x} \leq |M| \cdot \sqrt[p]{\mu(\operatorname{supp}\varphi)} < +\infty.$$

□

Kapitola 2

Zobecněné funkce

V této kapitole již přesně zavedeme zobecněné funkce a uvidíme, jak s ní předchozí prozatímní definice souvisí. Opět motivace bude sehrávat ústřední úlohu při rozšiřování pojmů z klasické analýzy do zobecněných funkcí. Klíčová tedy bude souvislost mezi zobecněnými a klasickými funkcemi.

2.1 Zavedení zobecněných funkcí

Definice 2.1.1. Nechť f je lineární funkcionál nad $\mathscr{D}(G)$, tj, $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ a f je lineární. Množinu všech lineárních a spojitých, tj. převádějících konvergentní posloupnost na konvergentní, funkcionálů nad $\mathscr{D}(G)$ nazveme **prostorem zobecněných funkcí (či distribucí)**, značíme $\mathscr{D}'(G)$. Hodnotu funkcionálu f na funkci φ označujme $(f,\ \varphi)$ namísto $f(\varphi)$.

Poznámka. Definice není úplnou do poskytnutí definice konvergence v definičním oboru zobecněných funkcí, totiž na prostoru testovacích funkcí. Až tato definice **určí význam a obecnost zobecněných funkcí. Z toho důvodu nyní definujeme konvergenci v $\mathscr{D}$.**

Definice 2.1.2. Multiindexem α v n-dimenzionálním prostoru rozumíme uspořádanou n-tici čísel $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ ze $\mathbb{Z}_+^n := (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$.

Označme $|\alpha| = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$.

S pomocí multiindexu pak můžeme psát $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Definujme rovněž operátor $D^\alpha := \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$.

Definice 2.1.3. Nechť $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ je posloupnost v $\mathscr{D}(G)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(G)$. Řekneme, že φ_k **konverguje k** φ **v** $\mathscr{D}(G)$, značíme $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$, právě když

1. nosiče φ_k jsou stejně (stejnoměrně) omezené, tj. $(\exists R > 0)\,(\forall k \in \mathbb{N})\,(\operatorname{supp} \varphi_k \subset B_R(0))$[1];

2. $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ platí, že $D^\alpha \varphi_k$ konverguje stejnoměrně na množině G k $D^\alpha \varphi$, tedy $D^\alpha \varphi_k \overset{G}{\rightrightarrows} D^\alpha \varphi$.

Poznámka. Tato definice vyžaduje znalost limitní funkce φ. Je ale možné definovat i konvergenci v $\mathscr{D}$ jakožto vlastnost dané posloupnosti (a to podobně jako u konvergence číselné posloupnosti či stejnoměrné konvergence funkční posloupnosti, tj. pomocí Bolzano-Cauchyovy podmínky). Tuto vlastnost budeme zapisovat jako $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}}$ a vřele doporučuji čtenáři náležitě promyslet. Z tohoto pozorování plyne totiž také to, že prostor testovacích funkcí $\mathscr{D}$ je uzavřený vůči konvergenci v $\mathscr{D}$.

Poznámka. Zmíníme pár pozorování k právě zavedeným definicím.

[1]symbolem $B_R(0)$ značíme otevřenou kouli se středem v bodě 0 a poloměrem R

1. Kromě silných požadavků na testovací funkce se zde přidávají další netriviální požadavky na posloupnosti konvergující v $\mathscr{D}$. Existuje vůbec nějaký příklad takovéto posloupnosti? Zkuste nějaké netriviální sestavit (což je i jedním z úkolů na doprovodných cvičeních).

2. $\mathscr{D}'$ je lineární vektorový prostor s přirozeně definovanými operacemi sčítání a násobení, tzn, $\forall f, g \in \mathscr{D}'$ definujme sčítání

$$(f+g, \varphi) := (f, \varphi) + (g, \varphi)\ \forall \varphi \in \mathscr{D}$$

a pro $\alpha \in \mathbb{C}$ a pro $f \in \mathscr{D}'$ definujeme násobení

$$(\alpha \cdot f, \varphi) := \alpha(f, \varphi)\ \forall \varphi \in \mathscr{D}.$$

3. Byť to zní triviálně, definujme si (přesněji připomeňme si přirozenou) rovnost zobecněných funkcí. *Rovnost zobecněných funkcí* (tj. $f = g$ v $\mathscr{D}'$) nastává právě tehdy, když $\forall \varphi \in \mathscr{D}$ platí, že $(f, \varphi) = (g, \varphi)$.

Tedy dvě zobecněné funkce se rovnají, pokud se rovnají v každém bodě definičního oboru. Uvidíme, že toto připomenutí bude důležité v jakýchkoli úpravách či výpočtech se zobecněnými funkcemi a to vč. výpočtu limit, kterou si nyní definujme.

Definice 2.1.4. Buď $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ posloupnost v $\mathscr{D}'(G)$ a $f \in \mathscr{D}'(G)$. Řekneme, že f_k **konverguje k f v $\mathscr{D}'(G)$**, značíme $f_k \longrightarrow f$ v $\mathscr{D}'$ či prostě $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ v $\mathscr{D}'$, právě když

$$(f_k, \varphi) \longrightarrow (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(G).$$

Povšimněme si, že při užití obvyklého symbolu limity platí

$$\lim_{k\to\infty} (f_k, \varphi) = (f, \varphi) = (\lim_{k\to\infty} f_k, \varphi)$$

tj. limitu lze vytáhnout z první pozice v závorce popisující akci testovací funkce na zobecněnou funkci, což budeme hojně užívat při výpočtu limit.

Pro takovouto definici operace limity se též užívá pojmu definice limity ve slabém smyslu.

2.1.1 Příklady zobecněných funkcí

Diracova δ-funkce

S Diracovou δ-funkcí jsme se setkali v samotné motivaci pro tento předmět. Víme, že její zavedení v klasických funkcích selhalo a nyní se pokusíme ji zavést jako funkci zobecněnou. Blízkost této definice její naivní reprezentaci z motivace však budeme schopni posoudit až postupem času.

$$(\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)) \text{ definujeme } (\delta,\ \varphi) := \varphi(0).$$

Pro δ musíme tedy ověřit, že se jedná o funkcionál nad $\mathscr{D}$, že je lineární a spojitý.

Funkcionál: $\delta : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$. Jelikož je $\varphi(0) < +\infty$, víme, že se tedy jedná o funkcionál, neboť jeho definice dává dobrý smysl $\forall \varphi \in \mathscr{D}$, tj. vrací konečnou hodnotu pro každou testovací funkci.

Linearita: Uvažujme $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak

$$(\delta, \underbrace{\varphi + \alpha\psi}_{\eta\in\mathscr{D}}) = \eta(0) = (\varphi + \alpha\psi)(0) = \varphi(0) + \alpha\psi(0) = (\delta, \varphi) + \alpha(\delta, \psi)$$

Spojitost: Spojitost testujeme pouze vůči velmi specifickým posloupnostem, totiž uvažujme konvergentní posloupnost $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$, která konverguje $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$. Chceme ukázat, že následně v $\mathbb{C}$ konverguje číselná posloupnost$(\delta, \varphi_k) \longrightarrow (\delta, \varphi)$. Kvůli již ukázané linearitě funkcionálu můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat, že $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$. Z předpokladu konvergence posloupnosti plyne, že

1. $(\exists R > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(\operatorname{supp}\varphi_k \subset B_R(0))$;

2. $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ platí, že $D^\alpha \varphi_k \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0$.

Druhá podmínka platí pro všechny multiindexy, tedy speciálně vynucuje i stejnoměrnou konvergenci posloupnosti samotné (bez derivace). Pak dostáváme $\varphi_k \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow \varphi_k(x) \overset{\mathbb{R}^n}{\to} 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$. Nyní stačí volit $x = 0$ a tvrzení je dokázáno. Totiž

$$\underbrace{\lim_{k\to\infty} (\delta, \varphi_k)}_{\lim_{k\to\infty}\varphi_k(0)=0} = (\delta, 0) = 0.$$

Diracova δ-funkce je tedy zobecněnou funkcí a prvním příkladem zobecněné funkce. Obdobně se dá ukázat, že i *centrovaná Diracova δ-funkce* zavedená pomocí $(\delta_{x_0},\ \varphi) := \varphi(x_0)$ je zobecněná. Důkaz je zcela totožný.

2.1.2 Vnoření klasických funkcí do zobecněných funkcí

Viděli jsme v úvodní motivaci, že pro libovolnou lokálně integrovatelnou funkci $f \in L^1_{loc}$ má integrál

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi < +\infty$$

konečnou hodnotu pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathscr{D}$. Lokálně integrovatelné funkce nejsou zobecněné, jelikož jejich definiční obor je jiný, $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{C}$ místo $f : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}$. Můžeme však každé lokálně integrovatelné funkci *jednoznačně přiřadit* zobecněnou funkci. Tento poznatek následně umožňuje ztotožnění klasických (lokálně integrovatelných) a zobecněných funkcí, tedy zahrnutí (vnoření) klasických funkcí do zobecněných.

Jelikož tuto souvislost nelze dostatečně zdůraznit, v detailu jí ukážeme. Stojí totiž za každou motivací zobecnění klasických pojmů do nově budované teorie zobecněných funkcí a nakonec i za hledáním řešení klasických diferenciálních rovnic pomocí teorie zobecněných funkcí.

Mějme tedy $f \in L^1_{loc}$. Této klasické funkci přiřadíme funkcionál $\tilde{f}$

$$\left(\tilde{f}, \varphi\right) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

kde pro zvýraznění souvislosti mezi vytvářecí funkcí a jejím zobecněným protejškem $\tilde{f}$ užijeme vlnku. Ze vzpomínané konvergence plyne, že $\tilde{f} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ je dobře definovaný funkcionál. Nyní ukážeme, že se vskutku jedná o zobecněnou funkci.

Linearita: Buďte $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak

$$\left(\tilde{f}, \varphi + \alpha\psi\right) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\varphi{+}\alpha\psi)(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x + \alpha\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(x) = \left(\tilde{f}, \varphi\right) + \alpha\left(\tilde{f}, \psi\right).$$

Spojitost: Chceme ukázat, že $\varphi_k \overset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \left(\tilde{f}, \varphi_k\right) \longrightarrow 0$ pro $k \to +\infty$. Z definice zavedeného přiřazení tedy chceme ukázat, že $\lim_{k\to+\infty}\left(\tilde{f}, \varphi\right) = \lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x = 0$. Pokud lze zaměnit limitu a integrál, pak platí $\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{k\to+\infty} f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\cdot 0\mathrm{d}x = 0$, jelikož opět $\varphi_k \to 0$ bodově. Abychom mohli záměnu provést, je třeba ověřit podmínky věty o záměně. Zde je důležité podotknout, že v tomto předmětu má záměna limity a integrálu nezřídka za následek špatný výsledek (nejen z testu či zkoušky). Je vskutku nutné ověřit předpoklady. Užijeme Lebesgueovu větu a nalezneme integrabilní majorantu nezávislou na k.

Nejprve užijeme první vlastnosti konvergentní posloupnosti v $\mathscr{D}$ ke zmenšení integračního oboru na onu jednu společnou omezenou množinu $\overline{B_R(0)}$, která je kompaktní. Ze stejnoměrné konvergence dále máme

$$\exists C\ \forall k : |\varphi_k(x)| \le C_k \le C.$$

Nakonec z lokální integrability plyne konečnost integrálu přes kompaktní množinu $\overline{B_R(0)}$, celkem jsme tedy našli integrabilní majorantu:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f\varphi_k| = \int_{\overline{B_R(0)}} |f\varphi_k| \leq C \int_{\overline{B_R(0)}} |f| < +\infty.$$

Definice 2.1.5. O zobecněné funkci $\tilde{f}$ řekneme, že je **regulární zobecněnou funkcí**, ozn. $\tilde{f} \in \mathscr{D}'_{reg}$, pokud existuje klasická funkce $f \in L^1_{loc}$ taková, že $(\tilde{f}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \; \forall \varphi \in \mathscr{D}$. Klasickou funkci f pak nazýváme **generátorem zobecněné funkce** $\tilde{f}$.

Nyní přistoupíme k zásadnímu kroku, totiž k jednoznačnosti přiřazení klasické funkce k regulární zobecněné funkci. Pro tyto účely vyslovíme větu, kterou nedokážeme v plné obecnosti, ale vše podstatné pro diskuzi a pochopení souvislostí bude užito i v dokazovaném jednodušším případě. Plné znění důkazu je pro zájemce k nalezení v [ŠťovíčekI].

Nejprve si však ukážeme dvě pomocná tvrzení.

Lemma 2.1.6 (spojitost skalárního součinu)**.** Buď $\mathcal{H}$ Hilbertův prostor a nechť $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ taková, že $x_k \to x \in \mathcal{H}$. Pak $\langle x_k, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ pro $k \to +\infty$ pro všechna $y \in \mathcal{H}$.

Důkaz. Nejprve přepíšeme výraz $\langle x_k, y\rangle = \langle x_k - x + x, y\rangle = \langle x_k - x, y\rangle + \langle x, y\rangle$. Využijeme konvergence posloupnosti, tzn. $x_k \to x \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \|x_k - x\| \to 0$ v $\mathbb{C}$. Pak na výraz $\langle x_k - x, y\rangle$ aplikujeme Schwarzovu nerovnost, tedy $|\langle x_k - x, y\rangle| \leq \|x_k - x\| \cdot \|y\|$. Jelikož je $y \in \mathcal{H}$ můžeme limitním přechodem pro $k \to +\infty$ získat požadovaný výsledek: $\langle x_k, y\rangle \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \langle x, y\rangle$. □

Lemma 2.1.7. Nechť $\langle a, b\rangle = 0$ pro všechna $b \in M$, kde $\overline{M} = \mathcal{H}$. Pak $a = 0$ v $\mathcal{H}$.

Důkaz. Důkaz provedeme pro dva případy:

1. Připomeňme si nejprve triviální případ, kdy $M = \mathcal{H}$. Pak $\langle a, h\rangle = 0$ pro libovolné $h \in \mathcal{H}$, a tedy i pro $h = a$. Pak ale $\langle a, a\rangle = 0$ a odtud z positivní definitnosti skalárního součinu plyne, že $a = 0$ v $\mathcal{H}$.

2. Nyní uvažme $M \subset \mathcal{H}$, $\overline{M} = \mathcal{H}$. Proto pro libovolné $h \in \mathcal{H}$ existuje $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ taková, že $b_k \to h \in \mathcal{H}$. Pak $\forall k \in \mathbb{N}$ máme pro libovolné $h \in \mathcal{H}$ ze spojitosti skalárního součinu:

$$0 = \langle a, b_k\rangle \longrightarrow \langle a, \lim b_k\rangle = \langle a, h\rangle.$$

□

Věta 2.1.8 (o jednoznačnosti)**.** Buďte $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathscr{D}'_{reg}(\mathbb{R}^n)$. Pak $\tilde{f} = \tilde{g} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ skoro všude na $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. Nejprve si uvědomíme, že tvrzení je ekvivalentní tomu ukázat, že $\tilde{f} = 0 \;\Leftrightarrow f(x) = 0$ skoro všude na $\mathbb{R}^n$. Dále důkaz pro jednoduchost a srozumitelnost provedeme jen pro kvadraticky integrovatelné funkce, tj. pro $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Jeden směr implikace je triviální. Naopak předpokládejme $\tilde{f} = 0$ v $\mathscr{D}' \Leftrightarrow (\tilde{f}, \varphi) = (0, \varphi) = 0$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{D}$. To ale znamená (dle definice akce) $\forall \varphi \in \mathscr{D} : \; 0 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \langle f, \varphi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Pokud tedy prostor testovacích funkcí je hustý v $L^2(\mathbb{R}^n)$, tak z druhého lemmatu plyne $f = 0$ v $L^2(\mathbb{R}^n)$, tedy $f(x) = 0$ skoro všude na $\mathbb{R}^n$. Pro naše účely se spokojíme s konstatováním (dokázaným v rámci kurzů funkcionální analýzy), že vskutku libovolnou funkci z Lebesgueových prostorů L^p lze libovolně přesně aproximovat posloupností testovacích funkcí (v L^p normě). □

Poznámka. Nyní již můžeme uzavřít diskuzi souvislosti klasických a zobecněných funkcí vč. souvislosti s testováním funkcí pomocí testovacích funkcí. Totiž:

1. Tato věta nám dává odpověď na otázku, jaká je souvislost mezi zobecněnými a klasickými funkcemi a umožňuje zahrnout klasické funkce do funkcí zobecněných. Dokonce lze ztotožnovat regulární zobecněné a klasické lokálně integrovatelné funkce (vynechat vlnku ve značení).

2. Pro ilustraci: je $x^n \in \mathscr{D}'$? Odpověď je ano, pokud doplníme vlnku, jelikož x^n je spojitá funkce, tedy $x^n \in L^1_{loc}$, a tedy $x^n \in \mathscr{D}'$.

3. Máme $\tilde{f} = \tilde{g}$ v $\mathscr{D}'$ definovanou jako $(f, \varphi) = (g, \varphi)\, \forall \varphi \in \mathscr{D}$. Nyní jsme k tomu navíc ukázali, že $\forall \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathscr{D}'_{reg}$ platí, že $(\tilde{f}, \varphi) = (\tilde{g}, \varphi) \Rightarrow \tilde{f} = \tilde{g}$ v $\mathscr{D}'$, ale i fakt, že $f = g$ v L^2. Tímto jsme zobecnili pojem „rekonstrukce funkce z testovací funkce".

4. Velikost množiny $\mathscr{D}$ je zásadní pro platnost předchozí věty (kvůli hustotě). Zkuste si vzít nějaký jiný Váš oblíbený prostor testovacích funkcí $\mathscr{D}$, např. množinu všech konstantních funkcí, a provést konstrukci znovu. Co budou prostory zobecněných funkcí, regulární zobecněné funkce, Diracova δ-funkce a bude platit předchozí věta, zahrnující klasické funkce do zobecněných?

   Poznamenejme závěrem, že lze snadno nahlédnout, že z jedné testovací funkce lze snadno vytvořit derivováním, násobením hladkou funkcí, škálováním argumentu apod. novou testovací funkci. Dopředu prozraďme, že operace konvoluce (zavedeme později) je další možností (tzv. mollifiers), viz cvičení. Doporučuji detailně promyslet.

2.1.3 Příklady

S některými zástupci zobecněných funkcí jsme se již setkali. Připomeneme si je a doplníme o další.

1. Již jsme dokázali, že $\delta_{x_0} \in \mathscr{D}'$.

2. Ukázali jsme, že $\mathscr{D}'_{reg} \subset \mathscr{D}'$. Tj. například $\widetilde{\sin x} \in \mathscr{D}'_{reg} \subset \mathscr{D}'$, kde $\left(\widetilde{\sin x}, \varphi\right) = \int_{\mathbb{R}} \sin x \varphi(x) \mathrm{d}x$ a $\widetilde{\sin x} : \mathscr{D} \to \mathcal{C}$ je lineární a spojitý funkcionál nad $\mathscr{D}$.

3. Diracova δ-funkce má více možných podob ve vyšších dimenzích, pokud na ni nahlížíme jako koncept singulárního zdroje. Ve vyšších dimenzích je množinou míry nula nejen libovolný bod, ale libovolná varieta dimenze menší, než je samotný prostor. Tedy kromě již zavedené Diracovy δ-funkce lze zavést tzv. jednoduchou (či prostou) vrstvu s vahou následujícím způsobem.

   Definice 2.1.9. Nechť S je po částech hladká nadplocha v $\mathbb{R}^n$ a $\nu(x)$ je funkce spojitá na S. Definujme
   $$(\nu\delta_S, \varphi) := \int_S \nu(x)\varphi(x) \mathrm{d}S \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}.$$
   Funkcionál $\nu\delta_S$ nazýváme **jednoduchou vrstvou**.

   Skutečně platí, že jednoduchá vrstva je zobecněnou funkcí, tj. $\nu\delta_S \in \mathscr{D}'$, a necháváme čtenáři k ověření (cvičení).

4. Viděli jsme, že propojení klasických a zobecněných funkcí se odehrává systematicky výhradně skrze generátory lokálně integrovatelných funkcí. Obecně jiným klasickým funkcím zobecněnou funkci nepřiřazujeme až na pár důležitých vyjímek. Takovouto vyjímkou je funkce $f(x) = \frac{1}{x}$. Nejedná se o lokálně integrabilní funkci a je tedy otázkou, jaký funkcionál dané klasické funkci přiřadit, aby měl podobné chování. Užívaný přístup v tomto případě je pomocí tzv. *regularizace* této funkce, která odstraní problém lokální neintegrovatelnosti způsobeným bodem 0.

   Zkusíme odstranit problematický bod v klasickém přiřazení funkcionálu následovně:
   $$\left(P\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x,$$

tedy tak, že odstraňujeme symetrické okolí problematického bodu a v limitě toto okolí uvažujeme libovolně malé. Tato limita se běžně označuje jako $V_p \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x$ a nazývá se *integrál ve smyslu hlavní hodnoty.* Na cvičeních bude ukázáno, že tímto krokem dojde k odstranění našeho problému, tj. $P\frac{1}{x} \in \mathscr{D}'$. Intuitivně tušíme, že souvislost mezi tímto funkcionálem a funkcí $1/x$ existuje, ale není jasné, jak blízká tato reprezentace je. Postupem času uvidíme, že bude platit obvyklé $x^n P\frac{1}{x} = x^{n-1}$ v $\mathscr{D}'$ pro $n \geq 1$ včetně vztahu pro derivaci.

Nutno též podotknout, že tato zmíněná regularizace není jedinou možností, jak doplnit nějakou blízkou reprezentaci funkce $1/x$ do zobecněných funkcí. Setkáme se zanedlouho ještě se Sochockého distribucí $\frac{1}{x \pm i0}$, jejíž definici však prozatím odsuneme do doby, kdy budeme schopni prozkoumat a porozumět blízkosti těchto dvou regularizací.

Nakonec poznamenejme, že ne každá zobecněná funkce má generátor v klasických funkcích. Takovýmto funkcím říkáme **singulární zobecněné funkce**. Příkladem takovýchto singulárních zobecněných funkcí je Diracova δ-funkce či obě zmiňované regularizace funkce $1/x$. Ukážeme si to na příkladě první jmenované.

Věta 2.1.10. Diracova δ-funkce je singulární zobecněnou funkcí, tj. $\delta \in \mathscr{D}' \backslash \mathscr{D}'_{reg}$.

Důkaz. (pro jednoduchost a ilustrativitu tohoto tvrzení předpokládejme $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^1)$)
Sporem: Nechť $\exists f \in L^1_{loc}$ taková, že $\left(\tilde{f}, \varphi\right) = (\delta, \varphi)$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{D}$. Zároveň z definice Diracovy funkce máme $\varphi(0) = (\delta, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{D}$. Buď nyní $\eta(x) = x^2 \in \mathcal{C}^\infty$. Pak víme, že $\eta\varphi \in \mathscr{D}$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{D}$. Zároveň víme, že $(\eta\varphi)(0) = 0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\eta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{D}$. Odtud z hustoty plyne, že $(f\eta)(x) = 0$ skoro všude, a tudíž $f = 0$ skoro všude, což je spor. □

2.2 Zavedení základních operací v $\mathscr{D}'$

Nyní již máme zavedeny zobecněné funkce a známe jejich vztah ke klasickým funkcím. Vzhledem ke smyslu a cílům našeho úsilí je třeba doplnit i operace na zobecněných funkcích. Dosavadní poznatky jsou shrnuty v obrázku 2.1, kde je i naznačeno, že zaváděné operace v zobecněných funkcích budou variantou ke klasickým operacím, které analýza užívá. Pokud bychom tedy nezaváděli nové operace s požadavkem shody s klasickými operacemi, kde to lze, tak bychom museli důsledně odlišovat mezi operacemi klasickými a zobecněnými, zatímco už víme, že klasické a zobecněné funkce odlišovat nemusíme.

My však budeme postupovat naopak: budeme požadovat, aby zobecněné operace byly rozšířením klasických a tedy opět budeme klást důraz na motivaci. Při označení operace pomocí operátoru T budeme přirozeně požadovat, aby $T(\tilde{f}) = \widetilde{T(f)}$.

2.2.1 Derivace v $\mathscr{D}'$

Hledáme tedy rozšíření klasické derivace do zobecněných funkcí a to takové, aby $\widetilde{f'} = \tilde{f}'$. To jest, abychom obdrželi stejnou zobecněnou funkci, jestliže funkci f nejprve zderivujeme jako klasickou funkci a pak nalezneme zobecněný protějšek či nejdříve z klasické funkce f vytvoříme funkci zobecněnou $\tilde{f}$ a tu zderivujeme v $\mathscr{D}'$.

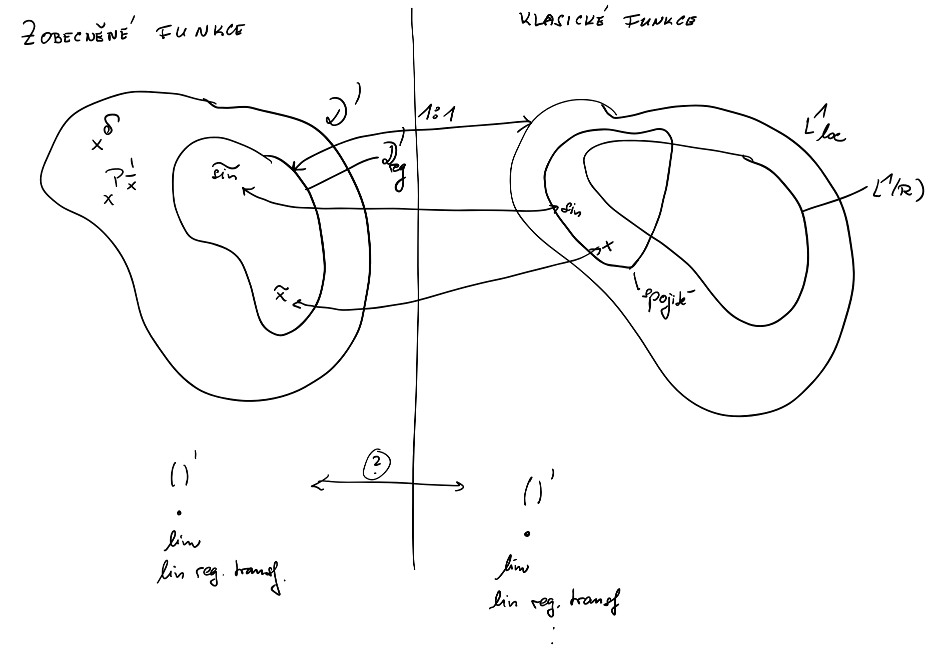
Pro účely definice užijeme této motivace k nalezení vhodného definičního vztahu pro derivaci:

$$\left((\tilde{f})', \varphi\right) = \left(\widetilde{f'}, \varphi\right) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \overset{\text{pe. pa.}}{=} [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)'\mathrm{d}x = -\left(\tilde{f}, \varphi'\right).$$

Tedy následující definice zavádí pojem derivace, který je kompatibilní s derivací klasickou.

Definice 2.2.1. Buď $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Pak derivaci f' v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ definujeme předpisem

$$(f', \varphi) := -(f, \varphi') \text{ pro libovolné } \varphi \in \mathscr{D}.$$



Obrázek 2.1: Shrnutí dosavadních poznatků o zobecněných funkcích a jejich souvislostí s klasickými funkcemi.

Ověřme, že takto definovaná derivace zobecněné funkci f přiřadí opět zobecněnou funkci f'. To znamená, že je třeba ověřit následující tři podmínky:

Funkcionál: Triviální z faktů $\varphi' \in \mathscr{D}$ a $f \in \mathscr{D}'$.

Linearita: Buďte $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak

$$(f', \varphi + \alpha\psi) = -\big(f, (\varphi + \alpha\psi)'\big) = -(f, \varphi') - \alpha\,(f, \psi') = (f', \varphi) + \alpha\,(f', \psi)$$

Při dokazování jsme využili, že f je zobecněná.

Spojitost: Nechť $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$. Chceme ukázat, že $(f', \varphi_k) \to (f', 0) = 0$ v $\mathbb{C}$. Upravujme

$$\lim_{k\to+\infty} (f', \varphi_k) = -\lim_{k\to+\infty} (f, \varphi_k')\,.$$

Pokud nyní můžeme vtáhnout limitu do argumentu zobecněné funkce, tak je důkaz hotov, jelikož konvergence v $\mathscr{D}$ vyžaduje bodovou konvergenci derivací v každém bodě. K vtažení limity využijeme spojitosti zobecněné funkce f, která převádí konvergentní posloupnost na konvergentní posloupnost. Proto musíme ověřit, že platí implikace $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0 \Rightarrow \varphi_k' \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$. Tato implikace je však platná, jak se lze přesvědčit: posloupnost funkcí φ_k' mají stejnoměrně omezené nosiče (jelikož $\operatorname{supp}\varphi_k' \subset \operatorname{supp}\varphi_k$ pro libovolné k). Podmínka na stejnoměrnou konvergenci všech derivací je splněna triviálně díky konvergenci φ_k v $\mathscr{D}$.

Tedy jsme našli zobrazení na prostoru $\mathscr{D}'(R)$, které libovolné funkci $f \in \mathscr{D}'(R)$ přiřadí $f \longmapsto f' \in \mathscr{D}'(R)$ a zároveň je shodné s působením klasické derivace na klasické funkce. Pozorování, že takto vyrobíme ze zobecněné funkce vždy novou zobecněnou funkci má důležité důsledky:

Věta 2.2.2. Každá zobecněná funkce f má všechny derivace.

Poznámka. Derivaci jsme zavedli pouze pro $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Pokud bychom chtěli provést rozšíření, stačí si uvědomit, že za každý další řád derivace přibude pouze další znaménko „$-$“. Proto můžeme definovat derivaci pro libovolnou $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ následovně a jsou si vzájemně kompatibilní (definice derivace pro různé řády)

$$(D^\alpha f, \varphi) := (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi)$$

.

Příklad Nalezněme derivaci absolutní hodnoty, tj. $|x|'$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Zde jsme jistě mimo platnost motivace, totiž nemůže platit $\widetilde{f'} = \tilde{f}'$ (která strana zde nemá smysl?). Využijeme tedy ono rozšíření derivace do zobecněných funkcí a zkusíme porovnat s klasickou derivací.

Hledáme zobecněnou funkci f, jejíž akce na libovolnou testovací funkci by byla stejná, tj. $(|x|', \varphi) = (f, \varphi)$ pro všechny $\varphi \in \mathscr{D}$. Nyní upravujme:

$$\left(\widetilde{|x|}', \varphi(x)\right) = -\left(\widetilde{|x|}, \varphi'(x)\right) = -\int_{\mathbb{R}} |x|\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{0} \underbrace{|x|}_{-x} \varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{+\infty} \underbrace{|x|}_{x} \varphi'(x)\mathrm{d}x \overset{\text{pe. pa.}}{=}$$

$$= \underbrace{[x\varphi(x)]_{-\infty}^{0}}_{=0} - \int_{-\infty}^{0} 1 \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x - \underbrace{[x\varphi(x)]_{0}^{+\infty}}_{=0} + \int_{0}^{+\infty} 1 \cdot \varphi \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \left(\widetilde{\operatorname{sgn}(x)}, \varphi(x)\right).$$

Tedy jsme vypočetli, že $\widetilde{|x|}' = \widetilde{\operatorname{sgn}(x)}$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, odkud je patrná i blízkost klasické derivaci. Vřele doporučuji čtenáři si ukázat, že způsob výpočtu je velice návodný a nelze se (při správném výpočtu) od něj prakticky nikde odchýlit.

2.2.2 Regulární lineární transformace

Postupujeme opět analogicky z motivace pro nalezení rozšíření regulární transformace do zobecněných funkcí. Mějme regulární matici $\mathbf{A}$ a vektor b, pak

$$\begin{aligned}\left(\tilde{f}(\mathbf{A}x + b), \varphi(x)\right) = \left(\widetilde{f(\mathbf{A}x + b)}, \varphi(x)\right) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{A}x + b)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi\left(\mathbf{A}^{-1}(y - b)\right) \frac{1}{|\det \mathbf{A}|}\mathrm{d}y = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|}\left(\tilde{f}, \psi\right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

kde $\psi(x) = \varphi(\mathbf{A}^{-1}(x - b))$ je testovací funkcí.

Rozšíření na obecnou zobecněnou funkci je pak následující.

Definice 2.2.3. Buď $f \in \mathscr{D}'$, dále $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulární matice a $b \in \mathbb{R}^n$ vektor. Pak definujeme **regulární lineární transformaci** $g^f_{\mathbf{A},b}$ zobecněné funkce f vztahem:

$$\left(g^f_{\mathbf{A},b}, \varphi\right) := \frac{1}{|\det \mathbf{A}|}\left(f, \psi^\varphi_{\mathbf{A},b}\right).$$

Přičemž $\psi^\varphi_{\mathbf{A},b}(x) := \varphi\left(\mathbf{A}^{-1}(x - b)\right)$ pro všechny $\varphi \in \mathscr{D}$.

Poznámka. Tato definice je korektní, neboť $\psi^\varphi_{\mathbf{A},b}(x) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \varphi \in \mathscr{D}$ a tedy levá strana v definičním vztahu je dobře definovaná pro každou testovací funkci.

Poznámka. Takovéto označení je sice srozumitelné, ale poněkud kostrbaté. Obvykle se užívá jiné označení pro onu nově vyrobenou zobecněnou funkci z trojice $(f, \mathbf{A}, b)$, které je však drobné zneužití notace a může být zpočátku poněkud matoucí:

$$(f(\mathbf{A}x + \mathrm{b}), \varphi(x)) := \frac{1}{|\det \mathbf{A}|}\left(f(x), \varphi\left(\mathbf{A}^{-1}(x - b)\right)\right).$$

Tato notace je rozumná, je jen jiným vyjádřením skutečnosti, že nová zobecněná funkce vzniká z oné trojice. Zdůrazněme však, že zobecněná funkce $f \in \mathscr{D}'$ nepůsobí na reálná čísla x (nejde o označení argumentu), ale naopak na (celou) testovací funkci. Jedná se však o rozumnou notaci, jelikož zřetelně připomíná, co reprezentuje nová zobecněná funkce a jak vzniká z oné vytvořující trojice $(f, \mathbf{A}, b)$.

Opět též zjistíme, že se jedná zobrazení vždy vytvářející zobecněnou funkci ze zobecněné funkce.

Věta 2.2.4. Buď $f \in \mathscr{D}'$. Pak $f(\mathbf{A}x + \mathrm{b}) \in \mathscr{D}'$.

Důkaz. Opět stačí ověřit tři podmínky.

Funkcionál: zřejmé;

Linearita: plyne z linearity f;

Spojitost: Potřebujeme ukázat, že $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0 \Rightarrow (f(\mathbf{A}x + b), \varphi_k(x)) \to 0$. Tedy

$$\lim_{k\to+\infty} (f(\mathbf{A}x + b), \varphi_k(x)) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} \left(f(x), \varphi_k\left(\mathbf{A}^{-1}(x-b)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{|\det \mathbf{A}|}\left(f(x), \underbrace{\lim_{k\to+\infty} \varphi_k\left(\mathbf{A}^{-1}(x-b)\right)}_{=0}\right) = 0. \quad (2.2)$$

Jedná se o zcela analogický postup jako v případě derivace a opět není varianty v postupu. Jediný krok stojící za povšimnutí je, že pokud $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$, tak i $\psi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$, kde $\psi_k = \varphi_k\left(\mathbf{A}^{-1}(x-b)\right)$. To je však triviální důsledek stejnoměrné konvergence. Zbytek je analogický důkazu pro derivaci.

□

Tímto jsme získali možnost vytváření nových zobecněných funkcí z jisté výchozí, které mají blízko významem k posunování a transformace argumentu klasických funkcí.

Poznámka. Tato definice nás opravňuje užívat i následující označení pro akci testovací funkce na zobecněnou: $(f, \varphi) = (f(x), \varphi(x))$, kde nový objekt na levé straně je speciálním případem regulární lineární transformace s volbou $b = 0, \mathbf{A} = \mathbf{I}$ a explicitně napsaného vztahu mezi funkcí ψ a φ v bodovém zápisu. Toto označení „proměnné“ uvažované testovací funkce zde nemá žádný význam (vzpomeňme, že zobecněná funkce působí na celou testovací funkci), ale nabyde na významu později u definice složitějších operací (tenzorový součin a konvoluce).

Příklad Kdybychom zavedli pojem sudosti a lichosti analogicky ke klasickým funkcím, tak lze ukázat, že Diracova δ-funkce je sudá, tj. platí, že $\delta(-x) = \delta(x)$ v $\mathscr{D}'$.

Vyjdeme z rovnosti v $\mathscr{D}'$, tj. ověřujeme, zda platí, že $(\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(-x), \varphi(x))$. Můžeme začít od pravé strany, kde sice působí funkcionál, který ještě neznáme explicitně, ale víme, jak je vyroben ze standardní Diracovi δ-funkce. Anebo, pokud nevidíme, jak danou rovnost ukázat, tak se pokusíme přibližovat obě strany rovnosti postupně k sobě. Upravujeme nejprve levou stranu výrazu:

$$(\delta(x), \varphi(x)) \overset{\mathbf{A}=\mathbb{I},\mathrm{b}=0}{=} (\delta, \varphi) = \varphi(0)$$

Nyní upravíme pravou stranu a využijeme toho, že tentokrát je $\mathbf{A} = -\mathbb{I}$ a $\mathrm{b} = 0$.

$$(\delta(-x), \varphi(x)) = (\delta(x), \underbrace{\varphi(-x)}_{\psi(x)}) = (\delta, \psi) = \psi(0) = \varphi(0).$$

2.2.3 Násobení hladkou funkcí v $\mathscr{D}'$

Chtěli bychom vytvořit operaci násobení hladkou funkcí, která by opět splňovala onu obecnou motivaci pro rozšiřování operací do zobecněných funkcí, tj. splňovala následující: $\tilde{f} \cdot \tilde{g} = \widetilde{f \cdot g}$. Z této podmínky dostáváme:

$$\left(\tilde{f} \cdot \tilde{g}, \varphi\right) = \left(\widetilde{f \cdot g}, \varphi\right) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x)\underbrace{f(x)\varphi(x)}_{\in\mathscr{D}}\mathrm{d}x = (\tilde{g}, f\varphi)\,.$$

Vidíme však, že z požadavku, aby definice byla rozumná (vracela konečné číslo pro každou testovací funkci), tak je nutné se značně omezit a sice pouze na násobení zobecněné funkce regulární zobecněnou funkcí, která má hladký generátor.

Definice 2.2.5. Buď $a \in \mathcal{C}^\infty$ a $\tilde{a} \in \mathscr{D}'_{reg}$ a nechť $f \in \mathscr{D}'$. Pak definujeme $(\tilde{a} \cdot f, \varphi) := (f, a\varphi)$ pro všechna $\varphi \in \mathscr{D}$.

Nelze snadno zeslabit předpoklad na $a \in \mathcal{C}^\infty$ a z tohoto důvodu není možné například vynásobit dvě Diracovy funkce. Jelikož se ale jedná o fyzikálně důležitý problém, tak byl předmětem (nedávného) výzkumu. Vyžaduje však ještě abstraktnější přístup tzv. Colombeau zobecněné funkce.

Věta 2.2.6. Buď $\tilde{a} \in \mathscr{D}'_{reg}$ a $a \in \mathcal{C}^\infty$ a nechť $f \in \mathscr{D}'$. Pak $\tilde{a} \cdot f \in \mathscr{D}'$.

Důkaz. Jedná se o triviální variantu na dva předchozí, a tedy necháváme čtenáři. □

2.3 Vlastnosti základních operací v $\mathscr{D}'$

Nyní jsme už v pozici, kdy můžeme ukázat slíbené jednoduché vztahy pro záměny operací v $\mathscr{D}'$. Jistě čtenář velmi ocení jednoduchost a srozumitelnost tvrzení po kurzech standardní analýzy. Podotýkáme, že ústřední pojem limity v zobecněných funkcích byl již zaveden (a to ve slabém smyslu). Je vhodné si uvědomit, že tato definice nerespektovala motivaci ve smyslu rozšiřování klasických operací. K této problematice se ještě později vrátíme.

Zkusme vypočítat limitu $\lim_{k\to+\infty} \cos kx$ v $\mathscr{D}'$. V klasickém smyslu limita neexistuje, ale v zobecněném má smysl se touto otázkou zabývat, jelikož $\cos kx \in L^1_{loc}$. Pokud se pokusíme tuto limitu počítat z definice, narazíme na integrál, který nebudeme schopni spočítat (doporučuji vyzkoušet; proč nelze vypočíst?). Kdybychom však mohli zaměnit limitu a derivaci, tak problém odstraníme (což je vidět, pokud jste si vyjasnili, kde je problém). Totiž vypočtěme nejprve limitu v $\mathscr{D}'$: $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \sin kx$. Zde je výpočet jasný:

$$\left(\lim_{k\to+\infty} \widetilde{\frac{1}{k}\sin kx}, \varphi(x)\right) = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{k}\sin kx, \varphi(x)\right) = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k} \sin kx\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} 0\mathrm{d}x = 0.$$

Tedy ukázali jsme, že $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sin kx = 0$. Nyní však ze záměny limity a derivace by plynulo, že

$$0 = \left(\lim_{k\to+\infty} \widetilde{\frac{1}{k}\sin kx}\right)' = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{k}\sin kx\right)' = \lim_{k\to+\infty} \cos kx.$$

Tedy, jak lze nyní snadno nahlédnout, pokud platí záměna derivace a limity v $\mathscr{D}'$ bez omezení, tak

$$\lim_{k\to+\infty} k^m \sin(kx) = \lim_{k\to+\infty} k^m \cos(kx) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ukažme si tedy, že vskutku záměna v zobecněných funkcích platí bez omezení.

Věta 2.3.1 (o záměně limity a derivace)**.** Buď $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'$, $f'_k \to f$ v $\mathscr{D}'$. Pak $(\lim_{k\to+\infty} f_k)' = \lim_{k\to+\infty}(f_k)'$ v $\mathscr{D}'$.

Důkaz. Zvolme libovolnou $\varphi \in \mathscr{D}$. Pak

$$\left((\lim_{k\to+\infty} f_k)', \varphi\right) = -\left(\lim_{k\to+\infty} f_k, \varphi'\right) = -\lim_{k\to+\infty} (f_k, \varphi') = \lim_{k\to+\infty} (f'_k, \varphi) = \left(\lim_{k\to+\infty} f'_k, \varphi\right),$$

kde jsme užili po řadě definici derivace, limity, derivace a limity. □

Věta 2.3.2. Buďte $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{g_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'$ a nechť jsou $f, g \in \mathscr{D}'$ takové, že $f_k \to f$ a $g_k \to g$. Pak

1. $f_k + g_k \to f + g$ v $\mathscr{D}'$;

2. $\tilde{a} \cdot f_k \to \tilde{a} \cdot f$ pro libovolnou $a \in \mathscr{D}'_{reg}, a \in \mathcal{C}^\infty$;

3. $f'_k \to f'$;

4. $f_k(\mathbf{A}x + \mathrm{b}) \to f(\mathbf{A}x + \mathrm{b})$.

Důkaz. Důkaz je ponechán čtenáři pro ryzí potěchu. □

2.3.1 Identity kalkulu

Nyní zformulujeme další (a opět snazší) analogické vlastnosti, které známe z klasické analýzy.

Věta 2.3.3 (o derivaci složené funkce)**.** Buďte $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ a $0 \neq A, b$ konstanty. Pak

$$[f(Ax+b)]' = A \cdot f'(Ax+b)$$

Důkaz. Upravujme levou stranu výrazu opět přímočaře dle pořadí operací:

$$\left([f(Ax+b)]', \varphi\right) = -\left(f(Ax+b), \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right) = -\frac{1}{|A|}\left(f(y), \left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=A^{-1}(y-b)}\right) = (*).$$

Jelikož tvrzení, které dokazujeme, je vlastně pozorování o záměně pořadí operace lineární regulární transformace a derivace, tak nás nepřekvapí, že je nutné nyní provést totéž s testovací funkcí. Pro ně platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(A^{-1}(y-b)) = \left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=A^{-1}(y-b)} \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(A^{-1}(y-b))}_{\frac{1}{A}}$$

a nyní již lze úpravy dokončit:

$$(*) = -\frac{A}{|A|}\left(f(y), \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}\left(A^{-1}(y-b)\right)\right) \overset{\text{derivace}}{=} \frac{A}{|A|}\left(f'(y), \varphi\left(A^{-1}(y-b)\right)\right) = A \cdot \left(f'(Ax+b), \varphi(x)\right).$$

□

Poznámka. Pro jednoduchost jsme uvažovali regulární transformaci v jedné dimenzi. Prostou obměnou si však čtenář domyslí rozšíření do $\mathbb{R}^n$.

Věta 2.3.4 (Leibnizovo pravidlo)**.** Buďte $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, $\tilde{a} \in \mathscr{D}'_{reg}(\mathbb{R})$ s generátorem $a \in \mathcal{C}^\infty$. Pak

$$(\tilde{a} \cdot f)' = \widetilde{a'} \cdot f + \tilde{a} \cdot f' \quad \text{v } \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

Důkaz. Je jednodušší upravovat výraz $\tilde{a}f'$ v $\mathscr{D}'$:

$$\begin{aligned}(\tilde{a}f', \varphi) = (f', a\varphi) = -(f, (a\varphi)') = -(f, a'\varphi + a\varphi') = -(f, a'\varphi) - (f, a\varphi') = \\ = -(\widetilde{a'}f, \varphi) - (\tilde{a}f, \varphi') = -(\widetilde{a'}f, \varphi) + ((\tilde{a}f)', \varphi) = (((\tilde{a}f)' - \widetilde{a'}f), \varphi).\end{aligned}$$

Z rovnosti v $\mathscr{D}'$ dostáváme požadované pravidlo o derivování součinu. □

Poznámka. Pokud bychom postupovali dále matematickou indukcí, rozšířili bychom tvrzení i pro n-tou derivaci analogicky k Leibnizovu pravidlu pro klasické funkce. Poznamenejme však, že toto pravidlo o derivaci součinu se často nesprávně užívá i v situaci, kdy ani o jedné zobecněné funkci nevíme, zda má hladký generátor. Doporučuji vždy důkladně promyslet, jestli součin zobecněných funkcí je rozumný před užitím tohoto pravidla.

Věta 2.3.5 (o záměně parciálních derivací)**.** Buď $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Pak lze vždy zaměňovat smíšené parciální derivace, tj.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} f = \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} f.$$

Důkaz.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} f(x), \varphi(x)\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_l} f(x), \frac{\partial}{\partial x_k}\varphi(x)\right) = \left(f(x), \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k}\varphi(x)\right) \overset{\varphi \in \mathcal{C}^\infty}{=}$$

$$= \left(f(x), \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\varphi(x)\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_k} f(x), \frac{\partial}{\partial x_l}\varphi(x)\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} f(x), \varphi(x)\right).$$

□

Poznámka. Jelikož značení při smíšených parciálních derivacích není jednotné, v tomto textu máme na mysli následující (operátorový) význam:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} f(x) := \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_l}\right).$$

Věta 2.3.6 (o derivaci po částech spojité funkce)**.** Buď $M \subset \mathbb{R}$, $M = \{x_k\}$ nejvýše spočetná množina bez hromadného bodu. Buď dále $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\backslash M)$ a nechť $\forall x \in M$ existují konečné jednostranné limity klasické funkce f. Nechť dále je $\{f'\} \in L^1_{loc}$, kde $\{f'\}$ označuje klasickou derivaci funkce f všude, kde je ji možné provést. Pak v $\mathscr{D}'$ platí

$$\tilde{f}' = \widetilde{\{f'\}} + \sum_{s \in M} [f]_s \, \delta(x - s),$$

kde symbol $[f]_s := \lim\limits_{x \to s^+} f(x) - \lim\limits_{x \to s^-} f(x)$ označuje velikost skoku v místě potenciální nespojitosti.

Důkaz. Uvažujme pro jednoduchost množinu $M = \{x_0\}$ jednoprvkovou (rozšíření je přímočaré). Zopakováním a zobecněním postřehů z výpočtu derivace absolutní hodnoty prováděného dříve máme:

$$(\tilde{f}', \varphi) = -(\tilde{f}, \varphi') = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x \overset{\text{pe pa}}{=}$$

$$= -\left(\underbrace{[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{x_0}}_{\lim_{x \to x_0^-} f(x)\varphi(x)} - \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right) - \left(\underbrace{[f(x)\varphi(x)]_{x_0}^{+\infty}}_{-\lim_{x \to x_0^+} f(x)\varphi(x)} - \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \{f'\}\varphi(x)\mathrm{d}x + \underbrace{\lim_{x \to x_0^+} f(x)\varphi(x)}_{\varphi(x_0)\lim_{x \to x_0^+} f(x)} - \underbrace{\lim_{x \to x_0^-} f(x)\varphi(x)}_{\varphi(x_0)\lim_{x \to x_0^-} f(x)} = \int_{\mathbb{R}} \{f'\}\varphi(x)\mathrm{d}x + \varphi(x_0)\left[\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)\right] =$$

$$= (\widetilde{\{f'\}}, \varphi) + \left(\underbrace{\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)}_{[f]_{x_0}}\right)(\delta_{x_0}, \varphi) = \left(\widetilde{\{f'\}} + [f]_{x_0} \delta(x - x_0), \varphi\right).$$

Rozdělení integrálu na dvě množiny je nutné kvůli správnému užití per-partes. Následně jsme využili znalosti, že testovací funkce je spojitá a z předpokladu existence jednostranných limit jsme mohli provést parciální limity. Z důkazu je i patrný význam oné funkce $\{f'\}$, kde jen poznamenáváme, že v L^p prostorech na množině míry nula nezáleží, tedy jedná se o klasickou derivaci funkce v L^p prostoru. Nakonec jsme v poslední úpravě použili tvrzení $\delta_{x_0} = \delta(x - x_0)$, které snadno plyne z definice regulární transformace (a je předmětem cvičení). □

Poznámka. Toto tvrzení má široké uplatnění a vřele doporučuji ho užívat namísto derivování součinu.

Zkusme nyní toto tvrzení aplikovat a vypočíst derivaci Heavisideovy funkce $\Theta(x)$. Uvidíme jeho úspornost. Je zřejmé, že $\{\Theta'(x)\} = 0$. Jediným problematickým bodem je počátek, kde má funkce jednotkový skok. Proto $[\Theta]_0 = 1$. Pak již máme $\Theta'(x) = 0 + 1 \cdot \delta(x-0) = \delta(x)$ v $\mathscr{D}'$.

Dříve jsme ukázali, že $|x|' = \operatorname{sgn} x$. Nyní zkusme vypočítat $|x|'''$:

$$|x|''' = (|x|')'' = (\operatorname{sgn} x)'' = (\operatorname{sgn}' x)' = (0 + 2\delta(x-0))' = 2\delta'(x).$$

Tedy k výpočtu těchto zobecněných variant derivací postačí grafická představa.

Věta 2.3.7 (konvergence k Diracově δ-funkci)**.** Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$ a nechť splňuje normalizační podmínku $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Pak pro $f_k(x) = kf(kx)$ platí:

$$\widetilde{f_k}(x) \to \delta(x) \text{ v } \mathscr{D}' \text{ pro } k \to +\infty$$

Poznámka. Jedná se o důležitou limitu z hlediska významu reprezentace Diracovy δ-funkce. Vzpomeňme si na úvodní přednášku, kde jsme vzpomínali žádané vlastnosti Diracovy funkce, avšak nebylo je možno splnit klasickou funkcí. Jedna z představ byla, aby funkce byla nulová až na jeden bod, kde by dosahovala nekonečné (ale nějak normalizované) hodnoty. Zde vidíme, že zavedená Diracova δ-funkce v $\mathscr{D}'$ tuto představu docela dobře splňuje právě díky limitě.

Buď například

$$f(y) = \psi_{[-1,1]}(y) := \begin{cases} 1 & \text{pro } y \in [-1,1] \\ 0 & \text{pro } y \notin [-1,1] \end{cases},$$

tj. charakteristická funkce intervalu $[-1,1]$. Pak vidíme, že aby $y = kx \in [-1,1]$, tak musí $x \in [-1/k, 1/k]$. Tedy nosič k-té funkce z posloupnosti je $[-1/k, 1/k]$ a hodnota této funkce na supportu je k. V intuitivním smyslu, se v limitě $k \to +\infty$ nosič mění na jednobodovou množinu a hodnota jde skutečně do nekonečna a integrál přes tuto funkci je pro libovolné k roven 2. Jak je vidět z tvrzení, takovýchto posloupností lze sestrojit libovolně mnoho (např. Gaussovo normální rozdělení, kdy rozptyl jde k nule).

Nakonec pomocí znalosti o záměně limity a derivace lze snadno sestrojovat podobné příklady pro posloupnost konvergující k δ' v $\mathscr{D}'$. Je třeba nutné, aby konvergující posloupnost byla lichá?

Důkaz. Důkaz je prostým výpočtem, který je díky obecnosti dokonce názornější než v případě výpočtu s konkrétnější funkcí. Upravujme tedy

$$\left(\lim_{k\to+\infty} \widetilde{f_k}(x), \varphi(x)\right) = \lim_{k\to+\infty} (f_k(x), \varphi(x)) = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} kf(kx)\varphi(x)\mathrm{d}x = (*)$$

Zde je na místě poznamenat, že je samozřejmě nutné nakonec provést záměnu limity a integrálu. Je však opravdu třeba ověřovat předpoklady, jelikož v tomto typu výpočtů se obzvlášť často stává, že obdržíme nesprávný výsledek při záměně v nesprávném místě. Doporučuji zkusit si zde zdůvodnit záměnu (nelze) a provést výpočet po nesprávné záměně např. v případě f normálního rozdělení. Je třeba upravovat dále kvůli možnosti záměny limity a integrálu:

$$(*) = \left\{ \begin{array}{c} \text{transformace} \\ kx = y \end{array} \right\} = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi\left(\frac{y}{k}\right)\mathrm{d}y.$$

Zde je již možno provést záměnu, jelikož φ je omezená konstantou K díky hladkosti a omezenému supportu a $f \in L^1(R)$ dle předpokladu na celém R (to je důležité, jelikož lokální integrabilita by nestačila, protože $\lim_{k\to+\infty} \varphi\left(\frac{y}{k}\right)$ nemá omezený nosič). Pak již můžeme psát

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) \lim_{k\to+\infty} \varphi\left(\frac{y}{k}\right)\mathrm{d}y = \varphi(0) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{d}y}_{=1} = (\delta, \varphi)\,.$$

$\square$

Poznámka. Pokud pro funkci f neplatí ona normalizační podmínka, tak $\lim_{k\to+\infty} \widetilde{f}_k(x) = c\delta(x)$ v $\mathscr{D}'$, kde $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = c$, jak lze snadno nahlédnout.

Věta 2.3.8 (vztah derivace a limity)**.** Buď $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Pak platí

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

Důkaz. Opět dokazujeme rovnost v $\mathscr{D}'$, tedy

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \varphi(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \varphi(x)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(nf\left(x+\frac{1}{n}\right), \varphi(x)\right) - (nf(x), \varphi(x))\right] \overset{\mathbf{A}=\mathbb{I}, \mathrm{b}=\frac{1}{n}}{=} \lim_{n\to+\infty} n\left[\left(f(x), \varphi\left(x-\frac{1}{n}\right)\right) - (f(x), \varphi(x))\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(f(x), \frac{\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}}\right).$$

Nyní chceme vtáhnout limitu do argumentu zobecněné funkce (do závorek). Ze spojitosti funkce $f \in \mathscr{D}'$ víme, že zachovává konvergenci. Proto stačí ověřit, že $\psi_n(x) := \frac{\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\mathscr{D}}$. Jako kandidáta na limitní funkci zvolme samozřejmě bodovou limitu $-\varphi'(x)$. Pro konvergenci v $\mathscr{D}$ musí být splněno:

1. $\operatorname{supp}\psi_n$ jsou stejně omezené. Toto plyne z faktu, že $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,R)$ a díky předpisu $\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right)$ rovněž víme, že se support φ se změní nejvýše o jedna. Pak tedy $\operatorname{supp}\psi_n \subset B(0,R+1)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

2. Zbývá dokázat stejnoměrnou konvergenci pro všechny derivace. Začněme s nultou derivací, kdy je třeba ukázat, že $\psi_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} -\varphi'(x)$. K tomuto využijeme supremové kritérium, kdy platí $\psi_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} -\varphi'(x) \Leftrightarrow \sigma_n := \sup_{\mathbb{R}}|\psi_n(x) + \varphi'(x)| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Supremum odhadneme pomocí Taylorova rozvoje členu $\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right)$ do řádu 2. derivace:

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|\frac{\varphi\left(x-\frac{1}{n}\right) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}} + \varphi'(x)\right| = \sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi''(\xi)\frac{1}{n}\right| \to 0.$$

   Závěrečný přechod je množné psát, neboť je funkce φ hladká a je tedy na svém supportu omezená, tj. i v neurčeném bodě ξ.

Pro vyšší derivace lze postupovat identicky, jelikož jsme využívali jen obecných vlastností testovacích funkcí. □

2.4 Nosič zobecněné funkce a další poznatky o $\mathscr{D}'$

Doplňme si nyní pojem nosiče zobecněné funkce a nakonec doplníme pár poznatků o limitě v $\mathscr{D}'$.

2.4.1 Nosič zobecněné funkce

Definice 2.4.1. Buď $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $G = G^o \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f **je nulová na** G , píšeme $f = 0$ na G, právě když $(f, \varphi) = 0$ pro všechny $\varphi \in \mathscr{D}(G)$.

Poznámka. Lze ukázat, že pro každou zobecněnou funkci f existuje největší otevřená množina G s touto vlastností. Tuhle množinu nazvěme $\mathcal{N}(f)$. Důkaz tohoto tvrzení najde čtenář ve [Štovíček].

Definice 2.4.2. Množinu $\operatorname{supp} f := \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{N}(f)$ nazveme **nosičem zobecněné funkce** f.

Poznámka. Je zřejmé, že $\operatorname{supp} f$ je uzavřená množina. Rovněž je třeba zdůraznit, že pro zobecněnou funkci f neplatí, že $\operatorname{supp} f \subset \operatorname{Dom}(f)$, neboť definičním oborem zobecněné funkce jsou testovací funkce a nosičem je číselná množina. Jak však ukážeme v následujícím tvrzení, je takto definovaný zobecněný nosič blízký klasickému. Dále pak uvidíme další souvislost mezi intuicí ohledně nosiče Diracovy δ-funkce a touto definicí.

Věta 2.4.3. Buď $\tilde{f} \in \mathscr{D}'_{reg}$ a buď f po částech spojitá funkce jedné proměnné s tím, že je spojitá zprava či zleva v každém bodě nespojitosti. Pak $\operatorname{supp} \tilde{f} = \operatorname{supp} f$.

Poznámka. Funkce je po částech spojitá, pokud má konečně mnoho nespojitostí prvního druhu (tj. existují obě jednostranné limity a jsou konečné) či odstranitelnou (obě jednostranné limity existují a jsou si rovné) nespojitost. Dodatečný požadavek o spojitostji zleva či zprava v bodech nespojitosti pak znemožňuje situaci, kdy funkční hodnota v bodě nespojitosti nabývá jiné hodnoty. Zde nejde však o přesné specifikování funkcí, pro něž je klasický a zobecněný nosič stejný. Cílem je najít rozumnou třídu funkcí, pro něž tato shoda platí. Například funkce $f(x) = x$ či Heavisideova funkce θ.

Důkaz. Jedná se o rovnost dvou množin, a tedy ukážeme dvě inkluze.

$\operatorname{supp} f \subset \operatorname{supp} \tilde{f}$: Uvažme zobecněnou funkci nulovou na G: $\tilde{f} = 0$ na G. Tzn.

$$(\tilde{f}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_G f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0,$$

odkud ale plyne, že $f = 0$ s.v. na G, a tedy $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^n \backslash G$, jelikož $f = 0$ všude na G kvůli předpokladu po částech spojitosti funkce f. Speciálně pak tedy při volbě $G = \mathcal{N}(\tilde{f})$ máme $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^n \backslash G = \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{N}(\tilde{f}) = \operatorname{supp} \tilde{f}$.

$\operatorname{supp} \tilde{f} \subset \operatorname{supp} f$: Postupujeme sporem, tj. $\exists x_0 \in \operatorname{supp} \tilde{f}$, $x_0 \notin \operatorname{supp} f$. Nosiče jsou uzavřené množiny, a tedy $\exists G = G^o$ taková, že $G \subset \operatorname{supp} \tilde{f}$ a zároveň $G \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$. Z druhé vlastnosti víme, že $f(x) = 0$ na G, a z první naopak $\exists \psi \in \mathscr{D}(G)$ taková, že $(\tilde{f}, \psi) \neq 0$, což je spor, jelikož

$$0 \neq (\tilde{f}, \psi) = \int_G f(x)\psi(x)\mathrm{d}x = 0.$$

□

Poznámka. Nosič klasické funkce, jak jsme ho zavedli u testovacích funkcí, je zaváděný jen pro spojité funkce (a my ho zde přirozeně rozšiřujeme na funkce po částech spojité). Pro obecnější funkce, např. z Lebesgueových prostorů, nelze nosič takto definovat.

Ilustrujme nyní pojem nosič zobecněné funkce na konkrétním příkladě. Určeme $\operatorname{supp} \delta_{x_0}$. Předpokládejme, že máme testovací funkci, jejíž support neobsahuje bod x_0. Pak v tomto bodě je funkce nulová a z definice Diracovy funkce mámé $(\delta_{x_0}, \varphi) = \varphi(x_0) = 0$, a to pro libovolné φ splňující tuto vlastnost. Je zřejmé, že zobecněná funkce je tedy nenulová pouze pro ty testovací funkce, které ve svém nosiči obsahují bod x_0, a tedy platí, že $\operatorname{supp} \delta_{x_0} = \{x_0\}$, jelikož menší doplněk k nulové množině má jen nulová zobecněná funkce.

Věta 2.4.4 (řešení rovnice $x^m f = 0$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$)**.** Buď $m \in \mathbb{N}$. Pak rovnice $x^m f = 0$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ má právě následující řešení $f = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}$, kde $c_j \in \mathbb{C}$ (jiná řešení nejsou).

Důkaz. Důkaz nebude proveden v plné obecnosti. Dokazuje se matematickou indukcí, zájemci jej naleznou ve [Šťovíček]. Zde bude proveden pro jednoduchost jen pro $m = 1$.

Nejprve si uvědomíme, že daný tvar řešení je správný, a to prostým dosazením a využitím rovnosti $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$.

Obrácená implikace (jiné řešení neexistuje) je obtížnější. Předpokládejme, že $\forall \varphi \in \mathscr{D}$ platí, že $(xf, \varphi) = (f, x\varphi) = 0$.

1. Nejprve uvažme $\varphi \in \mathscr{D}$ takové, že $\varphi(0) = 0$. Pak platí $(f, \varphi) = (f, x\psi) = 0$. Můžeme totiž $\varphi(x)$ rozepsat následujícím způsobem:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)\mathrm{d}t = \varphi(0) + x \underbrace{\int_0^1 \varphi'(x\tau)\mathrm{d}\tau}_{\psi(x)\in\mathcal{C}^\infty} = x\psi(x).$$

Vidíme, že $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ a navíc z rovnosti $\varphi = x\psi$ plyne, že je-li $\varphi \in \mathscr{D}$, tak i $\psi \in \mathscr{D}$. Proto pro f splňující $xf = 0$ platí $(f, \varphi) = (f, x\psi) = 0$, jakmile je $\varphi \in \mathscr{D}$ a $\varphi(0) = 0$.

2. Buď nyní $\eta, \varphi \in \mathscr{D}$ a volme $\eta(0) = 1$. Pak funkce $\varphi - \varphi(0)\eta$ splňuje podmínky z předchozího bodu a máme:

$$(f, \varphi - \varphi(0)\eta) = 0 = (f, \varphi) - \varphi(0)(f, \eta).$$

Odtud již plyne požadované tvrzení, neboť $(f, \varphi) = \underbrace{\varphi(0)}_{(\delta,\varphi)}\underbrace{(f, \eta)}_{\text{číslo}}$, tedy $f = c\delta$, kde $c = (f, \eta)$.

□

2.4.2 Uzavřenost $\mathscr{D}'$

Připomeňme definici limity (konvergence) v $\mathscr{D}'$: Buď $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'$ posloupnost zobecněných funkcí a buď $f \in \mathscr{D}'$. Pak řekneme, že limita posloupnosti funkcí f_k je rovna f, ozn. $\lim_{k\to+\infty} f_k = f$, právě tehdy, když $\lim_{k\to+\infty}(f_k, \varphi) = (f, \varphi)$ pro libovolnou $\varphi \in \mathscr{D}$. Poznamenejme, že pojem limity existuje i pro klasické funkce, a tedy zde jsme se odchýlili od zavedené zvyklosti užívat motivaci k rozšíření klasického pojmu limity do zobecněných funkcí. Definice limity zde připomenutá je slabá konvergence (FA: weak-star konvergence v topologických vektorových prostorech) a zkusme si nyní vyjasnit, jak si jsou tyto pojmy blízké.

Poznámka. 1. Jedná se vskutku o slabou konvergenci a následkem je, že leccos konverguje v $\mathscr{D}'$ (vzpomeňme např. limitu $k^m cos(kx)$) a platí ony věty o záměně. Jedná se o důsledek silných požadavků na testovací funkce, k nimž jsou zobecněné funkce duální.

2. Existuje nějaká shoda této slabé konvergence s klasickou (bodovou) limitou? Zkoumáme tedy, jestli platí, že $\widetilde{\lim_{k\to+\infty}} f_k = \lim_{k\to+\infty} \tilde{f}_k$. Tedy

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty} (\tilde{f}_k, \varphi) = \left(\lim_{k\to+\infty} \tilde{f}_k, \varphi\right) \stackrel{?}{=}$$
$$\stackrel{?}{=} \left(\widetilde{\lim_{k\to+\infty}} f_k, \varphi\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to+\infty} f_k(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Vidíme tedy, že jakmile platí záměna limity a integrálu (např. existuje-li integrabilní majoranta), tak jsou tyto definice limity ve shodě.

3. **Uzavřenost v $\mathscr{D}'$**

Předpoklad $f \in \mathscr{D}'$ je v definici konvergence v $\mathscr{D}'$ nadbytečný (důkaz je založen na Banach-Steinhaus theoremu pro topologické vektorové prostory, FA), tj. lze opět zformulovat konvergenci posloupnosti zobecněných funkcí jakožto vlastnost posloupnosti. Přesněji lze říci následující:

Věta 2.4.5. Buď $\{f_k\}_{\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'(G)$ a nechť $\forall\varphi \in \mathscr{D}$ existuje $\lim_{k\to+\infty}(f_k, \varphi) \in \mathbb{C}$ (přirozený požadavek). Pak

$$(f, \varphi) := \lim_{k\to+\infty} (f_k, \varphi)\ \forall\varphi \in \mathscr{D}$$

definuje zobecněnou funkci $f \in \mathscr{D}'(G)$.

V tomto smyslu lze chápat úplnost prostoru zobecněných funkcí vůči konvergenci v $\mathscr{D}'$.

Toto pozorování má však i praktický význam. Pomocí něj například snadno ukážeme, že *Sochockého distribuce*, což jsou jiné možné regularizace funkce $\frac{1}{x}$, jsou zobecněné funkce. Sochockého distribuce jsou definovány pomocí limity jako

$$\left(\frac{1}{x \pm \mathrm{i}0}, \varphi(x)\right) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{x \pm \mathrm{i}\varepsilon}, \varphi(x)\right) \ \forall \varphi \in \mathscr{D}.$$

Nyní si stačí uvědomit, že $\frac{1}{x \pm \mathrm{i}\varepsilon}$ jsou lokálně integrovatelné funkce, odkud již pak máme zaručenou existenci limit, a tedy Sochockého distribuce je vskutku zobecněnou funkcí.

Poznámka. Výpočtem snadno též ověříme rozumnost obou regularizací a sice, že platí $x\frac{1}{x \pm \mathrm{i}0} = xP\frac{1}{x} = 1$. Poznamenejme, že odsud plyne použitím pozorování o řešení algebraické rovnice $xf(x) = 0$, že se regularizace mohou lišit pouze o násobek Diracovy δ-funkce, což upřesníme v následujícím tvrzení.

Věta 2.4.6 (Sochockého vzorce)**.**

$$\frac{1}{x \pm \mathrm{i}0} = P\frac{1}{x} \mp \mathrm{i}\pi\delta(x) \text{ v } \mathscr{D}'.$$

Důkaz. Bude dokázáno (vypočteno) na cvičeních. □

Poznámka (násobení v $\mathscr{D}'$)*.* Na závěr se ještě vraťme k operaci násobení v $\mathscr{D}'$. Viděli jsme, že jako jediná operace má pro svou platnost nějaké omezení a to dokonce taková, která jsou mnohem více restriktivní než operace násobení v klasickém případě.

Operace není například ani symetrická (ani dvě spojité funkce neumíme vynásobit v $\mathscr{D}'$). Toto lze opravit s pomocí Fourierovy transformace. Avšak vynásobit například dva bodové zdroje s různou lokalizací (dvě středované Diracovy δ-funkce) nelze, byť jde o fyzikálně důležitý problém. Z tohoto důvodu je součin zobecněných funkcí stále aktivní výzkumný problém a alespoň částečné odpovědi (ale v dosti obecnějším a náročnějším rámci) se podařilo dosáhnout J.F. Colombeauovi.

2.5 Tenzorový součin a konvoluce

2.5.1 Zavedení tenzorového součinu

V předešlé části jsme narazili na problém nemožnosti násobit dvě zobecněné funkce. Existuje však ještě jiný typ násobení, který půjde do zobecněných funkcí úspěšně rozšířit. Tenzorový součin klasických funkcí je speciálním typem součinu týkající se *nezávislých* proměnných, tj. součin $f(x) \cdot g(y)$ budeme nazývat *tenzorový součin* a budeme jej značit $f(x) \otimes g(y)$. Dopředu prozradíme, že bude existovat $\delta(x) \otimes \delta(y)$ (byť stále $\delta(x) \otimes \delta(x)$ nebude existovat).

Při zavádění tenzorového součinu postupujme standardně z motivace. Nejprve si uvědomíme, že u klasických funkcí se jedná o prosté násobení ve smyslu $f(x) \otimes g(y) = f(x)g(y)$, tedy $\widetilde{f(x) \otimes g(y)} = \widetilde{f(x)g(y)}$, což ve spojení s klasickou motivací pro rozšiřování operací do zobecněných funkcí znamená

$$\widetilde{f(x)} \otimes \widetilde{g(y)} = \widetilde{f(x) \otimes g(y)} = \widetilde{f(x)g(y)}.$$

Nakonec nalezněme vhodný vztah pro definici pro $\tilde{f} \in \mathscr{D}'_{reg}(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{g} \in \mathscr{D}'_{reg}(\mathbb{R}^m)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$:

$$\left(\widetilde{f(x)} \otimes \widetilde{g(y)}, \varphi(x,y)\right) = \left(\widetilde{f(x)g(y)}, \varphi(x,y)\right) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x)g(y)\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} \mathit{Fubini} \\ f, g \in L^1_{loc} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^m} g(y)\varphi(x,y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \left(\widetilde{f(x)}, \left(\widetilde{g(y)}, \varphi(x,y)\right)\right). \\ \int_{\mathbb{R}^m} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x,y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \left(\widetilde{g(y)}, \left(\widetilde{f(x)}, \varphi(x,y)\right)\right). \end{cases}$$

Na základě této úvahy tedy definujme tenzorový součin na prostoru zobecněných funkcí.

Definice 2.5.1. Buď $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Pak **tenzorovým součinem zobecněných funkcí** $f \otimes g$ rozumíme:

$$(f(x) \otimes g(y), \varphi(x,y)) := (f(x), (g(y), \varphi(x,y)))\,.$$

Jako již v dřívějších situacích jsou otázky patrně důležitější než-li odpovědi na ně. Co potřebujeme vědět, aby definice tenzorového součinu byla rozumná? Zejména aby nový objekt byl dobře definován, tj. vracel konečné číslo na každou testovací funkci. K tomu ale potřebujeme vědět, že $(g(y), \varphi(x,y)) \in \mathscr{D}(R^n)$. Za druhé je třeba zjistit, kdy se touto definicí získává funkcionál, který je lineární a spojitý, tj. kdy se jedná o zobecněnou funkci.

Odpověď na obě otázky je složitá (zájemce rád odkáži na [Šťovíček1]), ale my se pokusíme nahlédnout do jejich zodpovězení alespoň částečně. Uvažme pro jednoduchost jen speciální testovací funkce $\varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m})$ a to takové, které jsou separabilní do tvaru $\varphi(x,y) = \varphi_x(x)\varphi_y(y)$. Potom $\varphi_x \mathscr{D}(R^n)$, $\varphi_y \in \mathscr{D}(R^m)$ a snadno nahlédneme, že

$$(g(y), \varphi(x,y)) = (g(y), \varphi_x(x)\varphi_y(y)) = (g, \varphi_y)\varphi_x(x) \in \mathscr{D}(R^n),$$

jelikož x hraje roli parametru při působení zobecněné funkce $g(y) \in \mathscr{D}'(R^m)$.

Podobně se lze vyjádřit k druhému problému. Linearita je triviální a zabývejme se spojitostí, kde opět budeme uvažovat pro ilustraci separabilitu testovací funkce. Totiž mějme $\varphi_k(x,y) \in \mathscr{D}(R^{n+m})$, kterou lze rozepsat jako $\varphi_k(x,y) = u_k(x)v_k(y)$ a zároveň konverguje v $\mathscr{D}(R^{n+m})$. Potom obě posloupnosti $\{u_k\}$ či $\{v_k\}$ jsou konvergentní v $\mathscr{D}$ (ukažte si). Potom můžeme upravit rozhodnou limitu jako:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}(f(x)\otimes g(y), \varphi_k(x,y)) &= \lim_{k\to+\infty}(f(x), (g(y), \varphi_k(x,y))) = \lim_{k\to+\infty}(f(x), u_k(x)(g(y), v_k(y))) = \\ &= \lim_{k\to+\infty}(f(x), u_k(x))(g(y), v_k(y)) = \lim_{k\to+\infty}(f(x), u_k(x)) \lim_{k\to+\infty}(g(y), v_k(y)) = \\ &= (f(x), \lim_{k\to+\infty} u_k(x))(g(y), \lim_{k\to+\infty} v_k(y)) = 0.\end{aligned}$$

Tedy vskutku je nově definovaný funkcionál spojitý vůči této speciální třídě testovacích funkcí.

Závěrem této diskuze poznamenejme, že jde sice o velké zjednodušení tvaru testovacích funkcí, ale i prezicní důkaz je na tomto postupu založen. Totiž platí následující tvrzení (bez důkazu, případně opět [Šťovíček]).

Věta 2.5.2. Prostor $\mathscr{D}_{sep}(\mathbb{R}^{n+m}) = \{\sum_{k=1}^N u_k(x)v_k(y)|\ u_k \in \mathscr{D}(R^n),\ v_k \in \mathscr{D}(R^m)\}$ je hustý v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ vzhledem ke konvergenci v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$, tj. $\forall \varphi \in \mathscr{D}(R^{n+m})\ \exists\{\varphi_k\} \subset \mathscr{D}_{sep}(R^{n+m})$ taková, že $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$.

2.5.2 Vlastnosti tenzorového součinu v $\mathscr{D}'$

Nyní uvedeme vlastnosti tenzorového součinu v $\mathscr{D}'$ s tím, že v případě potřeby se v důkazech opět omezíme na zjednodušující případ separabilních testovacích funkcí, abychom získali alespoň nějakou intuici pro zobecněný tenzorový součin.

1. **komutativita:** Uvažujme $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ a testovací funkci $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Pak

$$\begin{aligned}(f(x) \otimes g(y), \varphi(x,y)) &= \left(f(x), \left(g(y), \underbrace{\varphi_x(x)}_{\in\mathbb{C}}\varphi_y(y)\right)\right) = \underbrace{(f(x), \varphi_x(x))}_{\in\mathbb{C}}(g(y), \varphi_y(y)) = \\ &= (g(y), (f(x), \varphi_x(x))\,\varphi_y(y)) = (g(y), (f(x), \varphi_x(x)\varphi_y(y))) = (g(y) \otimes f(x), \varphi(x,y))\,.\end{aligned}$$

2. **linearita v obou argumentech** jakožto zobrazení $\otimes : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$. Důkaz je jednoduchý a přenecháváme čtenáři.

3. **asociativita:** pro $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ a $h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^r)$ platí, že $(f(x) \otimes g(y)) \otimes h(z) = f(x) \otimes (g(y) \otimes h(z))$ v $\mathscr{D}'$. Úpravou pravé strany dostáváme:

$$\begin{aligned}((f(x) \otimes g(y)) \otimes h(z), \varphi(x,y,z)) &= (f(x) \otimes g(y), (h(z), \varphi(x,y,z))) = \\ &= (f(x), (g(y), (h(z), \varphi(x,y,z)))) = (f(x), (g(y) \otimes h(z), \varphi(x,y,z))) = \\ &= (f(x) \otimes (g(y) \otimes h(z)), \varphi(x,y,z)).\end{aligned}$$

4. **spojitost v obou argumentech:** díky komutativitě stačí vyšetřit spojitost v levém argumentu, tj. uvažme $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ a nechť $f_k \to f$ v $\mathscr{D}'$. Buď navíc $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Pak platí $f_k(x) \otimes g(y) \to f(x) \otimes g(y)$ v $\mathscr{D}'$. Stačí si totiž uvědomit, že:

$$\begin{aligned}\left(\lim_{k\to+\infty} f_k(x) \otimes g(y), \varphi(x,y)\right) &= \lim_{k\to+\infty} (f_k(x) \otimes g(y), \varphi(x,y)) = \lim_{k\to+\infty} (f_k(x), (g(y), \varphi(x,y))) = \\ &= \left(\lim_{k\to+\infty} f_k(x), (g(y), \varphi(x,y))\right) = (f(x), (g(y), \varphi(x,y))) = (f(x) \otimes g(y), \varphi(x,y)).\end{aligned}$$

5. **záměna derivace a tenzorového součinu:** Platí $D_x^\alpha(f(x) \otimes g(y)) = (D_x^\alpha f(x)) \otimes g(y)$ v $\mathscr{D}'$. Upravováním za využití předpokladu o separabilitě testovacích funkcí máme:

$$\begin{aligned}(D_x^\alpha(f(x) \otimes g(y)), \varphi(x,y)) &= (D_x^\alpha(f(x) \otimes g(y)), \varphi_x(x)\varphi_y(y)) = (-1)^{|\alpha|}(f(x) \otimes g(y), D_x^\alpha \varphi_x(x)\varphi_y(y)) = \\ &= (-1)^{|\alpha|}(f(x), (g(y), (D_x^\alpha \varphi_x(x))\varphi_y(y))) = (-1)^{|\alpha|}(f(x), D_x^\alpha \varphi_x(x))(g(y), \varphi_y(y)) = \\ &= (D_x^\alpha f(x), \varphi_x(x)(g(y), \varphi_y(y))) = (D_x^\alpha f(x) \otimes g(y), \varphi(x,y)).\end{aligned}$$

6. **Násobení hladkou funkcí:** Pro libovolnou dvojci zobecněných funkcí, které lze násobit, lze zaměnit pořadí násobení a tenzorového součinu, tj. $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ a nechť $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Platí $a(x)(f(x) \otimes g(y)) = (a(x)f(x)) \otimes g(y)$. Důkaz opět přenecháme čtenáři.

7. **Posun argumentu je zaměnitelný s tenzorovým součinem.** Mějme $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ a $b \in \mathbb{R}^n$. Pak platí, že $(f \otimes g)(x+b, y) = f(x+b) \otimes g(y)$. Stačí si připomenout definici posunutí a správně ji použít:

$$\begin{aligned}((f \otimes g)(x+b,y), \varphi(x,y)) &= ((f \otimes g)(x,y), \varphi(x-b,y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x-b,y))) = \\ &= (f(x), (g(y), \varphi(x-b,y))) = (f(x+b), (g(y), \varphi(x,y))) = (f(x+b) \otimes g(y), \varphi(x,y)).\end{aligned}$$

Definice 2.5.3. S využitím výše uvedených vlastností (zejména derivování) můžeme zavést následující pojem. Řekmene, že $f(x,y) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ **nezávisí na** y, právě když existuje $h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ taková, že $f(x,y) = h(x) \otimes 1$.

2.5.3 Zavedení konvoluce

Nyní přikročíme k poslední operaci, kterou budeme hojně využívat při hledání řešení diferenciálních rovnic, totiž konvoluci. Jelikož se však jedná o operaci, se kterou nemusí být čtenář dostatečně obeznámen, první sekci věnujeme studiu klasické podoby této operace. Následně si připravíme mezikrok v podobě konvoluce zobecněné funkce a testovací funkce, kde si ukážeme všechny potřebné vlastnosti (zejména pak ony vyhlazovací schopnosti konvoluce), a konečně zavedení konvoluce zobecněných funkcí již bude snadné díky předchozím poznatkům. Poznamenejme, že v tomto pojetí se zcela odlišujeme od Vladimirova a tedy i [Šťovíček], [Burdík, Navrátil] a souvislost s tenzorovým součinem odhalíme až na samotném konci.

Definice 2.5.4. Buďte $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Pak **konvolucí funkcí** $(\varphi * \psi)(x)$ rozumíme

$$(\varphi * \psi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y.$$

Zamysleme se nyní nad (intuitivním) významem konvoluce. Z významu integrace můžeme na konvoluci nahlížet jako na vážený (pomocí funkce ψ) průměr všech translací funkce φ. Doporučuji shlédnout několik vizualizací na wikipedii pro konvoluci, a to v různých jazykových variantách (např. English, Deutsch a českou; proč různým národům připadají různé příklady vhodnější, nevím). Z hlediska pravděpodobnosti je možné interpretovat konvoluci jako rozdělení pravděpodobnosti součtu dvou nezávislých jevů, což lze snadno nahlédnout.

Poznámka. Zavedli jsme konvoluci jen pro testovací funkce. Jedná se však čistě o zjednodušení pro naše účely v tomto předmětu. Konvoluce je však dobře definovanou operací nad prostorem $L^1 \times L^1$.

Důkaz. Chceme ukázat, že pro $f, g \in L^1$ platí $\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty$. Přitom platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x \left| \int_{R^n} \mathrm{d}y f(x-y)g(y) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y |f(x-y)||g(y)| \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x |f(x)||g(y)| = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$$

□

Vlastnosti konvoluce v $\mathscr{D}$

Nyní si zmíníme některé (pro náš výklad) důležité vlastnosti konvoluce.

1. **komutativita:** Ze substituce okamžitě plyne vztah $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.
2. **asociativita:** Platí, že $(\varphi * \psi) * \eta = \varphi * (\psi * \eta)$. Úpravou levé strany postupně získáme rovnost:

$$((\varphi * \psi) * \eta)(x) = ((\psi * \varphi) * \eta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\psi * \varphi)(x-y)\eta(y)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\eta(y) \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}z\psi(x-y-z)\varphi(z) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}z\varphi(z) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\psi((x-z)-y)\eta(y)}_{=(\psi*\eta)(x-z)} = (\psi*\eta)*\varphi.$$

3. **záměna konvoluce a posunu v argumentu:** triviálně platí $(\varphi*\psi)(x-a) = \varphi(x-a)*\psi = \varphi * \psi(x-a)$.
4. **záměna konvoluce a derivace:** Platí totiž, že $D^\alpha(\varphi * \psi)(x) = (D^\alpha\varphi(x)) * \psi(x) = \varphi(x) * (D^\alpha\psi(x))$. Stačí si uvědomit, že lze zaměnit derivaci a integraci. Tvrzení pak ihned plyne. Uvažme pro jednoduchost jednu dimenzi a první derivaci. Pak

$$(\varphi * \psi)'(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\varphi(x-y)\psi(y) \right)' = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\varphi(z)\Big|_{z=x-y} \psi(y)\mathrm{d}y = (\varphi' * \psi)(x),$$

   kde jsme využili existence integrabilní majoranty (nezávislé na x) $\left|\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x-y)\psi(y)\right| \leq K|\psi(y)|$.

Poznámka. Ponecháváme čtenáři na rozmyšlení, jestli výše uvedené vlastnosti vyžadují testovací funkce a případně najít nejslabší předpoklady pro jejich platnost. Poznamenejme, že komutativitu a asociativitu jsme ověřili i pro L^1 prostory.

Poznámka. Z důkazu záměny konvoluce a derivace je patrné, že pro diferencovatelnost konvoluce stačí diferencovatelnost jen jedné z funkcí. Tento poznatek lze pro srozumitelnost nazvat vyhlazovací schopností konvoluce. Funkce $f*g$ je totiž tolikrát diferencovatelná, kolik mají derivací funkce f a g dohromady, jak lze nahlédnout ze zmiňovaného důkazu. Například pro $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ takovou, že supp $f \subset B_R(0)$ a dále $g \in L^1(\mathbb{R})$ platí $f * g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

5. **konvoluce testovacích funkcí je testovací:**

Věta 2.5.5. Buďte $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$. Pak $\varphi * \psi \in \mathscr{D}$.

Důkaz. Abychom ukázali, že se jedná o testovací funkci, musíme ověřit hladkost a stejnoměrnou omezenost nosičů. Hladkost však již plyne z předchozí vlastnosti. Zbývá ukázat omezenost nosiče. Pro názornost se omezíme na jednorozměrný případ. Předpokládejme tedy, že $\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]$ a $\operatorname{supp}\psi \subset [c,d]$. Potom pro výpočet konvoluce máme:

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y = \int_c^d \varphi(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y.$$

Dále pro dané y a $x \in \mathbb{R} \setminus [a+y, b+y]$ platí $\varphi(x-y) = 0$. Jelikož nenulový příspěvek v integrálu je pouze pro $y \in [c,d]$, tak platí $\varphi(x-y)\psi(y) = 0$ pro $x \notin [a+c, b+d]$. □

6.

Věta 2.5.6 (Souvislost konvoluce, skalárního součinu a akce testovací funkce)**.** Označme $\varphi^-(x) := \varphi(-x)$. Pak pro funkce $\varphi, \psi, \tau \in \mathscr{D}$ platí:

(a) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x = (\varphi * \psi^-)(0) = \langle \varphi, \psi \rangle = (\widetilde{\varphi}, \psi)$,

(b) $\langle \varphi * \tau, \psi \rangle = \langle \varphi, \tau^- * \psi \rangle$, tj. $(\widetilde{\varphi * \tau}, \psi) = (\widetilde{\varphi}, \tau^- * \psi)$, což opět užijeme ke zobecňování konvoluce.

Důkaz. První vlastnost je triviální. Druhá plyne šikovným přepsáním známých vlastností:

$$\begin{aligned}\langle \varphi * \tau, \psi \rangle \overset{1.}{=} \left((\varphi * \tau) * \psi^-\right)(0) = \left(\varphi * (\tau * \psi^-)\right)(0) = \\ = \left(\varphi * (\tau^- * \psi)^-\right)(0) = \left\langle \varphi, \tau^- * \psi \right\rangle,\end{aligned}$$

kde jsme využili pozorování:

$$\begin{aligned}(\tau * \psi^-)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tau(x-y)\psi^-(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \tau(x+y)\psi(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tau^-(-x-y)\psi(y)\mathrm{d}y = (\tau^- * \psi)(-x) = (\tau^- * \psi)^-(x).\end{aligned}$$

□

2.5.4 Konvoluce testovacích a zobecněných funkcí

Nyní vybudujeme mezikrok pro zavedení konvoluce zobecněných funkcí. Zde totiž zavedeme konvoluci zobecněné a testovací funkce, pomocí které pak definujeme konvoluci zobecněných funkcí.

Začněme motivací, jak je již dobrým zvykem. Výsledkem konvoluce je funkce a pro konzistenci (později zavedené) konvoluce zobecněných funkcí bude vhodné, aby $(\widetilde{f} * \varphi)(x) = (f * \varphi)(x)$. Odsud

$$(\widetilde{f} * \varphi)(x) = (f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x-y)\mathrm{d}y = (\widetilde{f}(y), \varphi(x-y)),$$

a zároveň

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y = (\widetilde{f(x-y)}, \varphi(y)) = (\widetilde{f}(x-y), \varphi(y)),$$

a tedy opět máme $(f(x-y), \varphi(y)) = (f(y), \varphi(x-y))$.

Definice 2.5.7. Buď $f \in \mathscr{D}', \varphi \in \mathscr{D}$. Pak **konvolucí zobecněné funkce** f **a testovací funkce** φ rozumíme $(f * \varphi)(x) := (f(y), \varphi(x-y))$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$. Výsledkem je klasická funkce.

Poznámka. 1. Pro $f \in \mathscr{D}'$ a $\varphi \in \mathscr{D}$ opět platí $(f, \varphi) = (f * \varphi^-)(0)$.

2. Pro $f \in \mathscr{D}'_{reg}$ a $\varphi \in \mathscr{D}$ platí $(\widetilde{f} * \varphi)(x) = (f * \varphi)(x)$, jak jsme požadovali v motivaci

3. $\delta * \varphi = \varphi$.

4. Poslední definicí jsme zavedli (přesně vzato) pouze konvoluci $* : \mathscr{D}' \times \mathscr{D}$ zobrazující do funkcí (hladkých, jak si vzápětí ukážeme). Zcela analogicky lze zavést konvoluci v obráceném pořadí a veškeré následující vlastnosti pro ní budou přirozeně platit. Tuto druhou definici budeme přirozeně potřebovat při jakékoli diskuzi komutativity konvoluce.

Nyní prozkoumáme vlastnosti konvoluce zobecněné a testovací funkce. Nejprve ukážeme, že konvoluce si zachovala vyhlazovací vlastnost.

Věta 2.5.8. Buď $f \in \mathscr{D}', \varphi \in \mathscr{D}$. Pak $f * \varphi \in \mathcal{C}^\infty$. Má-li navíc zobecněná funkce f kompaktní nosič, pak $f * \varphi$ má též kompaktní nosič, tj. $f * \varphi \in \mathscr{D}$.

Důkaz. Pro dokázání první části tvrzení využijeme dvojice lemmat:

Lemma 2.5.9. $f * \varphi$ je spojitá funkce.

Důkaz. Důkaz provedeme pomocí Heineovy věty, tj. uvažme posloupnost $x_k \to x$ a označme $\varphi_k^x(y) := \varphi(x_k - y)$, $\varphi^x(y) = \varphi(x - y)$. Je vidět, že $\varphi_k^x(y) \to \varphi^x(y)$ bodově. Ukážeme však, že dokonce $\varphi_k^x \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi^x$ pro každý $x \in \mathbb{R}^n$ (proto ono značení φ_k^x pro názornost). Je tedy potřeba ukázat, že φ_k^x má stejnoměrně omezené nosiče a že veškeré derivace stejnoměrně konvergují:

i) nosiče Víme, že $\operatorname{supp} \varphi \subset B_R(0)$. Pak ale $\operatorname{supp} \varphi^x \subset B_R(x)$. Z konvergence $x_k \to x$ plyne, že existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall k \in \mathbb{N}, kk > k_0$ platí, že $|x_k - x| < 1$. Tudíž $\operatorname{supp} \varphi_k^x \subset B_{R+1}(x)$, a tedy nosiče jsou stejnoměrně omezené.

ii) derivace Ukažme nejprve případ $\alpha = 0$, tj. chceme $\varphi_k^x \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \varphi^x$. Využijme supremové kritérium:

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |\varphi_k^x(y) - \varphi^x(y)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |\varphi(x_k - y) - \varphi(x - y)| \overset{\text{Taylor}}{\leq} \sup_{y\in\mathbb{R}} |(x_k - x)\varphi'(\xi)| \leq K|x_k - x| \to 0,$$

přičemž $\xi \in (x_k - y, x - y)$, avšak odhad derivace konstantou lze učinit přes celé $\mathbb{R}$. Stejný odhad lze provést pro libovolnou derivaci.

Tímto jsme ukázali, že $\varphi_k^x \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi^x$. Nyní již můžeme ukázat snadno spojitost:

$$\lim_{k\to+\infty} (f*\varphi)(x_k) = \lim_{k\to+\infty} \left(f(y), \underbrace{\varphi(x_k - y)}_{\varphi_k^x(y)} \right) = \left(f(y), \lim_{k\to+\infty} \varphi_k^x(y) \right) = (f(y), \varphi^x(y)) = (f*\varphi)(x).$$

□

Lemma 2.5.10. Jestliže $f \in \mathscr{D}', \varphi \in \mathscr{D}$, pak $(f * \varphi)' = f * \varphi'$. (Rozmyslete, zda-li platí i $(f * \varphi)' = f' * \varphi$)

Důkaz. Z prvního lemmatu plyne, že $f * \varphi$ je spojitou funkcí. Vypočteme klasickou derivaci z definice, kterou přepíšeme jako působení zobecněné derivace funkce f:

$$(f * \varphi)'(y) = \lim_{k\to+\infty} \frac{(f * \varphi)\left(y + \frac{1}{k}\right) - (f * \varphi)(y)}{\frac{1}{k}} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{\left(f\left(y + \frac{1}{k} - x\right), \varphi(x)\right) - (f(y - x), \varphi(x))}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{f\left(y + \frac{1}{k} - x\right) - f(y - x)}{\frac{1}{k}}, \varphi(x) \right) =$$

$$= \left(\lim_{k\to+\infty} \frac{f\left(y + \frac{1}{k} - x\right) - f(y - x)}{\frac{1}{k}}, \varphi(x) \right) = (f'(y-x), \varphi(x)) = (f(y-x), \varphi'(x)) = (f*\varphi')(y).$$

□

Z těchto lemmat tedy plyne, že $f * \varphi \in \mathcal{C}^\infty$. Nakonec ukážeme dodatek o nosičích.

Lemma 2.5.11. Buď $f \in \mathscr{D}'$ taková, že $\operatorname{supp} f$ je kompakt. Pak $\operatorname{supp}(f*\varphi)$ je omezená množina.

Důkaz. Víme, že $(f * \varphi)(x) = (f(y), \varphi(x-y))$. Jelikož je $\varphi \in \mathscr{D}$, má $\varphi(x-y)$ nosič omezený nějakou koulí $B_R(x)$. Volbou x takovou, že $\operatorname{supp} f \cap B_R(x) = \emptyset$ dostáváme fakt, že $\operatorname{supp}(f * \varphi)$ je omezený, jelikož pro $\varphi^x(y) = \varphi(x-y)$ máme $\varphi^x \in \mathscr{D}(B_R(x))$. □

Ze všech tří lemmat již nyní přímo plyne, že $f * \varphi \in \mathscr{D}$. □

Nyní přikročíme k asociativitě.

Věta 2.5.12. Buď $f \in \mathscr{D}'$, $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$. Pak $(f * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi)$.

Důkaz. V důkaze se opět pro jednoduchost výkladu omezíme na $\mathbb{R}$. Nejprve si všimneme, že na pravé straně je konvoluce dvou testovacích funkcí, tj. $(\varphi*\psi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)\psi(y)\mathrm{d}y$. Jelikož však na levé straně máme nejprve konvoluci zobecněné a testovací funkce, pomůžeme si pomocnou posloupností, jmenovitě riemannovskými integrálními součty:

$$r_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(x - \frac{m}{k}\right) \psi\left(\frac{m}{k}\right)$$

Z konstrukce integrálu (jelikož víme, že konvoluce existuje) víme, že bodově konvergují k $(\varphi*\psi)(x)$. Poznamenejme, že z existence integrálu víme, že nezávisí na volbě rozdělení, a dále z vlastností testovacích funkcí si lze všimnout, že suma je ve skutečnosti vždy konečná.

Nyní ukážeme, že r_k konvergují silněji ke konvoluci, dokonce konvergují v $\mathscr{D}$. Jelikož φ, ψ jsou stejnoměrně spojité (spojité funkce na kompaktní množině), tak posloupnost r_k má stejnoměrně omezené nosiče a je tvořena stejnoměrně spojitými funkcemi. Odtud pozorujeme, že r_k stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$.

Vyšší derivace se ukáží analogicky, tj. uzavíráme, že $r_k \xrightarrow{\mathscr{D}}$.

Nyní přistoupíme k ukázání identity:

$$\begin{aligned}
(f * (\varphi * \psi))(x) &= (f(y), (\varphi * \psi)(x-y)) = \left(f(y), \lim_{k\to+\infty} r_k(x-y)\right) = \\
&= \lim_{k\to+\infty} (f(y), r_k(x-y)) = \lim_{k\to+\infty} \left(f(y), \frac{1}{k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(x-y-\frac{m}{k}\right)\psi\left(\frac{m}{k}\right)\right) = \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(f(y), \varphi\left(x-y-\frac{m}{k}\right)\psi\left(\frac{m}{k}\right)\right) = \int_{\mathbb{R}} (f(y), \varphi(x-y-z)\psi(z))\mathrm{d}z = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi(z) \underbrace{(f(y), \varphi(x-y-z))}_{(f*\varphi)(x-z)} \mathrm{d}z = ((f*\varphi)*\psi)(x).
\end{aligned}$$

□

Důsledkem asociativity je následující pozorování.

Poznámka. Buďte $f \in \mathscr{D}'$, $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$. Pak $(f * \varphi, \psi) = (f, \varphi^- * \psi)$.

Důkaz.

$$(f*\varphi, \psi) = \left((f*\varphi)*\psi^-\right)(0) = \left(f*(\varphi*\psi^-)\right)(0) = \left(f*(\varphi^-*\psi)^-\right)(0) = (f, \varphi^- * \psi).$$

□

Nyní ukažme klíčovou vlastnost pro zobecnění konvoluce dále, a sice spojitost konvoluce v pravém argumentu (v testovacích funkcích).

Věta 2.5.13. Nechť $f \in \mathscr{D}'$ s kompaktním nosičem. Pak pro libovolnou konvergentní posloupnost $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ v $\mathscr{D}$, $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$, platí, že $f * \varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} f * \varphi$.

Důkaz. Už víme, že tvrzení dává smysl, jelikož z věty 2.5.8 víme, že $f * \varphi_k, f * \varphi \in \mathscr{D}$.

Nyní si postupným přeformulováváním tvrzení výrazně zjednodušíme, co je třeba ukázat.

1. Stejnoměrná omezenost supp $f*\varphi_k$ vyplývá ze stejné omezenosti supp φ_k a z lemmatu 2.5.11.

2. Funkce spojitá na kompaktní množině je stejnoměrně spojitá a platí: f stenoměrně spojitá, g_k stejnoměrně konvergentní na M; potom $f(g_k)$ stejnoměrně konverguje na M.

3. Ukážeme-li, že

   a) $F(x,s)$ je spojitá funkce na $\mathbb{R}\times(\{0\}\cup\{1/k, k\in\mathbb{N}\})$, kde $F(x,s) = f*\varphi_k(x)$ pro $s = 1/k$ a $F(x,s) = f*\varphi(x)$ pro $s = 0$

   b) $g_k(x) = \{x, 1/k\} \in \mathbb{R}^2$ stejnoměrně konverguje na $\overline{B_R(0)}$,

   pak z 2. bodu máme $F(g_k(x)) = f*\varphi_k(x) \overset{M}{\rightrightarrows} f*\varphi$, jelikož z prvního bodu víme, že spojitost F stačí vyšetřovat na kompaktní množině $N = \overline{B_R(0)} \times (\{0\}\cup\{1/k, k\in\mathbb{N}\})$.

4. Z lemmatu 2.5.10 víme, že $(f*\varphi_k)' = f*\varphi_k'$, a tedy $(f*\varphi_k)^{(m)} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} (f*\varphi)^{(m)}$ a opět z 1. bodu získáme stejnoměrnou omezenost nosičů $(f*\varphi_k)^{(m)}$.

Abychom dokázali tvrzení, stačí tedy ukázat, že podmínka 3a) je splněna. Avšak spojitost F v $(x_0, s_0) \in N$ vzhledem k množině N je triviální pro $s_0 \neq 0$. Tedy zbývá ukázat spojitost F v $(x_0, 0)$ vzhledem k N, k čemuž opět využijeme Heineho větu.

Lemma 2.5.14. Buď $\{\varphi_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ posloupnost taková, že $\varphi_{k_n} \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$ a buď dále $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ číselná posloupnost v $\mathbb{R}$ taková, že $x_n \to x$. Pak

$$\varphi_{k_n}(x_n - y) \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi(x-y) \text{ jakožto funkce proměnné } y,$$

tj. pro $\psi_n(y) = \varphi_{k_n}(x_n - y)$, $\psi(y) = \varphi(x_0 - y)$ platí $\psi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \psi$.

Důkaz. $\varphi_n \to \varphi$ stejnoměrně v $\mathbb{R}$ a φ je stejnoměrně spojitá, tedy $\varphi_{k_n}(x_n - y)$ stejnoměrně konverguje v y, jelikož

$$|\varphi_{k_n}(x_n - y) - \varphi(x-y)| \leq |\varphi_{k_n}(x_n - y) - \varphi(x_n - y)| + |\varphi(x_n - y) - \varphi(x-y)|\,.$$

Analogicky postupujeme pro vyšší derivace a stejnoměrná omezenost nosičů je triviální.

□

Užijeme nyní tohoto lemmatu k ukázání spojitosti $F(x,s)$ v $(x_0, 0)$. Uvažme tedy libovolnou posloupnost $\{x_n, s_{k_n}\} \subset N$, $(x_n, s_{k_n}) \to (x_0, 0)$. Potom však

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n, s_{k_n}) = \lim_{n\to+\infty} f*\varphi_{k_n}(x_n) = \lim_{n\to+\infty} (f(y), \varphi_{k_n}(x_n - y)) = (f(y), \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x_n - y)) =$$
$$= (f(y), \varphi(x_0 - y)) = (f*\varphi)(x_0) = F(x_0, 0).$$

□

Nakonec ukážeme přibližné identity, které jednak ukazují, že lze pomocí konvoluce konstruovat posloupnosti testovacích funkcí, které konvergují k libovolné testovací funkci v testovacím prostoru. Dále ukážeme, že libovolné zobecněné funkce lze aproximovat pomocí testovacích funkcí.

Věta 2.5.15 (přibližné identity)**.** Buď $\varphi \in \mathscr{D}$ a nechť $\varphi(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ a navíc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$. Označme $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ tzv. *přibližnou identitu*. Pak pro libovolnou $\psi \in \mathscr{D}$ platí, že $\varphi_n*\psi \xrightarrow{\mathscr{D}} \psi$.

Důkaz. Posloupnost $\varphi_n(x)$ má stejně omezené nosiče (nechť např. $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, R]$; pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\operatorname{supp}\varphi_n(x) \subset \left[-\frac{R}{n}, \frac{R}{n}\right] \subset [-R, R]$). Dále víme již, že $\varphi_n \to \delta$ v $\mathscr{D}'$, $\delta * \varphi = \varphi$ a $(\varphi_n * \psi)^{(k)} = \varphi_n * \psi^{(k)}$. Stačí tedy ukázat stejnoměrnou konvergenci $\varphi_n * \psi \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \psi$.

Zkoumáme tedy rozdíl:

$$|(\varphi_n * \psi)(x) - \psi(x)| = \left| \int_{-\frac{R}{n}}^{\frac{R}{n}} \varphi_n(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y - \underbrace{\int_{-\frac{R}{n}}^{\frac{R}{n}} \varphi_n(y)\mathrm{d}y}_{=1} \psi(x) \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\frac{R}{n}}^{\frac{R}{n}} \varphi_n(y) \left|\psi(x-y) - \psi(x)\right| \mathrm{d}y$$

Ze stejnoměrné spojitosti ψ plyne stejnoměrná konvergence celého výrazu k nule, jelikož integrál z funkce $\varphi_n(x)$ je dle předpokladu roven jedné, a tedy lze pro libovolné ε nalézt takové n_0, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí, že $|(\varphi_n * \psi)(x) - \psi(x)| < \varepsilon$. □

Věta 2.5.16 (o aproximovatelnosti zobecněných funkcí)**.** Každá zobecněná funkce f je limitou jisté posloupnosti funkcí $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty$ ve smyslu konvergence v $\mathscr{D}'$. Pokud navíc má zobecněná funkce f kompaktní nosič, pak $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ a φ_k lze volit tak, že $\forall \psi \in \mathscr{D}$ je $\varphi_k * \psi \xrightarrow{\mathscr{D}} f * \psi$.

Důkaz. Důkaz bude překvapivě konstruktivní. Nechť η_k jsou přibližné identity z předešlé věty. Pak označme $\varphi_k = f * \eta_k^-$ a ukážeme, že jde o posloupnost z tvrzení. Jedná se vskutku o hladké funkce, jak plyne z věty 2.5.8. Pak $\forall \psi \in \mathscr{D}$

$$(\varphi_k, \psi) = (f * \eta_k^-, \psi) = (f, \eta_k * \psi) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (f, \psi),$$

z věty o přibližných identitách, což však znamená, že $\varphi_k \to f$ v $\mathscr{D}'$.

Pokud nyní navíc budeme předpokládat, že $\operatorname{supp} f$ je kompakt, máme $\varphi_k = f * \eta_k^- \in \mathscr{D}$ dle věty 2.5.8, a tudíž platí

$$\varphi_k * \psi = (f * \eta_k^-) * \psi = f * (\eta_k^- * \psi) \xrightarrow{\mathscr{D}} f * \psi,$$

jelikož η_k^- jsou též přibližné identity a konvergence plyne z věty 2.5.13. □

2.5.5 Konvoluce zobecněných funkcí

Víme, že konvoluce zobecněné funkce s kompaktním nosičem s libovolnou testovací funkcí generuje testovací funkci. Toho využijeme při zavedení zobecněné konvoluce. Naše pojetí konvoluce tedy umožní zavedení konvoluce zobecněných funkcí, když alespoň jedna z nich bude s omezeným nosičem. Jiné přístupy ke konvoluci (Vladimirov, [Šťovíček]) zavádí obecnější definici, která však též neumožňuje existenci konvoluce libovolných zobecněných funkcí. Tato jiná definice se s naší shoduje pro funkce s omezeným nosičem.

Definice 2.5.17. Buďte $f, g \in \mathscr{D}'$ a nechť $\operatorname{supp} f$ je kompakt. Pak **konvolucí zobecněných funkcí** g **a** f rozumíme

$$(g * f, \varphi) = (g, f^- * \varphi) = (g(y), (f(x), \varphi(x+y))),$$

kde $f^-(x) = f(-x)$.

Poznámka. 1. Konzistence definice. Uvažme $f \in \mathscr{D}$, pak pro $g \in \mathscr{D}'$ a $\varphi \in \mathscr{D}$ platí dle poznámky pod větou 2.5.12 toto: $(g*f, \varphi) = (g, f^- * \varphi)$, což je ve shodě s právě formulovanou definicí. A jelikož konvoluce v tomto mezikroku byla konzistentní s konvolucí klasických funkcí, máme ověřenou konzistenci všech pojetí konvoluce.

2. Konvoluce je operace nad zobecněnými funkcemi, a tedy jejím výsledkem je opět zobecněná funkce. Linearita plyne z linearity funkcí f a g, spojitost ukážeme snadno. Uvažujme $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$. Pak $(g * f, \varphi_k) = (g, f^- * \varphi_k) \overset{\text{věta 2.5.13}}{\longrightarrow} (g, f^- * \varphi) = (g * f, \varphi)$.

3. Konvoluce má vlastnost levé spojitosti. Tzn. buď $g \in \mathscr{D}'$, $\operatorname{supp} g$ je kompakt. Buď dále $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'$, $f \in \mathscr{D}'$ a nechť $f_k \to f$ v $\mathscr{D}'$. Pak $f_k * g \to f * g$ v $\mathscr{D}'$.

   Důkaz.

$$\left(\lim_{k\to+\infty} f_k * g, \varphi\right) = \lim_{k\to+\infty}(f_k*g,\varphi) = \lim_{k\to+\infty}(f_k, g^-*\varphi) = (\lim_{k\to+\infty} f_k, g^-*\varphi) = (f, g^-*\varphi) = (f*g,\varphi)$$

□

Pro jednoduchost a kvůli symetrii operace budeme po zbytek této sekce předpokládat, že f, g mají obě kompaktní nosič.

Věta 2.5.18 (Vlastnosti konvoluce v $\mathscr{D}'$ s omezenými nosiči)**.** Buďte $f, g, h \in \mathscr{D}'$ zobecněné funkce s omezeným nosičem. Pak

1. $f * g = g * f$;
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$;
3. $(f * g)' = f' * g = f * g'$;
4. $(f * g)(x - a) = (f(x - a)) * g(x) = f(x) * g(x - a)$.

Důkaz. Dokážeme první tvrzení, zbytek je ponechán čtenáři jako cvičení. Dle věty 2.5.16 víme, že pro $f \in \mathscr{D}'$ s omezeným nosičem existuje $\{\varphi_k\} \subset \mathscr{D}$ taková, že $\varphi_k \to f$ v $\mathscr{D}'$ a $\varphi_k * \psi \xrightarrow{\mathscr{D}} f * \psi$ pro libovolné $\psi \in \mathscr{D}$. Rovněž pro $g \in \mathscr{D}'$ s omezeným nosičem existuje $\{\eta_k\} \subset \mathscr{D}$ taková, že $\eta_k \to g$ v $\mathscr{D}'$ a $\eta_k * \psi \xrightarrow{\mathscr{D}} g * \psi$ pro libovolné $\psi \in \mathscr{D}$.

Pro φ_k a η_l platí, že $\varphi_k * \eta_l \xrightarrow{\mathscr{D}} f * \eta_l$. Zároveň z komutativity testovacích funkcí plyne, že $\eta_l * \varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} \eta_l * f$ (zde využíváme onu druhou definici konvoluce testovací a zobecněné funkce - právě v tomto pořadí - jak bylo zmíněno v poznámce po definici této konvoluce), protože pro $h \in \mathscr{D}'$ platí $(h * \varphi_k, \psi) = (h, \varphi_k^- * \psi) \to (h, f^- * \psi)$ kde volíme $h = \eta_l$. Tedy máme $f * \eta_l = \eta_l * f$. Podobně provedeme limitní přechod v l. □

Poznámka. Z komutativity víme, že konvoluce je spojitá v obou argumentech. Nicméně není pravdou, že by byla spojitá v obou argumentech naráz: $f_k \to f$ v $\mathscr{D}'$, $g_k \to g$ v $\mathscr{D}'$ a přesto $\lim_{k\to+\infty} f_k * g_k \neq f * g$ v $\mathscr{D}'$. Jako protipříklad uvažme $f_k = \delta(x - k)$, $g_k = \delta(x + k)$. Potom $\lim_{k\to+\infty} f_k = \lim_{k\to+\infty} g_k = 0$ a zároveň

$$\begin{aligned}(f_k * g_k, \varphi) = (f_k, g_k^- * \varphi) = (\delta(x - k), (\delta(-x + k) * \varphi(x))) = (\delta(x - k), (\delta(-y + k), \varphi(x - y))) = \\ = (\delta(x - k), \varphi(x - k)) = \varphi(0) = (\delta, \varphi).\end{aligned}$$

Poznámka. Ukažme si nyní slibovanou souvislost konvoluce a tenzorového součinu. Postupujme formálně:

$$(f*g,\varphi) = (f, g^-*\varphi) = (f(x), (g(-y), \varphi)(x-y))) = (f(x)\otimes g(-y), \varphi(x-y)) = (f(x)\otimes g(y), \varphi(x+y)).$$

Problémem je, že funkce $\varphi(x + y) \notin \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$. Avšak skutečně platí

$$(f * g, \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x + y))$$

díky omezenosti nosičů funkcí f a g (opravující neomezenost nosiče $\varphi(x + y)$).

Příklad
Určete $f * \delta$ pro $f \in \mathscr{D}'$.

$$(f * \delta, \varphi) = (f, (\delta^- * \varphi)) = (f, \varphi),$$

přičemž $(\delta^- * \varphi) = (\delta(-y), \varphi(x-y)) = (\delta(y), \varphi(x+y)) = \varphi(x)$.

Odtud tedy plyne, že δ funguje jako jednotka při konvoluci.

Poznámka. Jako důsledek vlastností dostáváme též, že $f' = (f * \delta)' = f * \delta'$ a $f(x-a) = f(x) * \delta(x-a)$.

2.6 Užití konvoluce pro řešení diferenciálních rovnic v $\mathscr{D}'$

Mějme L lineární diferenciální operátor $\left(\text{např. pro obyčejné diferenciální rovnice } \mathrm{L} = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\right)$.
Potom pro $f \in \mathscr{D}'$ platí

$$Lf = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} (\delta * f) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \delta\right) * f,$$

tj. řešit diferenciální rovnici je ekvivalentní počítání konvoluce pravé strany s lineární kombinací derivací delta funkce.

Navíc pokud máme tzv. fundamentální řešení ε, řešení rovnice $\mathrm{L}\varepsilon = \delta$, pak řešení diferenciální rovnice $\mathrm{L}u = f$ je $u = \varepsilon * f$. Skutečně

$$\mathrm{L}u = \mathrm{L}(\varepsilon * f) = (\mathrm{L}\varepsilon) * f = \delta * f = f$$

Poznámka. 1. Výše uvedený postup bude fungovat i pro parciální diferenciální operátory.

2. Vidíme nezastupitelnou roli klíčových pojmů z teorie zobecněných funkcí: Diracova delta funkce, konvoluce, zobecněná derivace.

3. První otázkou zůstává, jaký je vztah klasické diferenciální úlohy a diferenciální úlohy v $\mathscr{D}'$ (Řešení v $\mathscr{D}'$ je v jakém vztahu ke klasickému řešení? Jak je tomu s počátečními, případně okrajovými podmínkami?).

4. Druhou otázkou je, jak nalézt ono fundamentální řešení.

Na první otázku odpovíme po druhé. Uvidíme, že budeme schopni nalézt fundamentální řešení pomocí integrálních transformací (Fourierova a Laplaceova transformace), a to v jejich zobecněné podobě. Poznamenejme, že u obyčejných diferenciálních operátorů lze fundamentální řešení nalézt jednodušeji, jak si ukážeme později. Tímto zkompletujeme všechny potřebné nástroje pro řešení diferenciálních rovnic.

Kapitola 3

Integrální transformace

Vybudovali jsme prostor zobecněných funkcí a směřujeme k řešení parciálních diferenciálních rovnic. V této kapitole se budeme věnovat integrálním transformacím, konkrétně Fourierově a Laplaceově transformaci, které budeme chtít použít pro hledání fundamentálního řešení. Je tedy třeba zobecněné funkce vybavit integrálními transformacemi. Uvidíme však, že kvůli nim je třeba zúžit pojem zobecněných funkcí.

Integrální transformace jsou díky svým vlastnostem i z jiných důvodů velmi mocným a užitečným nástrojem, a proto nalézají mnoho uplatnění. Jmenujme například jakékoli zpracovávání signálu, kde rozklad do frekvencí umožňuje zcela nový pohled na studovaný problém, nástroj analytického řešení pro lineární úlohy či přímo konstrukce numerických metod (např. Fast Fourier Transform)[1].

3.1 Motivace

Na následujících několika řádcích a příkladech se pokusíme objasnit, proč je třeba revidovat naši definici zobecněných funkcí. Jelikož potřebujeme zavést zobecněnou Fourierovu transformaci, potřebujeme, jako ve všech předchozích zobecněných operacích, aby klasická operace zobrazovala z prostoru testovacích funkcí zpět do testovacích funkcí. Zde však narazíme na problém.

Definice 3.1.1. *Fourierova transformace* $\mathfrak{F}$ je následující zobrazení z prostoru $L^1(\mathbb{R}^n)$: pro $f \in L^1$ definujeme

$$\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Poznámka. Ukažme si některé vlastnosti této transformace.

1. *$\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi)$ je omezená funkce na $\mathbb{R}^n$*

   Důkaz. Stačí vyjít z definice:

   $$\left|\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left|e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\right|}_{=1} \left|f(x)\right| \mathrm{d}x < +\infty$$

   □

2. *Nosič* $\operatorname{supp}\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi)$ *není omezený ani pro funkci s omezeným nosičem.*

   Tuto vlastnost ukážeme na konkrétním příkladě. Za funkci $f(x)$ volme charakteristickou funkci intervalu $[0,1]$, tzn. $\chi_{[0,1]}(x)$. Pak

   $$\mathfrak{F}\left[\chi_{[0,1]}\right](\xi) = \int_0^1 e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x = \frac{1}{\xi}\sin\xi - \frac{\mathrm{i}}{\xi}(\cos\xi - 1),$$

[1] Vřele doporučuji shlédnout video o Fourierove transformaci na kanálu 3blue1brown v rámci Youtube.

což je jistě funkce nemající omezený nosič.

3. Je-li $f \in L^1$, pak odtud neplyne, že $\mathfrak{F}[f(x)](\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

   Uvažme stejný protipříklad jako v předchozím bodě.

Problémem tedy je, že Fourierův obraz funkce z L^1 není zpět v L^1, a zejména pak, že obraz testovací funkce není testovací (takovýto protipříklad jsme explicitně neposkytli, ale čtenář si doplní). Neumíme tedy standardním způsobem rozšířit klasickou Fourierovu transformaci do zobecněných funkcí. Ukazuje se, že správnou opravou je místo opravy integrální transformace upravit prostor testovacích funkcí (zejména slevit z požadavku na omezenost nosiče) a zavést standardním způsobem rozšíření Fourierovy transformace na získané upravené zobecněné funkce.

3.2 Schwartzův prostor a prostor temperovaných zobecněných funkcí

Definice 3.2.1. Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reálná funkce. Pak tuto funkci nazveme

1. **rychle klesající**, právě když $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ platí, že $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|x^\alpha f(x)\| < +\infty$ (tj. klesají rychleji než libovolný polynom);
2. **pomalu rostoucí**, právě když $\exists \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ takové, že $\lim_{\|x\| \to +\infty} \left\| \frac{f(x)}{x^\alpha} \right\| < +\infty$ (f může růst do nekonečna, ale je dominovaná nějakým polynomem).

Definice 3.2.2. O funkci f řekneme, že je prvkem **Schwartzova prostoru** $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, právě když jsou splněny tyto podmínky

1. $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$;
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \quad \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < +\infty$, tj. funkce a všechny její derivace jsou rychle klesající.

Poznámka. $\mathscr{S}$ je někdy též nazýván prostorem testovacích funkcí s otevřeným nosičem.

Poznámka. Právě o Schwartzově prostoru ukážeme, že je ten vhodný pro Fourierovu transformaci, totiž platí $\mathfrak{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$.

Poznámka. Uveďme si příklady funkcí ze Schwartzova prostoru.

1. $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$
2. $\varphi \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{D}$, $\varphi(x) = e^{-x^2}$
3. $\mathscr{S} \subset L^1$ Opět pro jednoduchost uvažme jednorozměrný případ. Využijeme faktu, že $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x$ konverguje pro všechna $\alpha > 1$. Uvažujme nyní $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Pak z vlastností funkcí z $\mathscr{S}$ plyne, že (volbou $\beta = 0$) $|x^\alpha \varphi(x)| < K_\alpha$ pro všechna x větší než nějaké hraniční $x_0(\alpha)$. Nyní speciálně volbou $\alpha = 2$ máme odhad $|\varphi(x)| \leq \frac{K}{x^2} \in L^1(x_0, +\infty)$. Využijeme této znalosti při odhadování naší funkce:

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} |\varphi(x)| \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{-R} |\varphi(x)| \mathrm{d}x + \int_{R}^{+\infty} |\varphi(x)| \mathrm{d}x < +\infty$$

   Nyní první člen můžeme snadno odhadnout, neboť $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ a integrujeme na kompaktu, tedy na množině, kde spojitá funkce nabývá svého maxima, a pro zbylé dva použijeme odhad výše.

Definice 3.2.3. Prostor lineárních spojitých funkcionálů nad $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ nazveme **prostorem temperovaných zobecněných funkcí (distribucí)** $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Řekneme, že posloupnost $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{S}$ **konverguje k** $\varphi \in \mathscr{S}$ **v** $\mathscr{S}$, označujeme $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi$, právě když

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \quad x^\alpha D^\beta \varphi_k \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} x^\alpha D^\beta \varphi.$$

Poznámka. Z lineární algebry víme, že duální prostory (což jsou veškeré lineární funkcionály nad daným prostorem) jsou v opačné relaci, totiž víme-li $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$, pak nutně máme $\mathscr{S}^\sharp \subset \mathscr{D}^\sharp\ \mathscr{S}$. Tedy zeslabením požadavků na testovací prostor (z $\mathscr{D}$ na $\mathscr{S}$) jsme zmenšili pojem zobecněných funkcí (z $\mathscr{D}'$ na $\mathscr{S}'$). Avšak v $\mathscr{S}'$ budeme schopni zavést zoběcněnou Fourierovu transformaci.

Lemma 3.2.4. Buďte $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$, $\varphi \in \mathscr{D}$ a nechť $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$. Pak $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi$.

Důkaz. Jelikož platí, že $\mathscr{S} \supset \mathscr{D}$, jsou $\varphi_k, \varphi \in \mathscr{S}$. Připomeňme, co znamená konvergence v $\mathscr{D}$. $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$, právě když $\exists R > 0$ takové, že $\forall k \in \mathbb{N}$ platí, že $\operatorname{supp}\varphi_k \subset B_R(0)$ a zároveň $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ platí, že $D^\alpha\varphi_k \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} D^\alpha\varphi$.

Chceme ukázat, že $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \quad x^\alpha D^\beta\varphi_k \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} x^\alpha D^\beta\varphi$. Protože nosiče φ_k jsou stejně omezené, můžeme odhadnout $|x^\alpha D^\beta(\varphi_k(x) - \varphi(x))| \le K_{\alpha,\beta,k}$. Jelikož však víme, že libovolná derivace stejnoměrně konverguje, můžeme získat společný odhad nezávislý na k, tj. $K_{\alpha,\beta,k} \le K_{\alpha,\beta} < +\infty$, a tedy tvrzení platí. $\square$

Bezprostředním důsledkem tohoto lemmatu je vztah $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$.

Lemma 3.2.5. $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$. To znamená, že $f \in \mathscr{S}' \Rightarrow f \in \mathscr{D}'$.

Poznámka. Díky inkluzi $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$ máme k dispozici veškeré operace zavedené na $\mathscr{D}'$ a není nutné tedy budovat nový zobecněný prostor (temperovaných distribucí). Jmenovitě máme okamžitě k dispozici derivaci, násobení hladkou funkcí, regulární transformaci, limitu, konvoluci a tenzorový součin. Co však není jasné, je, jestli $\mathscr{S}'$ je vůči těmto operacím uzavřený.

Věta 3.2.6. Prostor $\mathscr{S}'$ je uzavřen vůči výše jmenovaným operacím s výjimkou násobení hladkou funkcí. Vlastnosti těchto operací se zachovávají.

Důkaz. Důkazy jsou triviální opět kromě tenzorového součinu a konvoluce (viz [Šťovíček]). Doporučuji provést jako cvičení pochopení látky. $\square$

Násobení v $\mathscr{S}'$

Operace násobení hladkou funkcí tak, jak je definována na $\mathscr{D}'$, není v $\mathscr{S}'$ dobře použitelná. Připomeňme její definici. Násobení jsme definovali pro $a \in \mathcal{C}^\infty$, $f \in \mathscr{D}'$: $(a(x)\cdot f(x), \varphi(x)) := (f(x), a(x)\varphi(x))$, kde $a\varphi \in \mathscr{D}$, avšak nikoliv $a\varphi \in \mathscr{S}$. Protipříkladem je $a(x) = e^{x^2} \in \mathcal{C}^\infty$ a $\varphi(x) = e^{-x^2} \in \mathscr{S}$. Pak $a(x)\varphi(x) = 1 \notin \mathscr{S}$. Je třeba tedy ještě zúžit operaci násobení.

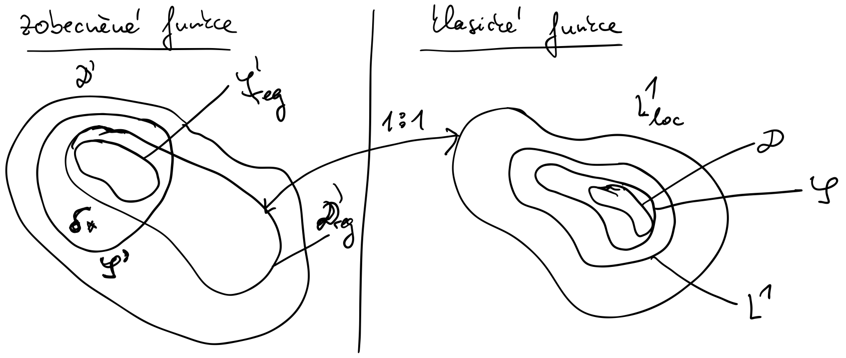
Věta 3.2.7. Buď $a \in \mathcal{C}^\infty$ a nechť je dále a pomalu rostoucí se všemi svými derivacemi, tj. $\forall\alpha$, $\exists c_\alpha, m_\alpha$ takové, že $|D^\alpha a(x)| \le c_\alpha(1+|x|)^{m_\alpha}$. Pak $af \in \mathscr{S}'$ pro libovolné $f \in \mathscr{S}'$, kde $(af, \varphi) = (f, a\varphi)$.

Důkaz. Je třeba opět ověřit spojitost, linearita je triviální. Ukažme tedy, že pro $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$ platí, že $(af, \varphi_k) \to 0$. Víme, že $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \quad x^\alpha D^\beta\varphi_k \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0$. Pokud ukážeme, že odtud plyne i $a\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$, pak dostáváme ze spojitosti f obsah tvrzení.

Je třeba tedy ukázat, že $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \quad x^\alpha D^\beta a\varphi_k \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0$. Stačí však užít Leibnitzovo pravidlo pro přepsání výrazů do podoby, odkud již stejnoměrná konvergence plyne ze znalosti $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \quad x^\alpha D^\beta\varphi_k \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0$. $\square$

Abychom ukončili diskuzi o vztahu temperovaných a zobecněných funkcí, musíme si ještě doplnit znalost ohledně klíčového vztahu těchto dvou variant zobecněných funkcí k funkcím klasickým. Uvažme zobecněnou regulární funkci $\widetilde{e^{x^2}}$. Aby bylo možno chápat klasickou funkci jako temperovanou distribuci $\widetilde{e^{x^2}} \in \mathscr{S}'$, musí vracet pro libovolnou $\varphi \in \mathscr{S}$ konečné číslo. Volme $\varphi(x) = e^{-x^2} \in \mathscr{S}$. Pak však

$$\left(\widetilde{e^{x^2}}, \varphi(x)\right) = \left(\widetilde{e^{x^2}}, e^{-x^2}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{x^2} e^{-x^2} \mathrm{d}x = +\infty$$



Obrázek 3.1: Shrnutí dosavadních poznatků o zobecněných funkcích a jejich souvislostí s klasickými funkcemi.

a tedy ne každá regulární zobecněná funkce je temperovanou distribucí. Zkusme nyní opačně nalézt, jaké temperované distribuce mají jednoznačný protějšek v klasických funkcích.

Určující je, jestli integrál reprezentující působení temperované distribuce je dobře definovaný na libovolnou funkci ze Schwartzova prostoru:

$$(\widetilde{f}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) < +\infty, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}.$$

Ukážeme, že postačující podmínkou je následující množina funkcí.

Definice 3.2.8. Řekneme, že funkce je regulární temperovanou distribucí $\widetilde{f} \in \mathscr{S}'_{reg}$ pokud generátor $f \in L^1_{loc}$ a navíc $\exists m \in \mathbb{N}_0$ takové, že $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^m} \mathrm{d}x < +\infty$.

Poznámka. Pak totiž lze ukázat, že $\mathscr{S}'_{reg} \subset \mathscr{D}'_{reg} \cap \mathscr{S}'$:

$$|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^m} |\varphi(x)|(1+|x|)^m \mathrm{d}x < +\infty,$$

jak plyne z vlastností funkcí ze Schwartzova prostoru.

Jak snadno nahlédneme, platí implikace $f \in L^1 \Longrightarrow \widetilde{f} \in \mathscr{S}'_{reg}$.

Podmínka pro regulární temperovanou distribuci je integrální, byť je zde patrná intuitivní (ale nepřesná) spojitost s pojmem pomalu rostoucích funkcí.

Nakonec poznamenejme, že integrální kritérium je pouze postačující podmínka pro náležitost do $\mathscr{D}'_{reg} \cap \mathscr{S}'$. Tedy dosavadní poznatky o vztazích klasických funkcí, distribucí a temperovaných distribucí lze shrnout do obrázku 3.1.

3.3 Fourierova transformace na $\mathscr{S}$

Fourierovu transformaci jsme již definovali a pár poznatků o ní získali. Připomeňme si, co již víme pro Fourierovu transformaci funkce $\varphi \in \mathscr{S}$:

1. $\mathfrak{F}[\varphi(x)](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x$. Někdy se pro zjednodušení zápisu značí obrazy integrálních transformací místo $\mathfrak{F}[\varphi(x)](\xi)$ pomocí $\widehat{\varphi}(\xi)$.

2. $\mathfrak{F}[\varphi(x)](\xi)$ je omezená, tzn. integrál konverguje absolutně;

3. Funkce $\mathfrak{F}[\varphi(x)](\xi)$ je spojitá, jelikož můžeme zaměňovat limitu a integrál.

Definice 3.3.1. **Částečnou Fourierovou transformaci** definujeme pro $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ analogickým způsobem:

$$\mathfrak{F}_x[\varphi(x,y)](\xi,y) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x,y)\mathrm{d}x.$$

Nyní si ukážeme slíbenou vlastnost, totiž že Schwartzův prostor bude vhodnou volbou pro zobecňování Fourierovy transformace do zobecněných funkcí.

Věta 3.3.2. Prostor $\mathscr{S}$ je invariantní vůči $\mathfrak{F}$, tj. $\mathfrak{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$.

Důkaz. Tvrzení dokážeme pro jednoduchost pouze pro $\mathbb{R}$.

1. Nejprve si uvědomíme, že pokud $\varphi \in \mathscr{S}$, pak také $x^p\varphi(x) \in \mathscr{S}$ pro $p \in \mathbb{N}$.

2. Derivace obrazu Fourierovy transformace: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi) = \mathfrak{F}\left[(\mathrm{i}x)\varphi(x)\right](\xi)$. Skutečně, stačí si uvědomit, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}x\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}(\mathrm{i}x)e^{\mathrm{i}x\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x = \mathfrak{F}\left[(\mathrm{i}x)\varphi(x)\right](\xi)\,,$$

   kde jsme využili prvního pozorování.

3. Fourierův obraz derivace: $\mathfrak{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\right](\xi) = (-\mathrm{i}\xi)\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi)$. Opět stačí upravit integrál

$$\mathfrak{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\right](\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}x\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\mathrm{d}x \overset{\text{pe pa}}{=} \underbrace{\left[e^{\mathrm{i}x\xi}\varphi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - (\mathrm{i}\xi)\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}x\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x = -(\mathrm{i}\xi)\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi)$$

   kde hraniční člen je nulový kvůli vlastnosti funkcí ze Schwartzova prostoru, totiž ubývají rychleji než libovolný polynom.

Chceme ukázat, že pokud $\varphi \in \mathscr{S}$, tak pak $\mathfrak{F}[\varphi(x)] \in \mathscr{S}$. Abychom toto ukázali, musíme ukázat, že $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \quad \sup_{\mathbb{R}}\left|\xi^\alpha D^\beta \mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi)\right| < +\infty$. Na výraz uvnitř závorek nejdříve použijeme pozorování z bodu 2 a 3

$$\left|\xi^\alpha D^\beta \mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi)\right| = \left|\xi^\alpha \mathfrak{F}\left[(\mathrm{i}x)^\beta\varphi(x)\right](\xi)\right| = \left|\mathfrak{F}\left[D_x^\alpha(x^\beta\varphi(x))\right](\xi)\right| < +\infty,$$

kde odhad plyne z uzavřenosti Schwartzova prostoru na derivace a násobení polynomem, tj. $D_x^\alpha(x^\beta\varphi(x)) \in \mathscr{S}$, a již víme, že $\mathfrak{F}$ je omezená na $\mathscr{S}$. □

3.3.1 Vlastnosti $\mathfrak{F}$ na $\mathscr{S}$

Nyní si postupně ukážeme různé užitečné vlastnosti Fourierovy transformace.

Věta 3.3.3.
1. Derivace obrazu Fourierovy transformace: $\frac{\partial}{\partial\xi_j}\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi) = \mathfrak{F}\left[(\mathrm{i}x_j)\varphi(x)\right](\xi)$.

2. Fourierův obraz derivace: $\mathfrak{F}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x)\right](\xi) = (-\mathrm{i}\xi_j)\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi)$.

3. Fourierova transformace jako zobrazení $\mathfrak{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ je spojité zobrazení (převádí konvergentní posloupnost na konvergentní).

   Důkaz. Uvažujeme posloupnost $\varphi_k(x) \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$ a ptáme se, jestli odtud plyne $\mathfrak{F}\left[\varphi_k(x)\right](\xi) \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$.

   Víme tedy, že $\forall \alpha, \beta \; x^\alpha D^\beta \varphi_k \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0$, a chceme ukázat, že také $\forall \alpha, \beta \; x^\alpha D^\beta \mathfrak{F}\left[\varphi_k(y)\right](x) \overset{\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} 0$. Tento poslední výraz umíme v absolutní hodnotě ze zjištěných vlastností přepsat na:

$$|x^\alpha D^\beta \mathfrak{F}\left[\varphi_k(y)\right](x)\,| = |\mathfrak{F}\left[\underbrace{D^\alpha(y^\beta\varphi_k(y))}_{\psi_k^{\alpha,\beta}(y)}\right](x)\,|.$$

Pak posloupnost $\psi_k^{\alpha,\beta}$ rovněž stejnoměrně konverguje k 0 na $\mathbb{R}^n$ z Leibnitzova pravidla. Nyní nám stačí prozkoumat, jestli posloupnost $\mathfrak{F}[\psi_k^{\alpha,\beta}]$ stejnoměrně konverguje k nule $\forall\alpha,\beta$. Máme tedy

$$\left|\mathfrak{F}\left[\psi_k^{\alpha,\beta}(y)\right](x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}yx}\psi_k^{\alpha,\beta}(y)\mathrm{d}y\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n}\left|\psi_k^{\alpha,\beta}(y)\right|\mathrm{d}y,$$

což je odhad nezávislý na x. Stačí tedy spočítat limitu tohoto integrálu a ukázat, že je nulová pro všechna α,β.

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\psi_k^{\alpha,\beta}(y)\right|\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n}\lim_{k\to+\infty}\left|\psi_k^{\alpha,\beta}(y)\right|\mathrm{d}y = 0,$$

jak plyne ze stejnoměnré konvergence $\psi_k^{\alpha,\beta}$, $\forall\alpha,\beta$, pokud lze zaměnit limitu a integrál. Zde si nevystačíme se stejnoměrnou konvergencí funkční posloupnosti, jelikož integrační množina není kompaktní. Musíme tedy opatrněji. Zvolme $m\in\mathbb{N}_0$ takové, že $\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-m}\mathrm{d}x < +\infty$. Pak už integrabilní majorantu zajistíme, poněvadž

$$\left|\psi_k^{\alpha,\beta}(y)\right| = \underbrace{(1+|y|)^m\left|\psi_k^{\alpha,\beta}(y)\right|}_{K_k^{\alpha,\beta}\leq K^{\alpha,\beta}}\underbrace{\frac{1}{(1+|y|)^m}}_{\in L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

□

4. Nechť $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ a $b\in\mathbb{R}^n$. Pak

$$\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi+b) = \mathfrak{F}\left[e^{\mathrm{i}bx}\varphi(x)\right](\xi)\,;$$

5. Nechť $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ a $b\in\mathbb{R}^n$. Pak

$$e^{\mathrm{i}b\xi}\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi) = \mathfrak{F}\left[\varphi(x-b)\right](\xi)\,;$$

6. Nechť $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ a $c\in\mathbb{R}$. Pak

$$\mathfrak{F}\left[\varphi(cx)\right](\xi) = \frac{1}{|c|^n}\mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right]\left(\frac{\xi}{c}\right).$$

7. O částečné Fourierově transformaci. Platí

   (a)
   $$\mathfrak{F}_x\circ\mathfrak{F}_y = \mathfrak{F}_y\circ\mathfrak{F}_x = \mathfrak{F};$$

   (b)
   $$D_\xi^\alpha\mathfrak{F}_x\left[\varphi(x,y)\right](\xi,y) = \mathfrak{F}_x\left[(\mathrm{i}x)^\alpha\varphi(x,y)\right](\xi,y);$$

   (c)
   $$\mathfrak{F}_x\left[D_x^\alpha\varphi(x,y)\right](\xi,y) = (-\mathrm{i}\xi)^\alpha\mathfrak{F}_x[\varphi(x,y)](\xi,y).$$

   Tvrzení je důsledkem Fubiniovy věty.

8. Fourierova transformace převádí konvoluci na násobení. Buďte $\varphi,\psi\in\mathscr{S}$. Pak

$$\mathfrak{F}\left[\varphi*\psi\right](\xi) = \mathfrak{F}\left[\varphi(x)\right](\xi)\cdot\mathfrak{F}\left[\psi(x)\right](\xi)\,.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[\varphi * \psi](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}(\varphi * \psi)(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x\ e^{\mathrm{i}x\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\ \varphi(y)\psi(x-y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(y)\psi(x-y) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z\ e^{\mathrm{i}(y+z)\cdot\xi}\varphi(y)\psi(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}y\cdot\xi}\varphi(y)\mathrm{d}y \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}z\cdot\xi}\psi(z)\mathrm{d}z = \mathfrak{F}[\varphi(x)](\xi)\cdot\mathfrak{F}[\psi(x)](\xi)\,.\end{aligned}$$

Užili jsme Fubiniovu větu ($\varphi, \psi \in \mathscr{S} \subset L^1$) a substituci $x - y = z$. □

9. Buďte $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathfrak{F}[\psi(y)](x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}[\varphi(y)](x)\,\psi(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathfrak{F}[\psi(y)](x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ \varphi(x) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\ e^{\mathrm{i}y\cdot x}\psi(y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ \psi(x) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\ e^{\mathrm{i}y\cdot x}\varphi(y) = \\ = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}[\varphi(y)](x)\,\psi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

10. Fourierova transformace je bijekce na $\mathscr{S}$. Navíc inverze je v podobná doprednému zobrazení. Totiž platí, že $\mathfrak{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ je bijekce a navíc platí, že $\mathfrak{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n}\bar{\mathfrak{F}}$, kde

$$\bar{\mathfrak{F}}[\varphi(x)](\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz z jistých důvodů provedeme až po zavedení zobecněné Fourierovy transformace.

11. Buď $\varphi \in \mathscr{S}$. Pak $\lim_{\xi\to+\infty} \mathfrak{F}[\varphi(x)](\xi) = 0$.

Tvrzení věty je obsahem Riemann-Lebesgueova lemmatu z klasické analýzy.

Poznámka. Zkuste se zamyslet nad obsahem sdělení v 9. bodě: jak je v tomto případě možné zeslabit předpoklady na funkce φ, ψ? Není nutné, aby $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$. [2]

V literatuře se můžete setkat s jinými definicemi Fourierovy transformace. Důvodem je právě ona blízkost inverze k Fourierově transformaci. Některé prameny užívají inverzi jako definici dopředné Fourierovy transformace, jiné přidávají i normalizační konstantu $1/(2\pi)^{n/2}$. Jak se v těchto situacích pozmění vlastnosti Fourierovy transformace je přímočaré a přenecháváme čtenáři.

Příklad

Spočtěme Fourierovu transformaci Gaussovy funkce.

$$\mathfrak{F}\left[e^{-x^2}\right](\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}x\xi}e^{-x^2}\mathrm{d}x = e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-\frac{\mathrm{i}\xi}{2})^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

Poznamenejme, že v poslední rovnosti užíváme poznatku z komplexní analýzy, že integrál z holomorfní funkce e^{-z^2} po rovnoběžce s reálnou osou je totožný s integrálem přes reálnou osu. Vřele doporučuji si připomenout (tohoto pozorování lze též dosáhnout pomocí integrálu s parametrem, kdy získáme diferenciální rovnici prvého řádu.)

Užijeme ještě poznatek o škálování argumentu transformované funkce,

$$\mathfrak{F}\left[e^{-(cx)^2}\right](\xi) = \frac{1}{c}\mathfrak{F}\left[e^{-x^2}\right]\left(\frac{\xi}{c}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{c}e^{-\frac{\xi^2}{4c^2}}.$$

Zvolíme-li za $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dostáváme $\mathfrak{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right](\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Tedy našli jsme vlastní funkci operátoru $\mathfrak{F}$ a jemu příslušné vlastní číslo.

[2] Je jen třeba splnit předpoklady Fubiniovy věty, která je v důkazu použita.

3.4 Fourierova transformace na $\mathscr{S}'$

3.4.1 Motivace

Uvažujme funkci $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pak už víme, že existuje $\mathfrak{F}[f(x)](\xi)$, která je omezená a spojitá. Díky omezenosti je ale funkce $\frac{1}{1+\xi^2}\mathfrak{F}[f(x)](\xi) \in L^1(\mathbb{R})$. Pak ale můžeme tvrdit (dokonce jsme to tímto krokem ukázali), že funkce $\mathfrak{F}[f(x)](\xi)$ je pomalu rostoucí. Tudíž funkce $\mathfrak{F}[\widetilde{f(x)}](\xi) \in \mathscr{S}'_{reg}$. Tohoto využijeme.

Buď tedy $\varphi \in \mathscr{S}$ a nechť $\mathfrak{F}[\widetilde{f(x)}](\xi) \in \mathscr{S}'_{reg}$. Pak

$$(\mathfrak{F}[\widetilde{f(x)}](\xi), \varphi(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{F}[\widetilde{f(x)}](\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\xi \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x\ e^{\mathrm{i}x\xi} f(x)\varphi(\xi) \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x\ f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\xi\ e^{\mathrm{i}x\xi}\varphi(\xi) \right) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathfrak{F}[\varphi(\xi)](x)\,\mathrm{d}x = (f(x), \mathfrak{F}[\varphi(\xi)](x)).$$

Ona poslední rovnost vychází právě z výše ukázaného.

Definice 3.4.1. Buď $f \in \mathscr{S}'$. Pak **Fourierovou transformací temperované distribuce** f rozumíme:

$$(\mathfrak{F}[f], \varphi) := (f, \mathfrak{F}[\varphi])\ \forall \varphi \in \mathscr{S}.$$

Poznámka. Z Fourierovy transformace klasických funkcí plyne rozumnost definice, jelikož $\varphi \in \mathscr{S} \Rightarrow \mathfrak{F}[\varphi(x)](\xi) \in \mathscr{S}$. Dále pak z její spojitosti plyne fakt, že $\mathfrak{F}[f] \in \mathscr{S}'$ jakmile $f \in \mathscr{S}'$. Totiž ze spojitosti $\mathfrak{F}$ jakožto zobrazení na $\mathscr{S}$ víme, že převede libovolnou konvergentní posloupnost φ_k na konvergentní posloupnost $\mathfrak{F}[\varphi_k]$. Díky spojitosti f víme, že $(f, \mathfrak{F}[\varphi_k])$ bude konvergentní číselná posloupnost. Tímto jsme ale dokázali, že $\mathfrak{F}[f]$ je spojitý funkcionál na $\mathscr{S}$. Je zjevně rovněž lineární, tedy jsme ukázali, že $\mathfrak{F}[f] \in \mathscr{S}'$. Tedy $\mathfrak{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$.

Fourierovu transformaci jsme již zavedli na $\mathscr{S}$, L^1 a $\mathscr{S}'$, kde víme, že $\mathscr{S} \subset L^1 \subset \mathscr{S}'$. Tedy zavedení Fourierovy transformace na $\mathscr{S}'$ nám umožní výpočet transformací funkcí, které klasický obraz nemají, například $\Theta(x) \in \mathscr{S}' \setminus L^1$.

Spočtěme Fourierův obraz Diracovy δ-funkce. Je zřejmé, že $\delta_{x_0} \in \mathscr{S}'$ a platí

$$(\mathfrak{F}[\delta_{x_0}], \varphi(\xi)) = (\delta_{x_0}, \mathfrak{F}[\varphi(\xi)](x)) = \mathfrak{F}[\varphi(\xi)](x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\Big|_{x=x_0} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x_0\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = (\widetilde{e^{\mathrm{i}x_0\xi}}, \varphi).$$

Tedy jsme nalezli Fourierův obraz Diracovy delta funkce:

$$\mathfrak{F}[\delta_{x_0}](\xi) = e^{\mathrm{i}x_0\xi}, \quad \text{a speciálně tedy } \mathfrak{F}[\delta](\xi) = 1.$$

Všimněme si, že Fourierova transformace převedla jednobodový nosič na celé $\mathbb{R}^n$, což opět dokládá probém, na který jsme narazili při diskuzi zavedení Fourierovy transformace na testovacích funkcích a následně upuštění od požadavku na omezený nosič (motivace pro zavedení Schwartzova prostoru).

Definice 3.4.2. Částečnou Fourierovu transformaci definujeme pro $\forall f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ a $\forall \varphi \in \mathscr{S}(R^{n+m})$ jako:

$$(\mathfrak{F}_x[f(x,y)](\xi, y), \varphi(\xi, y)) := (f(x,y), \mathfrak{F}_\xi[\varphi(\xi,y)](x,y)).$$

3.4.2 Vlastnosti $\mathfrak{F}$ na $\mathscr{S}'$

Následující část bude věnována vlastnostem Fourierovy transformace na $\mathscr{S}'$. Tvrzení jsou analogická jako v případě transformace klasických funkcí. Jejich základním principem je využití „komplementární“ vlastnosti u funkcí z $\mathscr{S}$.

1. Derivace obrazu Fourierovy transformace: $\frac{\partial}{\partial \xi_j}\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi) = \mathfrak{F}\left[(\mathrm{i}x_j)f(x)\right](\xi)$.

   Důkaz. Buď $\varphi \in \mathscr{S}$ libovolné. Pak

$$\begin{aligned}(D^\alpha_\xi \mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi)\,,\varphi(\xi)) &= (-1)^{|\alpha|}(\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi)\,, D^\alpha_\xi\varphi(\xi)) = (-1)^{|\alpha|}(f(x), \mathfrak{F}\left[D^\alpha_\xi\varphi(\xi)\right](x)) = \\ &= (-1)^{|\alpha|}(f(x), (-\mathrm{i}x)^\alpha\mathfrak{F}\left[\varphi(\xi)\right](x)) = (f(x)(\mathrm{i}x)^\alpha, \mathfrak{F}\left[\varphi(\xi)\right](x)) = (\mathfrak{F}\left[(\mathrm{i}x)^\alpha f(x)\right](\xi)\,,\varphi(\xi)).\end{aligned}$$

   □

2. Fourierův obraz derivace: $\mathfrak{F}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)\right](\xi) = (-\mathrm{i}\xi_j)\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi)$. Tvrzení se dokáže analogicky jako v předchozím případě.
3. Fourierova transformace jako zobrazení $\mathfrak{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ je spojité zobrazení. Důkaz je narozdíl od klasické varianty triviální a přenecháváme čtenáři.
4. Nechť $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ a $b \in \mathbb{R}^n$. Pak
$$\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi + b) = \mathfrak{F}\left[e^{\mathrm{i}bx}f(x)\right](\xi)\,.$$
5. Nechť $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ a $b \in \mathbb{R}^n$. Pak
$$e^{\mathrm{i}b\xi}\mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi) = \mathfrak{F}\left[f(x-b)\right](\xi)\,.$$
6. Nechť $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak
$$\mathfrak{F}\left[f(cx)\right](\xi) = \frac{1}{|c|^n}\mathfrak{F}\left[f(x)\right]\left(\frac{\xi}{c}\right).$$
7. O částečné Fourierově transformaci. Platí
   (a)
$$\mathfrak{F}_x \circ \mathfrak{F}_y = \mathfrak{F}_y \circ \mathfrak{F}_x = \mathfrak{F},$$
   (b)
$$\mathfrak{F}_x[f(x)\otimes g(y)](\xi, y) = \mathfrak{F}_x[f(x)](\xi)\otimes g(y),$$
   (c)
$$\mathfrak{F}_y[f(x)\otimes g(y)](x, \eta) = f(x)\otimes \mathfrak{F}_y[g(y)](\eta),$$
   (d)
$$\mathfrak{F}\left[f(x)\otimes g(y)\right](\xi, \eta) = \mathfrak{F}_x[f(x)](\xi)\otimes \mathfrak{F}_y[g(y)](\eta).$$

Nyní spočítáme Fourierův obraz $\mathfrak{F}[1]$ s tím, že již víme $\mathfrak{F}[\delta] = 1$ a tedy, jak pozorný čtenář tuší, poslouží nám v následujícím tvrzení k nalezení inverze Fourierovy transformace, a to jak klasických, tak temperovaných zobecněných funkcí.

Jelikož $\mathfrak{F}$ je lineární jak v $\mathscr{S}$, tak i v $\mathscr{S}'$, tak lze takto vyjádřit nulu pomocí Fourierovy transformace:
$$0 = \mathfrak{F}\left[0\right](\xi) = \mathfrak{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1\right](\xi) = (-\mathrm{i}\xi)\mathfrak{F}\left[1\right](\xi)\,.$$
Nyní se odvoláme na větu 2.4.4 z předešlé kapitoly, která nám poskytuje řešení právě tohoto algebraického problému. Totiž pokud $0 = xf(x)$ v $\mathscr{D}'$, pak $f(x) = C\delta(x)$. Tedy již víme, že $\mathfrak{F}[1] = C\delta$ a zbývá pouze určit konstantu c vhodnou volbou testovací funkce, jejíž Fourierův obraz umíme spočítat:

$$(\mathfrak{F}[1](\xi), e^{-\xi^2}) = (c\delta(\xi), e^{-\xi^2}) = c = (1, \mathfrak{F}\left[e^{-\xi^2}\right](x)) = \sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\sqrt{4\pi} = 2\pi.$$

Dostáváme tedy
$$\mathfrak{F}\left[1\right](\xi) = 2\pi\delta(\xi).$$

8. Fourierova transformace je bijekce na $\mathscr{S}'$. Navíc inverze je v podobná dopřednému zobrazení. Totiž platí, že $\mathfrak{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ je bijekce a navíc platí, že $\mathfrak{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\mathfrak{F}}$, kde $(\overline{\mathfrak{F}}[f], \varphi) = (f, \overline{\mathfrak{F}}[\varphi])$.

Důkaz. Předpokládejme pro jednoduchost jednorozměrný případ. Nejprve si však doplníme slíbený důkaz analogického tvrzení o klasických funkcích. Důkaz je nyní s pomocí dosavadních poznatků překvapivě jednoduchý a elegantní. Všimněte si, že díky nezávislému výpočtu Fourierova obrazu jednotky není důkaz v kruhu. Zobecněná varianta bude pak již jednoduchá.

i) v $\mathscr{S}$: Je třeba ukázat, že $\mathfrak{F}\overline{\mathfrak{F}} = \overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F} = (2\pi)^n id_{\mathscr{S}}$ (obě rovnosti, jelikož prostor funkcí, na kterém operátor působí, je prostorem nekonečné dimenze). Jelikož však máme prozrazen výsledek, stačí rovnost ověřit.

Nejprve si upravme výraz $\overline{\mathfrak{F}}[\varphi(\xi)](x)$:

$$\overline{\mathfrak{F}}[\varphi(\xi)](x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}x\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\eta}\varphi(-\eta)\mathrm{d}\eta = \mathfrak{F}\left[\varphi(-\eta)\right](x)\,.$$

Ověříme rovnost:

$$\mathfrak{F}\left[\overline{\mathfrak{F}}[\varphi(\xi)](x)\right](y) = \mathfrak{F}\left[\mathfrak{F}\left[\varphi(-\eta)\right](x)\right](y) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}xy}\mathfrak{F}\left[\varphi(-\eta)\right](x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}\left[\varphi(y-\eta)\right](x)\,\mathrm{d}x,$$

kde jsme v posledním kroku užili vlastnosti o posunu argumentu obrazu. Nyní s výhodou využijeme přepisu do Fourierovy transformace zobecněné funkce a znalosti obrazu jednotky:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}\left[\varphi(y-\eta)\right](x)\,\mathrm{d}x = (1, \mathfrak{F}\left[\varphi(y-\eta)\right](x)) = \left(\mathfrak{F}\left[1\right](\eta)\,, \varphi(y-\eta)\right) = \\ = (2\pi\delta(\eta), \varphi(y-\eta)) = 2\pi\varphi(y).\end{aligned}$$

Druhá rovnost se ukáže analogicky.

ii) v $\mathscr{S}'$: Nyní je třeba ukázat, že $\mathfrak{F}\overline{\mathfrak{F}} = \overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F} = (2\pi)^n id_{\mathscr{S}'}$. Snadno již ukážeme zmiňovanou rovnost:

$$\begin{aligned}((\mathfrak{F}\overline{\mathfrak{F}}[f])(y), \varphi(y)) = (\overline{\mathfrak{F}}[f](x), \mathfrak{F}\left[\varphi(y)\right](x)) = (f(\xi), \overline{\mathfrak{F}}[\mathfrak{F}[\varphi(y)](x)](\xi)) = \\ = (f(\xi), (2\pi)^n id_{\mathscr{S}}\varphi(\xi)) = (2\pi)^n (f, \varphi).\end{aligned}$$

Druhá rovnost se ukáže analogicky.

□

9. Fourierova transformace převádí konvoluci na násobení v případě funkcí s kompaktním nosičem. Buďte $f, g \in \mathscr{S}'$ s kompaktním nosičem. Pak

$$\mathfrak{F}\left[f * g\right](\xi) = \mathfrak{F}\left[f(x)\right](\xi) \cdot \mathfrak{F}\left[g(x)\right](\xi)\,.$$

Důkaz. Důkaz bude proveden jen z části. Opírá se o netriviální pozorování, které uvedeme bez důkazu (zájemce odkazujeme na [Vladimirov sect 9.4,9.5.] či [Šťovíček]):

Lemma 3.4.3. Buď $g \in \mathscr{S}'$ funkce s kompaktním nosičem. Pak $\mathfrak{F}\left[g(y)\right](\xi)$ je funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$, která je pomalu rostoucí se všemi derivacemi.

Poznamenejme, že důsledkem tohoto lemmatu je i $\mathfrak{F}\left[g(x)\right](\xi) \in \mathscr{S}'_{reg}$.

Obsah tvrzení nyní získáme již snadno:

$$(\mathfrak{F}[f*g](\xi),\varphi(\xi)) = ((f*g)(x),\mathfrak{F}[\varphi(\xi)](x)) = (f(x),(g(y),\mathfrak{F}[\varphi(\xi)](x+y))) = \\ = (f(x),(g(y),\mathfrak{F}\left[e^{ix\xi}\varphi(\xi)\right](y))) = (f(x),(\mathfrak{F}[g(y)](\xi),e^{ix\xi}\varphi(\xi))).$$

Nyní upravme vnitřní závorku pomocí zmiňovaného lemma:

$$(\mathfrak{F}[g(y)](\xi),e^{ix\xi}\varphi(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{F}[g](\xi)\,e^{ix\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = \mathfrak{F}[\mathfrak{F}[g](\xi)\,\varphi(\xi)](x)\,.$$

Dohromady tedy máme

$$(\mathfrak{F}[f*g](\xi),\varphi(\xi)) = (f(x),\mathfrak{F}[\mathfrak{F}[g](\xi)\,\varphi(\xi)](x)) = (\mathfrak{F}[f](\xi),\mathfrak{F}[g](\xi)\,\varphi(\xi)) = (\mathfrak{F}[f]\cdot\mathfrak{F}[g],\varphi),$$

kde jsme v poslední rovnosti opět využili lemma. □

3.5 Klasická Laplaceova transformace

V této kapitole se budeme věnovat Laplaceově transformaci, což je opět integrální transformace s exponenciálním jádrem. Tedy, jak lze nahlédnout, opět převádění derivací na násobení nezávislou proměnnou, jako tomu bylo u Fourierovy transformace, bude platit.

Definice 3.5.1. Mějme f měřitelnou na $\mathbb{R}^+$, která je maximálně exponenciálního růstu, tj. existují $c \geq 0$ a $a \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(t)| \leq ce^{at}$ pro skoro všechna t. Klasickou Laplaceovou transformací funkce f rozumíme

$$\mathfrak{L}[f(t)](p) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t, \text{ pro } p\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(p)>a.$$

Poznámka. Požadavky na funkci f vycházejí z postačující podmínky konvergence integrálu. Zkoumejme tedy, pro jaká $p \in \mathbb{C}$ je výraz $\mathfrak{L}[f(t)](p)$ dobře definovaný:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^+} e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\mathrm{Re}(p)t}|f(t)|\mathrm{d}t \leq c\int_{\mathbb{R}^+} e^{-\mathrm{Re}(p)t}e^{at}\mathrm{d}t = c\int_{\mathbb{R}^+} e^{-(\mathrm{Re}(p)-a)t}\mathrm{d}t < +\infty,$$

kde poslední nerovnost je splněna právě na předeslané polorovině $\mathrm{Re}(p) > a$.

Zkoumejme ještě odhad derivace integrandu:

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}e^{-pt}f(t)\right| = \left|(-t)^n f(t)e^{-pt}\right| \leq c|t^n|e^{at-\mathrm{Re}(p)t} \in L^1(\mathbb{R}^+) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(p) > a,$$

což znamená, že jsme nalezli integrabilní majorantu derivace, a tedy lze zaměňovat limitu a integrál na oboru konvergence Laplaceovy transformace.

Nyní zformulujeme vlastnosti Laplaceovy transformace (jejich pořadí odpovídá řazení u Fourierovy transformace, aby šlo vlastnosti snadno porovnat, viz konec této kapitoly):

Věta 3.5.2 (Vlastnosti Laplaceovy transformace)**.** Buď f funkce s vlastnostmi potřebnými pro Laplaceovu transformaci, pak

1. Derivace obrazu: $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\mathfrak{L}[f(t)](p) = \mathfrak{L}[(-t)^n f(t)](p)\,;$
2. Obraz derivace: $\mathfrak{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right](p) = p\mathfrak{L}[f(t)](p) - f(0^+);$
3. Neplatí, že $\mathfrak{L} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ a ani není $\mathfrak{L}$ spojité zobrazení;
4. Posun argumentu obrazu: $\mathfrak{L}[f(t)](p-b) = \mathfrak{L}\left[e^{bt}f(t)\right](p)\,;$

5. Posun argumentu transformované funkce: $e^{\alpha p}\mathfrak{L}\left[f(t)\right](p) = \mathfrak{L}\left[f(t+\alpha)\right](p)$;
6. Škálování argumentu: $\mathfrak{L}\left[f(ct)\right](p) = \frac{1}{c}\mathfrak{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{p}{c}\right)$;
7. Laplaceova transformace je zavedena jen pro funkce jedné proměnné, tedy částečná Laplaceova transformace nemá smysl;
8. Konvoluce je převedená na násobení: $\mathfrak{L}\left[f(t) * g(t)\right](p) = \mathfrak{L}\left[f(t)\right](p) \cdot \mathfrak{L}\left[g(t)\right](p)$;
9. Integrální identita: $\int_0^{+\infty} f(t)\mathfrak{L}\left[g(\tau)\right](t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathfrak{L}\left[f(\tau)\right](t)\,g(t)\mathrm{d}t$;
10. Integrál jakožto limita Laplaceova obrazu: $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0^+} \mathfrak{L}\left[f(t)\right](p)$;
11. Obraz primitivní funkce: $\mathfrak{L}\left[\Theta(t)\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right](p) = \frac{1}{p}\mathfrak{L}\left[f(t)\right](p)$;
12. Primitivní funkce obrazu: $\mathfrak{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p) = \int_p^{+\infty} \mathfrak{L}\left[f(t)\right](q)\,\mathrm{d}q$ pro $p \in \mathbb{R}$ a $p > a$.

Důkaz. Důkazy jsou vskutku jednoduché a hlavně analogické těm z Fourierovy transformace, kromě posledních dvou vlastností, které analogii ve Fourierově transformaci nemají. Ukážeme jen ta tvrzení, která jsou odlišná:

2. (obraz derivace).

$$\mathfrak{L}\left[\dot{f}(t)\right](p) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-pt}\dot{f}(t)\mathrm{d}t = \left[e^{-pt}f(t)\right]_0^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}^+}(-p)e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t =$$
$$= p\mathfrak{L}\left[f(t)\right](p) - \lim_{t\to 0^+} e^{-pt}f(t) = p\mathfrak{L}\left[f(t)\right](p) - f(0^+).$$

11. a 12. (obraz primitivní funkce) Stačí si přepsat z definice levou a pravou stranu a využít znalosti derivace primitivní funkce při užití metody per partes.

□

Poznámka. Druhá vlastnost, kvůli přítomnosti dodatečného členu, je důležitým rozdílem oproti Fourierově transformaci. Umožňuje totiž zahrnout počáteční podmínky při hledání řešení diferenciální rovnice. Jak uvidíme ke konci semestru, tato skutečnost umožňuje hledat analytická řešení i pro smíšené úlohy, a to i přes skutečnost, že inverzní Laplaceova transformace je složitější než tomu bylo u Fourierovy transformace.

Příklad

Řešme pomocí Laplaceovy transformace úlohu:

$$\dot{u} + 4u = 1 \text{ s počáteční podmínkou } u(0) = 1 \tag{3.1}$$

Pro jednoduchost zápisu budeme označovat $\mathfrak{L}[u] = \hat{u}$. Aplikací Laplaceovy transformace na levou a pravou stranu rovnice 3.1 z linearity máme:

$$\mathfrak{L}\left[\dot{u} + 4u\right](p) = \mathfrak{L}\left[\dot{u}\right](p) + 4\mathfrak{L}\left[u\right](p) = p\hat{u} - u(0^+) + 4\hat{u} = p\hat{u} + 4\hat{u} - 1$$
$$\mathfrak{L}\left[1\right](p) = \left(\mathfrak{L}\left[\Theta(x)\right](p)\right),$$

kde obraz pravé strany získáme přímou integrací či z vlastností $\mathfrak{L}\left[\dot{1}\right](p) = 0 = p\mathfrak{L}\left[1\right](p) - 1$.

Dostali jsme tedy snadnou algebraickou rovnici pro obraz řešení

$$p\hat{u} + 4\hat{u} + 1 = \frac{1}{p} \Rightarrow \hat{u} = \left(\frac{1}{p} + 1\right)\frac{1}{p+4} = \frac{p+1}{p(p+4)}.$$

Nyní stačí nalézt vzor Laplaceova obrazu $\hat{u} = \frac{p+1}{p(p+4)}$. Pro tyto účely (po rozkladu na parciální zlomky) si uvědomíme, jaké jsou vzory funkcí $\frac{1}{p}$ a $\frac{1}{p-\alpha}$. Již víme, že

$$\frac{1}{p} = \mathfrak{L}\,[1](p)$$

a z vlastností určíme i druhý vzor:

$$\frac{1}{p-\alpha} = \mathfrak{L}\,[1](p-\alpha) = \mathfrak{L}\left[e^{\alpha t}\right](p)\,.$$

Nakone díky linearitě máme:

$$u(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{p+1}{p(p+4)}\right](t) = \frac{1}{4}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right](t) + \frac{3}{4}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+4}\right](t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-4t}.$$

Poznámka. Výpočet vzoru funkce při Laplaceově transformaci je obecně obtížný, ale užitím vlastností a znalostmi několika obrazů základních funkcí budeme schopni hledat vzory k řešením lineárních obyčejných diferenciálních rovnic, jak lze snadno nahlédnout. Jaké funkce to jsou? A jak se tato skutečnost liší pro Fourierovu transformaci?

Je dobré poznamenat, že existuje příručka s obsáhlým soupisem obrazů funkcí při různých integrálních transformací a vřele jí doporučuji jakožto zdroj pro výpočet analytických řešení [Tables of Integral Transform, Bateman manuscript project, Caltech, 1954, McGraw Hill].

Věta 3.5.3 (o inverzní Laplaceově transformaci)**.** Buď $F(p)$ funkce komplexní proměnné a buď $c \in \mathbb{R}$ bod, který náleží oboru konvergence $F(p)$ a buď dále c větší než reálná část všech singularit funkce $F(p)$. Pak platí

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(p)](t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\mathbb{R}} F(p)e^{pt}\mathrm{d}p,$$

kde $c - \mathrm{i}\mathbb{R}$ označuje přímku procházející bodem c, která je rovnoběžná s imaginární osou komplexní roviny.

Důkaz. Důkaz uveden například ve [Šťovíček]. □

Poznámka. Speciálně, pokud leží veškeré singularity funkce F v levé polorovině komplexní roviny, je možné volit $c = 0$ a provádět integraci pro p ryze imaginární. Tímto však získáváme Fourierovu transformaci (až na vyčíslování funkce na komplexní ose). Této souvislosti mezi Laplaceovou a Fourierovou transformací využijeme ve zobecněné variantě.

3.6 Zobecněná Laplaceova transformace

Už víme, že nebudeme schopni zavést zobecněnou variantu Laplaceovy transformace jako tomu bylo u ostatních operací. Jedná se opět o důsledek toho, že není jasné, kam Laplaceova transformace zobrazuje testovací funkce či funkce ze Schwartzova prostoru. Zavedení však obejdeme pomocí nalezení vztahu k Fourierově transformaci.

Motivace Uvažujme $f(t)$ funkci takovou, že $\forall t < 0$ je $f(t) = 0$ (tj. $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^+$). Pak její Laplaceovu transformaci jsme schopni vyjádřit v následujícím vztahu vůči Fourierově transformaci:

$$\mathfrak{L}\,[f(t)](p) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sigma+\mathrm{i}\omega)t} f(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}\omega t}\left(f(t)e^{-\sigma t}\right)\mathrm{d}t = \mathfrak{F}\left[f(t)e^{-\sigma t}\right](-\omega)\,,$$

kde jsme označili reálnou a imaginární část $p = \sigma + \mathrm{i}\omega$.

Definice 3.6.1. Pro zobecněnou funkci f takovou, že $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}_0^+$, která navíc splňuje, že $\exists a \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall \sigma > a$ platí $e^{-\sigma t} f(t) \in \mathscr{S}'$ (aby Fourierova transformace existovala), definujeme její Laplaceův obraz předpisem

$$\mathfrak{L}\left[f(t)\right](p) := \mathfrak{F}\left[f(t) e^{-\sigma t}\right](-\omega) \text{ pro } \operatorname{Re}(p) > a,\ p = \sigma + \mathrm{i}\omega.$$

Poznámka. 1. Laplaceova transformace je jednoparametrická množina temperovaných zobecněných funkcí (σ je parametr, ω proměnná).

2. Lze ukázat [Šťovíček], že Laplaceův obraz zobecněné funkce je vždy regulární zobecněnou funkcí (ve ω).

3. Definice zobecněné a klasické Laplaceovy transformace jsou konzistentní. Uvažujme f měřitelnou funkci na $\mathbb{R}$ takovou, že $f(t) = 0\ \forall t < 0$ a $|f(t)| \leq Ce^{at}\ \forall t \geq 0$. Potom $f \in \mathscr{D}'_{reg}$ a navíc, $\forall \sigma > a$ je $f(t)e^{-\sigma t} \in L^1(\mathbb{R})$ a tedy $f(t)e^{-\sigma t} \in \mathscr{S}'_{reg}$. Navíc platí

$$\mathfrak{L}\left[\tilde{f}(t)\right](p) = \widetilde{\mathfrak{L}[f(t)]}(p).$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že

$$\left(\mathfrak{L}\left[\widetilde{f}(t)\right](\sigma + \mathrm{i}\omega), \varphi(\omega)\right) = \left(\mathfrak{F}\left[e^{-\sigma t}\widetilde{f}(t)\right](-\omega), \varphi(\omega)\right) = \left(e^{-\sigma t}\widetilde{f}(t), \mathfrak{F}\left[\varphi(-\omega)\right](t)\right).$$

□

Nyní se pokusíme vypočítat Laplaceův obraz Diracovy δ-funkce. Tato distribuce skutečně splňuje oba předpoklady, které definice požaduje. Z konzistence již víme, že $\mathfrak{L}\left[\theta(t)\right](p) = \frac{1}{p}$. Potom však

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}\left[\delta(t)\right](\sigma + \mathrm{i}\omega), \varphi(\omega)) &= \left(\mathfrak{F}\left[e^{-\sigma t}\delta(t)\right](-\omega), \varphi(\omega)\right) = \left(e^{-\sigma t}\delta(t), \mathfrak{F}\left[\varphi(-\omega)\right](t)\right) = \\ &= (\delta(t), \mathfrak{F}\left[\varphi(\omega)\right](-t)) = \mathfrak{F}\left[\varphi(\omega)\right](0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\omega)\mathrm{d}\omega = (1, \varphi(\omega)).\end{aligned}$$

Tedy jsme spočetli, že $\mathfrak{L}\left[\delta(t)\right](p) = 1$ v $\mathscr{S}'$.

Věta 3.6.2. Pro Laplaceovu transformaci zobecněných funkcí platí:

1. Derivace obrazu:
$$\mathfrak{L}\left[(-t)^m f(t)\right](p) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}p^m}\mathfrak{L}\left[f(t)\right](p);$$

2. Obraz derivace (všimněte si, že zde není žádný analogický člen reprezentující počáteční podmínku):
$$\mathfrak{L}\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} f(t)\right](p) = p^m \mathfrak{L}\left[f(t)\right](p);$$

3. Posun argumentu obrazu:
$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \mathfrak{L}\left[e^{\lambda t} f(t)\right](p) = \mathfrak{L}\left[f(t)\right](p - \lambda);$$
přitom musí platit, že $\operatorname{Re}(p) > a + \operatorname{Re}(\lambda)$,

4. Posun argumentu transformované funkce:
$$\forall \tau \geq 0 \quad \mathfrak{L}\left[f(t - \tau)\right](p) = e^{-\tau p}\mathfrak{L}\left[f(t)\right](p).$$

Laplaceova transformace	Fourierova transformace
$\mathfrak{L}[f(ct)](p) = \frac{1}{c}\mathfrak{L}[f(t)](\frac{p}{c})$	$\mathfrak{F}[f(cx)](\xi) = \frac{1}{\lvert c\rvert^n}\mathfrak{F}[f(t)](\frac{\xi}{c})$
$\mathfrak{L}[(-t)^n f(t)](p) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\mathfrak{L}[f(t)](p)$	$\mathfrak{F}[(\mathrm{i}x)^\alpha f(x)](\xi) = D^\alpha\mathfrak{F}[f(x)](\xi)$
$\mathfrak{L}[\dot f(t)](p) = p\ \mathfrak{L}[f(t)](p)\boxed{-f(0_+)}$, kde ozn člen není v zob. $\mathfrak{L}$	$\mathfrak{F}[D^\alpha\big(f(x)\big)](\xi) = (-\mathrm{i}\xi)^\alpha\ \mathfrak{F}[f(x)](\xi)$
$\mathfrak{L}[\Theta(t)\int_0^t\ f(\tau)\ \mathrm{d}\tau](p) = \frac{1}{p}\mathfrak{L}[f(t)](p)$	$\mathfrak{F}[1](\xi) = (2\pi)^n\delta(\xi)$
$\mathfrak{L}[\frac{f(t)}{t}](p) = \int_p^\infty \mathfrak{L}[f(t)](q)\ \mathrm{d}q$	$\mathfrak{F}\mathfrak{F}[f(x)] = (2\pi)^n f(-x)$
$e^{ap}\mathfrak{L}[f(t)](p) = \mathfrak{L}[f(t+a)](p)$	$e^{\mathrm{i}\mu\xi}\ \mathfrak{F}[f(x)](\xi) = \mathfrak{F}[f(x-\mu)](\xi)$
$\mathfrak{L}[e^{at}f(t)](p) = \mathfrak{L}[f(t)](p-a)$	$\mathfrak{F}[e^{\mathrm{i}\mu x}f(x)](\xi) = \mathfrak{F}[f(x)](\xi+\mu)$
$\int_0^\infty f(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \lim_{p\to 0_+}\mathfrak{L}[f(t)](p)$	$\lim_{\lvert\xi\rvert\to\infty}\mathfrak{F}[f(x)](\xi) = 0$
$\mathfrak{L}[f(t)\ *\ g(t)] = \mathfrak{L}[f(t)]\cdot\mathfrak{L}[g(t)]$	$\mathfrak{F}[f(x)\ *\ g(x)] = \mathfrak{F}[f(x)]\cdot\mathfrak{F}[g(x)]$
$\int_0^\infty f(t)\ \mathfrak{L}[g(\tau)](t)\ \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathfrak{L}[f(\tau)](t)\ g(t)\ \mathrm{d}t$	$\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathfrak{F}[g(y)](x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty \mathfrak{F}[f(y)](x)\ g(x)\ \mathrm{d}x$
	$\mathfrak{F}: \S\mapsto\S$ i $\mathfrak{F}: \S'\mapsto\S'$ jsou spojité

Tabulka 3.1: Shrnutí vlastností Laplaceovy a Fourierovy transformace, a to v klasické i zobecněné variantě.

5. Škálování argumentu:
$$\forall k>0 \quad \mathfrak{L}\left[f(kt)\right](p) = \frac{1}{k}\mathfrak{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{p}{k}\right);$$
přičemž opět musí platit $\mathrm{Re}(p) > ka$. Volba k vychází z nutnosti zachovat nosič funkce v $\mathbb{R}^+$,

6. Konvoluce je převedená na násobení
$$\mathfrak{L}\left[f(t)*g(t)\right](p) = \mathfrak{L}\left[f(t)\right](p)\cdot\mathfrak{L}\left[g(t)\right](p);$$

Důkaz. Důkazy vynecháme, byť by si je čtenář měl být schopen doplnit sám (jsou případně k nahlédnutí ve [Šťovíček]). □

Závěrem vřele doporučujeme čtenářům porovnat užití zobecněné Fourierovy a Laplaceovy transformace k nalezení fundamentálního řešení obyčejného diferenciálního operátoru, např. $\ddot y + 3\dot y + 2y = \delta$.

Ilustrujme ještě užitečnost převodu konvoluce na násobení. Spočítejme $\theta(t)e^{-at} * \theta(t)e^{-at}$. Užitím integrální transformace máme:

$$\mathfrak{L}\left[\theta(t)e^{-at}*\theta(t)e^{-at}\right](p) = \left(\mathfrak{L}\left[\theta(t)e^{-at}\right](p)\right)^2 = \left(\frac{1}{p+a}\right)^2.$$

Inverzi pak najdeme snadno, pokud užijeme vlastností Laplaceovy transformace:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathfrak{L}\left[\theta(t)\right](p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{1}{p} = -\frac{1}{p^2} = \mathfrak{L}\left[-t\theta(t)\right](p).$$

Nakonec posunutím dostáváme výsledek

$$\theta(t)e^{-at}*\theta(t)e^{-at} = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+a)^2}\right](p) = \theta(t)te^{-at}.$$

Laplaceův vzor	Laplaceův obraz
$\delta(t-\tau)$	$e^{-p\tau}$
$\Theta(t)$	$\frac{1}{p}$
$\Theta(t)\ t^n\ \ (n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\Theta(t)\ t^\alpha\ \ (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$\Theta(t)\ e^{\mu t}$	$\frac{1}{p-\mu}$
$\Theta(t)\ \sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
$\Theta(t)\ \cos(\beta t)$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
$\Theta(t)\,(\sin(t) - t\cos(t))$	$\frac{2}{(1+p^2)^2}$
$\Theta(t)\ e^{\mu t}\cos(\omega t)$	$\frac{p-\mu}{(p-\mu)^2+\omega^2}$
$\Theta(t)\ e^{\mu t}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-\mu)^2+\omega^2}$
$\Theta(t)\ \sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\Theta(t)\ \cosh(\omega t)$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$

Fourieův vzor	Fourieův obraz	Obor
$e^{-a\\|x\\|^2}$	$(\frac{\pi}{a})^{n/2} e^{-\frac{\\|\xi\\|^2}{4a}}$	$\mathbb{R}^n$
$\Theta(x)\ e^{-ax},\ \ \mathrm{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{a-\mathrm{i}\xi} = \frac{\mathrm{i}}{\xi+\mathrm{i}a}$	$\mathbb{R}$
$\Theta(x)\ e^{-a\|x\|},\ \ \mathrm{Re}(a) > 0$	$\frac{2a}{a^2+\xi^2}$	$\mathbb{R}$
$\delta(x-\mu)$	$e^{\mathrm{i}\xi\mu}$	$\mathbb{R}^n$
$\Theta(x)$	$\pi\delta(\xi)\ +\ \mathrm{i}P\frac{1}{\xi}$	$\mathbb{R}$
$\Theta(-x)$	$\pi\delta(\xi)\ -\ \mathrm{i}P\frac{1}{\xi}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sgn}\,(x)$	$2\mathrm{i}P\frac{1}{\xi}$	$\mathbb{R}$
1	$(2\pi)^n\ \delta(\xi)$	$\mathbb{R}^n$
$P\frac{1}{x}$	$\mathrm{i}\pi\ \mathrm{sgn}\,(\xi)$	$\mathbb{R}$
$P\frac{1}{x^2}$	$-\pi\ \|\xi\|$	$\mathbb{R}$
$e^{\mathrm{i}x^2}$	$\sqrt{\pi}\ e^{-\frac{\mathrm{i}}{4}(\xi^2-\pi)}$	$\mathbb{R}$
$\Theta(R-\|x\|)$	$2\ \frac{\sin(R\xi)}{\xi}$	$\mathbb{R}$
$\frac{\Theta(R-\\|x\\|)}{\sqrt{R^2-\\|x\\|^2}}$	$2\pi\ \frac{\sin(R\\|\xi\\|)}{\\|\xi\\|}$	$\mathbb{R}^2$
$\delta_{S_R}(x)$	$4\pi R\ \frac{\sin(R\\|\xi\\|)}{\\|\xi\\|}$	$\mathbb{R}^3$
x^α	$(-\mathrm{i})^{\|\alpha\|}(2\pi)^n\delta^{(\alpha)}(\xi)$	$\mathbb{R}^n$
$e^{\mathrm{i}cx}$	$2\pi\delta(\xi+c)$	$\mathbb{R}$
$\cos(cx)$	$\pi\big(\delta(\xi-c)+\delta(\xi+c)\big)$	$\mathbb{R}$
$\sin(cx)$	$\mathrm{i}\pi\big(\delta(\xi-c)-\delta(\xi+c)\big)$	$\mathbb{R}$

Tabulka 3.2: Příklady obrazů (a vzorů) při Laplaceově a Fourierově transformaci (zobecněné i klasické).

Kapitola 4

Řešení počátečních úloh ODR a PDR

Nyní jsme již nachystaní na řešení diferenciálních rovnic pomocí zobecněných funkcí. Schéma řešení pro zobecněné lineární diferenciální rovnice známe. Máme-li

$$Lu = f \text{ v } \mathscr{D}',$$

pak nejprve nalezneme fundamentální řešení $L\varepsilon = \delta$ pomocí integrálních transformací (zejména v případě parciálních diferenciálních rovnic, kdy využijeme více prozkoumanou Fourierovu transformaci; v případě obyčejných diferenciálních rovnic je jednodušší užít jiného postupu zmiňovaného dříve). Následně víme, že $u = \varepsilon * f$ řeší rovnici $Lu = f$.

Co však chybí, je užití těchto znalostí k vyřešení klasické direfernciální rovnice. Tj. je nějaký způsob, jak klasickou počáteční úlohu převést na zobecněnou tak, aby řešení této zobecněné úlohy mělo zpět vztah k řešení původního klasického problému?

4.1 Lineární ODR s konstantními koeficienty

Nejprve detailně postup řešení rozmyslíme na případě obyčejných diferenciálních rovnic, kde přidanou hodnotou oproti postupům z dřívějších semestrů bude obecnost pravé strany. Bude však zejména sloužit jako odrazový můstek pro složitější parciální diferenciální rovnice, kde ne vše již budeme schopni rigorózně ukázat.

Nejprve vypočteme řešení na konkrétním příkladě a následně postup abstrahujeme do obecné věty.

Řešme počáteční úlohu:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 3te^t, \quad y(0) = 2, \dot{y}(0) = 1.$$

Označme $Ly = \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y$ a $f = 3te^t$. Předpokládejme, že $y(t)$ je řešením této rovnice, které je neznámé a hledáme jej.

I. Nalezení vhodné zobecněné úlohy Zkonstruujme nyní zobecněnou funkci

$$\tilde{y}(t) := \Theta(t)y(t) \in \mathscr{D}'_{reg},$$

a ukážeme, že onou vhodnou zobecněnou úlohou, jejíž řešení lze užít k rekonstrukci klasického řešení, je $L\tilde{y} = F$, kde vhodnou pravou stranu F určíme.

Víme sice z předchozích kurzů, že $y(t) \in \mathcal{C}^\infty$, ale doporučuji nepočítat derivaci $\tilde{y}(t)$ pomocí součinu. Jednak tyto znalosti o regularitě typicky nebudeme znát pro parciální diferenciální rovnice a za druhé se jedná o častý zdroj chyb. Vypočtěme si derivace výrazu $\tilde{y}(t)$:

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \Theta(t)\dot{y}(t) + \delta(t)y(t) = \Theta(t)\dot{y}(t) + \delta(t)y(0) = \Theta(t)\dot{y}(t) + 2\delta(t)$$

$$\ddot{\tilde{y}}(t) = \dot{y}(t)\delta(t) + \Theta(t)\ddot{y}(t) + 2\dot{\delta}(t) = \Theta(t)\ddot{y}(t) + \dot{y}(t)\delta(t) + 2\dot{\delta}(t) = \Theta(t)\ddot{y}(t) + \delta(t) + 2\dot{\delta}(t)$$

Výpočet derivací probíhal pomocí věty o derivaci po částech C^1 funkce. Při výpočtu skoků v místě nespojitosti (právě v té uměle vytvořené nespojitosti v počátku při přechodu od y k $\tilde{y}$) jsme využili počátečních podmínek a zahrnuli je tímto do řešení.

Problém však je, že derivace pomocné funkce $\tilde{y}$ obsahují ono neznámé a hledané řešení y. Tedy pokud zobecněná úloha pro pomocnou funkci $\tilde{y}$ bude na tomto neznámém řešení závislá, tak se jistě nejedná o vhodnou pomocnou úlohu. Zkusme však dosadit do operátoru L:

$$\begin{aligned} L\tilde{y} = \Theta(t)\ddot{y}(t)+\delta(t)+2\dot{\delta}(t)+3(\Theta(t)\dot{y}(t)+2\delta(t))+2\Theta(t)y(t) &= \Theta(t)[\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)]+7\delta(t)+2\dot{\delta}(t) \\ &= \Theta(t)Ly + 7\delta(t) + 2\dot{\delta}(t) = \underbrace{\Theta(t)f(t)}_{=\tilde{f}(t)} + 7\delta(t) + 2\dot{\delta}(t). \end{aligned}$$

Klasickou úlohu jsme tedy převedli na problém v $\mathscr{D}'$, který není závislý na hledaném řešení, ale pouze na známých parametrech klasické úlohy.

Zobecněnou úlohou tedy je

$$L\tilde{y} = F(t) = \underbrace{\tilde{f}(t) + 7\delta(t) + 2\dot{\delta}(t)}_{F(t)}, \text{kde } \tilde{f}(t) = \Theta(t)f(t),$$

kterou umíme vyřešit pomocí teorie zobecněných funkcí. Navíc pomocná funkce je ve vztahu k hledanému řešení $\tilde{y}(t) = \Theta(t)y(t)$, a tedy dává naději, že půjde identifikovat klasické řešení, pokud půjde vytknout $\Theta(t)$ z řešení zobecněné úlohy. Uvidíme, že tomu tak skutečně je v případě obyčejných diferenciálních rovnic.

Řešení rozdělíme do dvou kroků, nejprve nalezneme fundamentální řešení a následně vyřešíme zobecněnou úlohu.

II. Fundamentální řešení ε Řešíme úlohu $L\varepsilon = \delta$. Tato úloha byla již řešena (samostatně) v rámci zobecněných integrálních transformací (pro porovnání Fourierovy i Laplaceovy transformace). Na hledání fundamentálních řešení obyčejných diferenciálních operátorů je však jednoduché užít jiný dříve zmiňovaný nástroj (dokazovaný na cvičeních). Fundamentální řešení je $\varepsilon(t) = \Theta(t)Z(t)$, kde funkce $Z(t)$ splňuje $LZ = 0$ a počáteční podmínky $Z(0) = 0$ a $\dot{Z}(0) = 1$. V našem případě tedy řešíme rovnici

$$LZ = \ddot{Z} + 3\dot{Z} + 2Z = 0.$$

Její řešení je $Z(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$. Po započtení počátečních podmínek máme $Z(t) = e^{-t} - e^{-2t}$, a tedy fundamentální řešení našeho operátoru je tvaru

$$\varepsilon(t) = \Theta(t)\left(e^{-t} - e^{-2t}\right).$$

III. Vyřešení zobecněné úlohy Nyní se pokusíme spočíst konvoluci $\varepsilon * F = \tilde{y}$. Nejprve z linearity konvoluce máme

$$\tilde{y} = \varepsilon * F = \varepsilon * (\tilde{f} + 7\delta + 2\dot{\delta}) = \underbrace{\varepsilon * \tilde{f}}_{(1)} + \underbrace{7\varepsilon * \delta}_{(2)} + \underbrace{2\varepsilon * \dot{\delta}}_{(3)}$$

Postupně vypočteme jednotlivé příspěvky s cílem vytknout ze zobecněného řešení $\Theta(t)$.

Výpočet (2)

$$7\varepsilon * \delta = 7\varepsilon = \Theta(t)\left(7\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\right),$$

kde jsme využili znalosti konvoluce, kde δ hraje roli jednotky při konvoluci. Vidíme, že tento příspěvek je skutečně ve vhodném tvaru.

Výpočet (3)

$$2\varepsilon * \dot{\delta} = 2\dot{\varepsilon} * \delta = 2\dot{\varepsilon} = \Theta(t)\left(2\left(2e^{-2t} - e^{-t}\right)\right),$$

kde jsme v poslední úpravě opět využili stejný postup výpočtu derivace jako při odvozování zobecněné úlohy. Opět vidíme, že tento příspěvek je skutečně ve vhodném tvaru.

Výpočet (1) Pro tuto část výpočtu bychom potřebovali spočítat konvoluci $f * g$, kde $f, g \in \mathscr{D}'_{reg}$ a $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^+$, $\operatorname{supp} g \subset \mathbb{R}^+$. Pro takový případ ale konvoluci nemáme zavedenou. [1] Postupujme však intuitivně a zkusme tento případ vyřešit rozšířením našeho pojetí konvoluce:

$$((f * g)(t), \varphi(t)) = (f(t), (g(\tau), \varphi(t+\tau))) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t f(t) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tau g(\tau) \underbrace{\varphi(t+\tau)}_{\psi(t,\tau)} = \bullet$$

O funkci $(g(\tau), \varphi(t+\tau))$ víme, že je třídy $\mathcal{C}^\infty$. Avšak problémem je, že $\psi(t,\tau)$ nemá omezený nosič, ikdyž vytvořující funkce φ je testovací. V případě omezeného nosiče jedné ze zobecněných funkcí se problém však efektivně odstraní, jelikož zobecněná funkce s omezeným nosičem si nevšímá příspěvků testovací funkce mimo tuto omezenou množinu. Podobně tomu tak je v případě, že obě funkce mají sice neomezený nosič, ale $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^+$, $\operatorname{supp} g \subset \mathbb{R}^+$, viz obrázek 4.1.

Integrál upravíme do tvaru definice působení regulární zobecněné funkce. Z definice zobecněného nosiče víme $f(t) = \theta(t) f(t)$, a tedy

$$\bullet = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t f(t) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tau g(\tau) \underbrace{\varphi(t+\tau)}_{\psi(t,\tau)} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Subst.} \\ z = t + \tau \\ t = t \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \Theta(t) f(t) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}z g(z-t) \Theta(z-t) \varphi(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}z \varphi(z) \left(\theta(z) \int_0^z f(t) g(z-t) \mathrm{d}t \right),$$

kde jsme využili $\Theta(t)\Theta(z-t) \neq 0 \Leftrightarrow t \in (0,z), z > 0$. Tedy jsme zjistili, že výsledek konvoluce regulárních zobecněných funkcí s positivními nosiči je regulární zobecněná funkce, jejíž klasický generátor je klasická konvoluce generátorů zobecněných funkcí.

Ukázali jsme (ne zcela korektně, ale tvrzení vskutku platí), že

Věta 4.1.1. Mějme regulární zobecněné funkce s positivním nosičem, $f, g \in D'_{reg}$ a $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^+$, $\operatorname{supp} g \subset \mathbb{R}^+$. Pak

$$(f * g)(x) = \Theta(x) \int_0^x f(y) g(x-y) \mathrm{d}y.$$

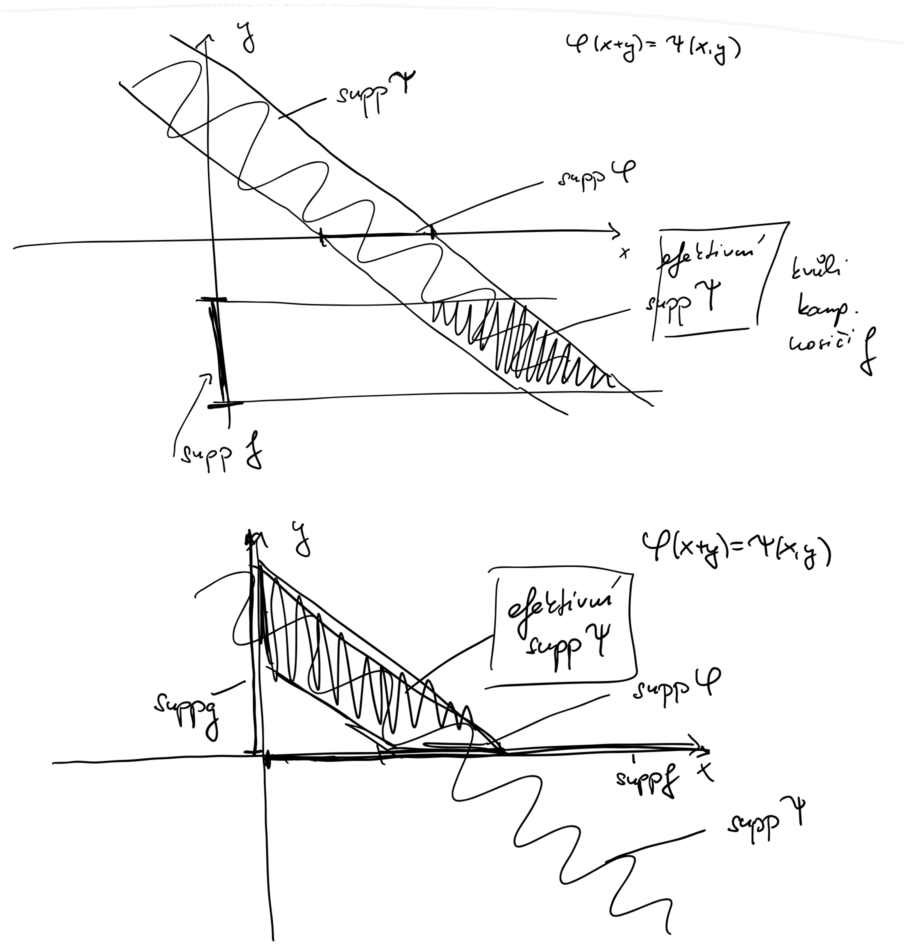
Vraťme se zpět k příkladu, kde obě funkce $\tilde{f}(t)$ a $\varepsilon(t)$ splňují z definice předpoklady výše zmíněné, a tedy vypočteme jejich konvoluci.

$$(1) = \varepsilon(t) * \tilde{f}(t) = \Theta(t) Z(t) * \Theta(t) f(t) = \Theta(t) \int_0^t Z(\tau) f(t-\tau) \mathrm{d}\tau = \Theta(t) \int_0^t (e^{-\tau} - e^{-2\tau}) 3(t-\tau) e^{t-\tau} \mathrm{d}\tau =$$

$$= \Theta(t) 3e^t \left[t \int_0^t (e^{-\tau} - e^{-2\tau}) e^{-\tau} \mathrm{d}\tau - \int_0^t (e^{-\tau} - e^{-2\tau}) \tau e^{-\tau} \mathrm{d}\tau \right].$$

Tímto jsme spočetli i poslední člen konvoluce a opět vidíme, že je napsatelný ve tvaru součinu Heavisideovy funkce a nějaké klasické funkce.

[1] Obecnější pojetí konvoluce, která by toto umožňovala, lze nalézt ve [Šťovíček].



Obrázek 4.1: Ilustrace efektivní omezenosti nosičů v případě pozitivních nosičů zobecněných funkcí. Horní obrázek představuje rigorózně zkoumanou situaci, kdy jedna ze zobecněných funkcí měla kompaktní nosič, spodní pak představuje intuitivní odstranění problému pro případ dvou zobecněných funkcí s pozitivními nosiči.

Tedy celkem máme

$$\tilde{y}(t) = (1) + (2) + (3) = \Theta(t)\Bigg[7\left(e^{-t} - e^{-2t}\right) + 2\left(2e^{-2t} - e^{-t}\right) +$$

$$+ 3e^{t}\left[t\int_0^t (e^{-\tau} - e^{-2\tau})e^{-\tau}\mathrm{d}\tau - \int_0^t (e^{-\tau} - e^{-2\tau})\tau e^{-\tau}\mathrm{d}\tau\right]\Bigg] =$$

$$= \Theta(t)\underbrace{\frac{1}{12}e^{-2t}\left(e^{3t}(6t-5) + 69e^{t} - 40\right)}_{=y(t)}.$$

Funkce $y(t)$ by mohla být řešením klasické úlohy. Jak bylo řečeno, z postupu to přímo neplyne, ale lze se o tom dosazením přesvědčit. Je tomu však skutečně tak obecně, jak shrneme v následující větě, která je zobecněním předchozího výpočtu, a tedy skutečně ona zobecněná úloha je vhodným protějškem klasické počáteční úlohy.

Věta 4.1.2. Nechť $u = u(t)$ pro $t \geq 0$ je klasické řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tvaru

$$Lu = u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}u' + a_n u = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}u^{(k)} = f(t),$$

kde a_k jsou konstanty pro všechna $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ a $a_0 = 1$, které splňuje počáteční podmínky $u^{(k)}(0) = u_k$ pro všechna $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ a nechť $f(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ je po částech spojitá funkce.

Definujeme-li $\tilde{u}(t) = \Theta(t)u(t)$ a $\tilde{f}(t) = \Theta(t)f(t)$, potom:

1. Zobecněná funkce $\tilde{u}$ vyhovuje rovnici v $\mathscr{D}'$:

$$L\tilde{u} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\tilde{u}^{(k)} = \tilde{f} + \sum_{r=0}^{n-1} c_r\delta^{(r)} = F,$$

kde $c_r = \sum_{k=1}^{n-r} a_{n-k-r}u_{k-1}$.

2. Pro řešení klasické úlohy platí

$$u(t) = \int_0^t Z(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau + \sum_{k=0}^{n-1} c_k Z^{(k)},$$

kde $Z(t)$ je funkce z fundamentálního řešení operátoru L, tj. $LZ = 0$ a $Z^{(k)}(0) = 0\ \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ a $Z^{(n-1)}(0) = 1$.

Důkaz. Odvození zobecněné úlohy se provede zcela analogicky jako u ilustračního příkladu, a tedy opravdu získáváme, že $\tilde{u}(t) = \Theta(t)u(t)$ je řešením uvedené zobecněné rovnice.

Dokažme nyní tedy druhou část a sice, že klasické řešení má uvedený tvar. My navíc zároveň ukážeme, že toto řešení lze nalézt v řešení zobecněné úlohy.

Víme, že řešení zobecněné úlohy lze nalézt ve tvaru $\tilde{u} = \varepsilon * F$, kde $\varepsilon(t) = \Theta(t)Z(t)$. Pak

$$\tilde{u} = \varepsilon * F = \varepsilon * \tilde{f} + \varepsilon * \left(\sum_{r=0}^{n-1} c_r\delta^{(r)}\right) =$$

$$= \varepsilon * \tilde{f} + \sum_{r=0}^{n-1} c_r\varepsilon * \delta^{(r)} = \varepsilon * \tilde{f} + \sum_{r=0}^{n-1} c_r\varepsilon^{(r)} * \delta = \varepsilon * \tilde{f} + \sum_{r=0}^{n-1} c_r\varepsilon^{(r)}.$$

Díky počátečním podmínkám na funkci $Z(t)$ je tato funkce vždy spojitou funkcí a pro její derivace (za použití věty pro derivování po částech spojité funkce) platí $\varepsilon^{(r)} = \Theta(t)Z^{(r)}$. Z tvrzení o konvoluci zobecněných funkcí s pozitivním nosičem dále víme, že $(\varepsilon * \tilde{f})(t) = \Theta(t)\int_0^t Z(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$.

Dosadíme nyní do vztahu pro $\tilde{u}(t)$

$$\tilde{u}(t) = \Theta(t) \left[\underbrace{\int_0^t Z(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau}_{(I)} + \underbrace{\sum_{r=0}^{n-1} c_r Z^{(r)}}_{(II)} \right]$$

Tedy skutečně získáváme, že struktura řešení zobecněné úlohy je $\tilde{u}(t) = \Theta(t) u(t)$. Zbývá ověřit, že $u(t)$ je řešením klasické úlohy. Učiníme tak, že u členů (I) a (II) ověříme, že jsou n-krát diferencovatelné a součet splňuje jak diferenciální rovnici (díky I), tak počáteční podmínky (díky II).

(II): Jelikož je $Z \in \mathcal{C}^\infty$ je

$$\left(\sum_{r=0}^{n-1} c_r Z^{(r)} \right)^{(k)} = \sum_{r=0}^{n-1} c_r Z^{(r+k)} \in \mathcal{C}^\infty \ \forall k.$$

Navíc díky linearitě L a konstantnosti koeficientů a_k platí:

$$L \left(\sum_{r=0}^{n-1} c_r Z^{(r)} \right) = \sum_{r=0}^{n-1} c_r L Z^{(r)} = \sum_{r=0}^{n-1} c_r (LZ)^{(r)} = 0,$$

a tedy tato druhá část je řešením homogenní diferenciální rovnice $Ly = 0$, tj. nepřispívá do řešení samotné diferenciální rovnice.

(I): Nejprve si uvědomíme, že $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\int_0^t g(t,\tau) \mathrm{d}\tau \right) = g(t,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} g(t,\tau) \mathrm{d}\tau$. Odsud plyne i diferencovatelnost části I. a můžeme psát:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\int_0^t Z(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau \right) &= \underbrace{Z(t-t)}_{Z(0)=0} f(t) + \int_0^t \dot{Z}(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau = \int_0^t \dot{Z}(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \left(\int_0^t Z(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau \right) &= \underbrace{\dot{Z}(t-t)}_{\dot{Z}(0)=0} f(t) + \int_0^t \ddot{Z}(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau = \int_0^t \ddot{Z}(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} \left(\int_0^t Z(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau \right) &= \underbrace{Z^{(n-2)}(t-t)}_{Z^{(n-2)}(0)=0} f(t) + \int_0^t Z^{(n-1)}(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau = \int_0^t Z^{(n-1)}(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau \\
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \left(\int_0^t Z(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau \right) &= \underbrace{Z^{(n-1)}(t-t)}_{Z^{(n-1)}(0)=1} f(t) + \int_0^t Z^{(n)}(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau = f(t) + \int_0^t Z^{(n)}(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

Vidíme, že všechny derivace existují. Nyní již jednoduše ověříme rovnost

$$\begin{aligned}
L \left(\int_0^t Z(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau \right) &= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \left(\int_0^t Z(t-\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau \right)^{(k)} = \\
&= f(t) + \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} Z^{(k)}(t-\tau) f(\tau) \right) \mathrm{d}\tau = f(t) + \int_0^t LZ \cdot f(t) \mathrm{d}\tau = f(t),
\end{aligned}$$

tj. skutečně $u(t)$ řeší rovnici $Lu = f$.

V poslední řadě ověříme splnění počátečních podmínek, kde si naopak ihned všimneme, že část I. nepřispívá do počátečních podmínek, jak plyne z nulovosti integrálu $(I)^{(k)}(0) = 0$ pro $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Vyšetříme člen (II) a aplikujeme počáteční podmínky na $Z^{(r)}$ a definici koeficientů c_r. Odtud po dosazení nejvyšší derivace vyjádřené z (derivací) rovnice $LZ = 0$ vyplývá, že $u^{(r)}(0) = u_r$, byť tento technický krok nerozepisujeme do detailů (přenecháváme čtenáři). $\square$

Poznámka. Konkrétní tvar koeficientů v lineární kombinaci derivací Diracovy δ-funkce je nadbytečný pro zapamatování si. V každém jednotlivém příkladě je jasné, jak dané koeficienty vznikají (např. viz předchozí příklad). Důležitá však je ona odhalená struktura řešení, kdy první část (a jen ona) klasického řešení zajišťuje splnění diferenciální rovnice, kdežto druhý příspěvek do diferenciální rovnice naopak nepřispívá, ale zajišťuje splnění počátečních podmínek.

4.2 Parciální diferenciální rovnice

Poznámka. Je dobré si uvědomit, že pro parciální diferenciální rovnice není rozumný analog ke konceptu fundamentálního systému řešení, který známe z lineárních obyčejných diferenciálních rovnic. Prakticky to znamená, že zabývat se problémem nalezení „obecného řešení PDR“ nedává příliš smysl.

Uveďme pro ilustraci následující příklady:

1. Rovnici $\frac{\partial}{\partial t}u + a\frac{\partial}{\partial x}u = 0$ splní jakákoliv funkce $u(x,t) = f(x - at)$ pro libovolnou $f \in \mathcal{C}^1$.
2. Rovnici $\mathrm{div}u = 0$ řeší v $\mathbb{R}^3$ libovolná funkce tvaru $u = \mathrm{rot}F$, kde F je libovolné vektorové pole.

Zabýváme se tedy vždy úlohou řešit PDR doplněnou o počáteční, eventuálně okrajové podmínky. Této počáteční úloze se též říká Cauchyho úloha (initial value problem).

4.2.1 PDR 1. řádu a metoda charakteristik

Uvažujme lineární PDR 1. řádu se 2 neznámými proměnnými ve tvaru (užíváme obvyklé značení parciální derivace pomocí dolního indexu, tj. $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$):

$$\tilde{a}(x,t)u + \tilde{b}(x,t)u_t + \tilde{c}(x,t)u_x = \tilde{g}(x,t).$$

Je-li $\tilde{b}(x,t)$ nenulová funkce (lze zajistit volbou nezávislých proměnných), lze tímto členem vydělit celou rovnici a převést ji na tvar

$$a(x,t)u + u_t + c(x,t)u_x = g(x,t) \text{ s počáteční podmínkou } u(x,0) = u_0(x). \tag{4.1}$$

Zabývejme se klasickým řešením, tj. parciální derivace existují a jsou spojité, diferenciální rovnice je splněna bodově a počáteční podmínka též.

Poznámka. Následující sled poznámek poslouží jako jakýsi vhled a odvození metody charakteristik.

1. Výraz $u_t + c(x,t)u_x$ lze chápat jako směrovou derivaci funkce u ve směru $(1, c(x,t))$ v rovině (t,x); směrovou derivaci lze totiž vypočíst pomocí gradientu $(\mathrm{grad}_{(t,x)}u, (1,c))$;
2. Vektory $(1, c(x,t))$ tvoří vektorové pole v rovině (t,x); křivky $x = X(t)$ podél tohoto vektorového pole (představme si jako šipky určující jeho tok) jsou tedy dány obyčejnou diferenciální rovnicí $X'(t) = c(X(t),t)$. Tyto křivky zveme *charakteristiky*.
3. Charakteristiky indexujeme pomocí bodu, jímž prochází, tj. charakteristiku procházející bodem $(x_0, 0)$ označíme $X_{x_0}(t)$, a tedy vyhovuje počáteční podmínce $X_{x_0}(0) = x_0$;
4. Nechť $u(x,t)$ je řešením úlohy (4.1) a $x = X_{x_0}(t)$ s $X_{x_0}(0) = x_0$ je charakteristika. Zúžení řešení $u(x,t)$ na charakteristiku je dáno $v(t) = u(X(t),t)$, a splňuje rovnici

   $$v'(t) = u_x(X(t),t) \cdot X'(t) + u_t(X(t),t) = u_x(X(t),t) \cdot c(X(t),t) + u_t(X(t),t).$$

   Touto úpravou jsme úlohu (4.1) převedli na úlohu řešení systému ODR.

Poznámka. V literatuře je metoda charakteristik obvykle zapisována jen ve velmi stručném tvaru:

$$\tilde{a}(x,t)u + \tilde{b}(x,t)u_t + \tilde{c}(x,t)u_x = \tilde{g}(x,t)$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \tilde{b}(x(s),t(s));$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \tilde{c}(x(s),t(s));$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \tilde{a}(x(s),t(s))u = \tilde{g}(x(s),t(s)).$$

Parametr s slouží k parametrizaci charakteristiky. My jsme se s ním vypořádali normalizací, kdy koeficient u parciální derivace podle proměnné t byl jednotka a tedy za parametr jsme rovnou volili $t = s$, což je řešení $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1$.

Postup metody charakteristik pro nalezení řešení úlohy (4.1)

1. Nalézt charakteristiky, tj. řešíme rovnici $X'(t) = c(X(t),t)$ s počáteční podmínkou $X(0) = x_0$. Řešení označme $X_{x_0}(t)$.

2. Nalézt x_0 počátek charakteristiky pro daný geometrický bod (x,t), kterým charakteristika prochází, tj. řešíme rovnici $X_{x_0}(t) = x$ pro x_0. Její řešení označme $x_0 = p(x,t)$.

3. Vyřešit ODR na charakteristikách z bodu 1 (které zároveň indexujeme dle charakteristiky, na které hledáme řešení), tj. řešíme rovnici $v'(t) + a(X_{x_0}(t),t)v(t) = g(X_{x_0}(t),t)$ s počáteční podmínkou $v(0) = u_0(x_0)$. Řešení označme $v_{x_0}(t)$.

4. Rekonstrukce řešení, tj. dosadit správnou charakteristiku do řešení $v_{x_0}(t)$:

$$u(x,t) = v_{x_0}(t)\Big|_{x_0=p(x,t)}.$$

Ilustrujme tuto metodu na konkrétním případě:

$$u + u_t + xu_x = 3x \quad \text{s počáteční podmínkou } u(x,0) = \arctan(x)$$

Postupujme dle naznačeného postupu:

1. $$X'(t) = X(t) \quad \text{s počáteční podmínkou } X(0) = x_0$$

   Řešením této rovnice je $X_{x_0}(t) = x_0 e^t$.

2. Daným geometrickým bodem prochází charakteristika:

$$X_{x_0}(t) = x = x_0 e^t \Rightarrow p(x,t) = x_0 = xe^{-t}$$

3. Na charakteristikách řešíme úlohu

$$v'(t) + v(t) = 3X_{x_0}(t) = 3x_0 e^t \quad \text{s počáteční podmínkou } v(0) = \arctan(x_0)$$

   Tuto rovnici snadno vyřešíme:

$$v(t) = Ce^{-t} + De^t,$$

   kde D dopočítáme jako partikulární řešení. Po dosazení máme:

$$2De^t = 3x_0 e^t \Rightarrow D = \frac{3}{2}x_0.$$

Užitím počáteční podmínky nakonec získáváme:

$$v(0) = C + D = C + \frac{3}{2}x_0 = \arctan(x_0)$$

Tedy řešení na charakteristikách je tvaru:

$$v_{x_0}(t) = (\arctan(x_0) - \frac{3}{2}x_0)e^{-t} + \frac{3}{2}x_0 e^t.$$

4. Nyní již můžeme nalézt řešení původní úlohy dosazením konkrétní znalosti charakteristiky, která prochází daným parametrem x_0:

$$u(x,t) = (\arctan(xe^{-t}) - \frac{3}{2}xe^{-t})e^{-t} + \frac{3}{2}x.$$

Obecnost metody V tomto odstavci budeme opět jen v poznámkách a bodech diskutovat obecnost této představené metody.

1. Je samozřejmě nutné, aby existovala charakteristika z daného bodu (x_1, t_1) vedoucí zpět do $t = 0$ (do bodu počáteční podmínky), abychom mohli rekonstruovat řešení. Toto totiž obecně není vždy možné. Existence řešení pro ODR je lokální (pro malé časy), uvažme například $v'(t) = v^2(t)$, $v(0) = v_0 > 0$. Podobně je též vyžadována hladkost funkcí a počátečních podmínek pro existenci charakteristik.

2. Avšak metodu lze přímočaře rozšířit na nelineární případ, tj. úlohu

$$u_t + c(x,t)u_x = f(x,t,u),\ u(x,0) = u_0(x).$$

Ve třetím kroku stačí upravit rovnici na

$$v'(t) = f(t, X(t), v(t)),\ v(0) = u_0(x_0).$$

3. Obdobně lze metodu rozšířit pro kvazidiagonální PDR, tj. pro úlohu tvaru

$$u_t + c(x,t,u)u_x = f(x,t,u),\ u(x,0) = u_0(x).$$

V tomto případě však se rovnice neoddělí do jasného postupu, jelikož soustava obyčejných diferenciálních rovnic je v tomto případě

$$X'(t) = c(X(t), t, v(t)),\ X(0) = x_0.$$

$$v'(t) = f(X(t), t, v(t)),\ v(0) = u_0(x_0),$$

které vyžadují řešení v jednom kroku.

4. Počáteční podmínka nemusí být zadána v počátku, ale například v $t = 1,\ t = x^2$ apod. Stejně tak počet nezávislých proměnných lze přímočaře zvýšit.

4.2.2 Klasifikace PDR 2. řádu a převod na normální tvar

Nyní přejdeme k PDR 2. řádu, tj. rovnici tvaru

$$f = Lu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u + c(x)u.$$

Opět hledáme její klasické řešení $u \in \mathcal{C}^2(G)$, $a_{ij}(x) \in \mathcal{C}(G)$, $b_i(x) \in \mathcal{C}(G)$, $c \in \mathcal{C}(G)$, kde $G \subset \mathbb{R}^n$.

Definice 4.2.1. Řekneme, že lineární parciální diferenciální rovnice 2. řádu je **eliptická**, resp. **hyperbolická**, resp. **parabolická** na $M \subset G$, právě když je eliptická, resp. hyperbolická, resp. parabolická její přidružená kvadratická forma $q(y,x) = y^T \mathbf{A}(x) y$, kde $\mathbf{A}_{ij} = a_{ij}(x)$ ($\mathbf{A}$ je symetrická).

Řekneme, že parciální diferenciální rovnice je v **normálním tvaru**, právě když je matice $\mathbf{A}$ diagonální s 0, -1 a 1 na diagonále. Typicky se tak děje po transformaci.

Poznámka. Připomeňme, že o kvadratické formě řekneme, že je eliptická, pokud má její matice veškerá vlastní čísla kladná, resp. záporná. Řekneme, že je hyperbolická, pokud jsou veškerá její vlastní čísla nenulová a není eliptická, tj. má jak kladná, tak záporná vlastní čísla, která jsou nenulová. Řekneme, že je parabolická, pokud je alespoň jedno její vlastní číslo nulové a alespoň jedno nenulové.

Nyní uveďme typické zástupce jednotlivých tříd:

- Laplaceův operátor $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ je eliptický operátor v normálním tvaru
- Operátor vedení tepla $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ je parabolický operátor v normálním tvaru
- Operátor vlnění $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ je hyperbolický operátor v normálním tvaru

Převod lineární PDR 2. řádu se dvěma nezávislými proměnnými do normálního tvaru

Uvažujme lineární PDR 2. řádu se dvěma nezávislými proměnnými:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(\nabla u, u, x, y) = 0 \tag{4.2}$$

Hledáme transformaci souřadnic $(x,y) \leftrightarrow (\xi,\eta)$, kde $\xi = \xi(x,y)$ a $\eta = \eta(x,y)$, takovou, aby v nových proměnných (ξ,η) byla v normálním tvaru. Vypočteme nejdříve parciální derivace v nových proměnných:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}.$$

Druhá derivace dle proměné y je analogická k druhé derivaci dle x. Dosadíme do původní rovnice (4.2) a rovnici upravíme opět do tvaru rozhodujícího o klasifikaci výsledné parciální diferenciální rovnice (totiž budeme se soustředit pouze členy s druhou derivací u podle nových proměnných):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\underbrace{\left(a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\right)}_{I} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\underbrace{\left(a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right)}_{II} +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\underbrace{\left(2a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + 2c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right)}_{III} + \tilde{F}(\nabla u, u, \xi, \eta).$$

Všimněme si, že člen I lze přepsat do následující podoby:

$$I = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \left(a + b\left(\frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}}\right) + c\left(\frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}}\right)^2\right)$$

Vidíme, že jsme obdrželi kvadratický výraz $a + b\lambda + c\lambda^2 = 0$ pro $\lambda(x,y) = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}}$. Stejný kvadratický výraz bychom obdrželi, kdybychom vytkli člen $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2$ v koeficientu druhé derivace dle proměnné η, tj. z II. Proto pokud má ona nalezená kvadratická rovnice právě jeden dvojnásobný kořen, jsme schopni vynulovat pouze jeden výraz z I, II. Naopak v případě existence dvou různých kořenů lze vynulovat oba koeficienty u druhých derivací najednou. Zdá se překvapivé, že při převodu na normální tvar, kdy chceme odstanit smíšené členy, diskutujeme odstranění členů diagonálních. Uvidíme však vzápětí, že se jedná o velmi vhodný postup.

Vidíme, že počet kořenů bude rozhodující pro výsledný normální tvar. Nabízí se tedy otázka, zda-li nelze odhalit souvislost mezi počtem (a typem) kořenů určující kvadratické rovnice $a + b\lambda + c\lambda^2 = 0$ s počtem a znaménky vlastních čísel matice $\mathbf{A}$, tj.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix},$$

tj. s typem parciální diferenciální rovnice.

Uvažme tedy PDR tvaru (4.2). Pak rovnice 4.2 je

Parabolická Dle definice klasifikace je PDR parabolická právě tehdy, když má přidružená kvadratická forma $\mathbf{A}$ alespoň jedno vlastní číslo rovno nule, tj. $\det\mathbf{A} = 0 = ac - \frac{b^2}{4}$, což je ekvivalentní požadavku, aby diskriminant určující kvadratické rovnice $d(x,y) = b^2 - 4ac$ byl nulový. Nakonec nulovost diskriminantu odpovídá situaci, kdy kvadratická rovnice má právě jeden dvojnásobný kořen.

Eliptická Podobně rovnice je eliptická, když její přidružená kvadratická forma má všechna vlastní čísla $\lambda_\pm$ stejného znaménka. Vlastní čísla matice 2x2 lze snadno určit jako

$$\lambda_\pm = \frac{\mathrm{tr}\mathbf{A}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 - \det\mathbf{A}},$$

odkud již snadno určíme podmínky na stejná znaménka obou vlastních čísel. Aby $\lambda_\pm > 0$ bylo splněno, tak nutně $\mathrm{tr}\mathbf{A} > 0$ a zároveň $\det\mathbf{A} > 0$. Podobně pro $\lambda_\pm < 0$ musí $\mathrm{tr}\mathbf{A} < 0$ a zároveň $\det\mathbf{A} > 0$. Dohromady tedy dostáváme, že PDR je eliptická právě tehdy, když jí přidružená kvadratická forma měla pozitivní determinant. Opět tato podmínka ale v řeči kvadratické rovnice znamená, že diskriminant je záporný, $d(x,y) < 0$, tedy fakt, že kvadratická rovnice $a + b\lambda + c\lambda^2 = 0$ má dva komplexně sdružené kořeny.

Hyperbolická Nakonec pro hyperbolickou rovnici (se dvěma nenulovými vlastními čísly s opačnými znaménky) lze analogicky ukázat, že je ekvivalentní podmínce $\det\mathbf{A} < 0$, pozitivitě diskriminantu kvadratické rovnice $d(x,y) > 0$, a tedy existenci dvou různých reálných kořenů.

Shrňme si dosavadní poznatky.

Parabolická rovnice Ukázali jsme, že pro parabolickou PDR má rovnice $a + b\lambda + c\lambda^2 = 0$ právě jeden kořen λ^*. Ten použijeme na vynulování členu I a ukážeme, že zajistí rovněž vynulování členu III, tedy koeficientu u smíšené derivace. Stačí volit bez újmy na obecnosti $\eta(x,y) = x$. Pak můžeme upravovat člen III do tvaru:

$$III = 2a\frac{\partial \xi}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{1} + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{0} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{1}\right) + 2c\frac{\partial \xi}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{0} = 2a\frac{\partial \xi}{\partial x} + b\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\left(2a + b\lambda^*\right) = 0,$$

kde poslední rovnost plyne z Viètových vztahů (aby kvadratická rovnice měla jeden dvojnásobný kořen, struktura koeficientů musí být speciální: $a + b\lambda + c\lambda^2 = 0 = c(\lambda - \lambda^*)^2 = c\lambda^2 - 2c\lambda^*\lambda + c(\lambda^*)^2$).

Tedy rovnici 4.2 jsme převedli do očekávaného normálního tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\tilde{F}(\nabla u, u, \xi, \eta)}{II} = 0.$$

Ukázali jsme, že pro hyperbolickou i eliptickou rovnici máme dva různé kořeny rovnice $a+b\lambda+c\lambda^2 = 0$, a tedy lze v obou případech zvolit souřadnice ξ, η tak, že $I = 0 = II$. Dostáváme tedy rovnici tvaru:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\tilde{F}(\nabla u, u, \xi, \eta)}{III} = 0.$$

Tato rovnice však není v normálním tvaru, ale může se zdát zvláštní, že obě rovnice lze převést do stejného tvaru. Uvidíme, že důvodem jsou komplexní proměnné, které jsme však u klasifikace neuvažovali. Totiž jelikož u eliptické rovnice existují dva komplexně sdružené kořeny

$$\lambda(x,y) = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}}$$

a $x, y \in \mathbb{R}$, tak funkce ξ, η transformují do komplexních proměnných. V hyperbolickém případě problém nenastává, jelikož nové souřadnice ξ, η rovněž reálné.

Hyperbolický případ Stačí uvážit známou transformaci z obdoby v kvadratických formách, totiž transformaci $r = \xi + \eta, s = \xi - \eta$. Pak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial s}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial s^2},$$

a tedy jsme obdrželi rovnici v očekávaném normálním tvaru.

Eliptický případ Nyní je zřejmé, že stejnou transformací nedostaneme správný normální tvar v eliptickém případě. Důvodem je právě ona zmiňovaná komplexnost nových proměnných, kdy $r = \xi + \eta \in \mathbb{R}$, $s = \xi - \eta \in \mathrm{i}\mathbb{R}$. Proto pozměníme ještě transformaci, aby byla do reálných proměnných, totiž volme $r = \xi + \eta = 2\mathrm{Re}\xi$, $s = \mathrm{i}(\xi - \eta) = -2\mathrm{Im}\xi$. Potom již snadno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial s}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \mathrm{i}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} - \mathrm{i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} + \mathrm{i}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2},$$

což je již PDR v očekávaném normálním tvaru.

Nalezení transformačních vztahů $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ Zbývá otázka, jak nalézt transformační vztahy do již nalezených normálních tvarů jednotlivých typů PDR. Víme, jak získat funkce $\lambda(x,y)$, totiž jakožto řešení rovnice $a + b\lambda + c\lambda^2 = 0$. Víme také, že $\lambda(x,y) = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}}$ a obdobně pro η, což je vztah pro hledané funkce ξ, η.

Tento vztah však připomíná derivaci implicitně zadané funkce $x(y)$, která je zadána funkcí $\xi(x(y), y) = K$, kde K je konstanta. Zderivujeme-li tento výraz dle y, obdržíme $\frac{\partial \xi}{\partial x}x' + \frac{\partial \xi}{\partial y}$. Odtud ale již

$$x'(y) = -\frac{\frac{\partial \xi}{\partial y}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}} = -\lambda(x,y)$$

Tedy stačí vyřešit tuto diferenciální rovnici pro neznámou funkci $x(y)$ a řešení napsat ve tvaru implicitních funkcí. Rozmyslete, že obdobně lze řešit vztah

$$y'(x) = -\widetilde{\lambda}(x,y), \quad \widetilde{\lambda} = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial y}},$$

kde $\widetilde{\lambda}$ je řešením $c + b\lambda + a\lambda^2 = 0$, což odpovídá znalosti derivace inverzní funkce.

Na závěr si ilustrujme určení transformačních vztahů na konkrétním příkladě. Hledejme souřadnice, ve kterých rovnice

$$x^3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3x^2\frac{\partial u}{\partial x} + 3xy\frac{\partial u}{\partial y} + 8x^4y^5 = 0$$

přejde do normálního tvaru.

Z výše uvedeného hledáme řešení a diskriminant určující kvadratické rovnice

$$x^3 - xy^2\lambda^2 = 0.$$

Její diskriminant je

$$d(x,y) = 4x^4y^2 > 0 \ s.v.,$$

odkud plyne, že rovnice je skoro všude hyperbolická, kromě bodů $x = 0$, $y = 0$, kde přechází v parabolickou. Kořeny určující rovnice jsou $\lambda_\pm = \pm\frac{x}{y}$, a tedy odtud máme řešení $\ln x = \mp \ln y + K$, odkud $\xi_1(x,y) = \ln\frac{x}{y}$ a $\eta_1(x,y) = \ln xy$. Lze však nalézt i jednodušší transformační vztahy, pokud využijeme nejednoznačnost konstanty v implicitním vyjádření. Totiž vztah $\ln x = \mp \ln y + K$ lze též zapsat jako $yx^{\pm 1} = \tilde{K}$, odkud dostáváme souřadnice v elegantnější podobě $\xi(x,y) = xy$ a $\eta(x,y) = \frac{x}{y}$. V případě jakýchkoli nejasností doporučuji dopočítat si transformaci explicitně až do normálního tvaru, kde veškeré kroky z obecného postupu budou zřejmější.

Převod lineární PDR 2. řádu s konstantními koeficienty a n proměnnými

Díky konstantnosti koeficientů jsme schopni provést převod na normální tvar pro obecně n proměnných, neboť se jedná o úlohu ekvivalentní s převodem matice do polární báze. Vystačíme si totiž jen s lineární transformací. Mějme rovnici tvaru

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(\nabla u, u) = (\nabla^T \mathbf{A}\nabla)u + F(\nabla u, u),$$

kde právě ona možnost přepsání pomocí gradientu je pouze díky konstantnosti matice $\mathbf{A}$. Označme $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ polární bázi matice a dále označme $\mathbb{B}$ matici, která splňuje $\mathbb{B}^T\mathbf{A}\mathbb{B} = \mathbb{D}$, kde $\mathbb{D}$ je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále a $\mathbb{B}^T = \mathbb{B}^{-1}$. Pak rozepsáním identity můžeme rovnici upravit do podoby

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(\nabla u, u) = (\nabla^T \mathbb{B}\mathbb{B}^T\mathbf{A}\mathbb{B}\mathbb{B}^T\nabla)u + F(\nabla u, u) = \left((\mathbb{B}^T\nabla)^T\mathbb{B}^T\mathbf{A}\mathbb{B}(\mathbb{B}^T\nabla)\right)u + F(\nabla u, u) =$$

$$= \nabla_y^T\mathbb{D}\nabla_y + F(\nabla_y u, u) = \sum_{j=1}^{n} D_{jj}\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} + F(\ldots).$$

Nyní již snadno určíme hledanou transformaci $x \to y$ tak, aby $\mathbb{B}^T\nabla_x = \nabla_y$, tj.

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^{n} B_{kj}^T\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} B_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Zároveň je patrné, že se jedná o lineární transformaci, tj. transformaci $x = \mathbb{J}y$, z čehož derivováním zjišťujeme

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} J_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

a tedy $\mathbb{J} = \mathbb{B}$.

4.2.3 Řešení počátečních úloh lineárních PDR 2. řádu

V této kapitole se budeme soustředit právě na ony typické představitele všech typů parciálních diferenciálních rovnic z předchozí kapitoly. Tedy díky transformacím do normálního tvaru víme, že ve skutečnosti hledáme řešení k mnohem větší skupině PDR. Poznamejeme pak, že postupy zde uvedené lze přirozeně zobecnit na lineární diferenciální rovnice vyšších řádů.

Postup bude analogický jako u ODR, jen již nebude tak rigorózní (existence konvoluce, cesta zpět ke klasickému řešení ze znalosti řešení zobecněné úlohy).

I. Nalezení vhodné zobecněné úlohy Klasickou počáteční (Cauchyho) úlohu převedeme na vhodnou zobecněnou úlohu opět pomocí umělého vytvoření nespojitosti v $t = 0$, abychom zahrnuli i počáteční podmínky do pravé strany úlohy. Postup provedeme pro názornost na rovnici vedení tepla v $\mathbb{R}^{1+1}$ prostoru[2].

$$Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u = f(t,x) \text{ s počátečními podmínkami } \; u(0,x) = u_0(x),$$

kde $\lambda > 0$ je koeficient vedení tepla (poznamenejme, že difuzní rovnice je identická, jelikož jsou oba popisy založeny na stejných pozorování: Fourierův a Fickův zákon). Hledáme klasické řešení, tj. $u(\ ,x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$, $u(t,\ ) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ pro $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{1+1})$.

Nyní již budeme postupovat stejně jako u ODR, tj. aplikujeme stejný diferenciální operátor L na funkci $\tilde{u}(t,x) = \Theta(t)u(t,x)$. Spočítáme potřebné derivace (dle cvičení dříve)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{u}(x,t) = \Theta(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(x,t) = \Theta(t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + u_0(x) \otimes \delta(t)$$

a po aplikaci diferenciálního operátoru máme

$$L\tilde{u} = \Theta(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}u - \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}u\right) + u_0(x)\otimes\delta(t) = \Theta(t)f(t,x) + u_0(x)\otimes\delta(t) = \tilde{f} + u_0(x)\otimes\delta(t).$$

Všimněme si opět, že se ze získané *zobecněné úlohy rovnice vedení tepla* vytratila závislost na řešení klasické úlohy, což nám umožnuje postupovat dále. Totiž, známe-li fundamentální řešení operátoru L, umíme najít řešení zobecněné úlohy pomocí konvoluce.

II. Fundamentální řešení ε Hledejme tedy fundamentální řešení $\mathscr{E}(t,x)$, tentokráte již nutně pomocí integrálních transformací:

$$L\mathscr{E}(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathscr{E}(t,x) = \delta(t,x) = \delta(t)\otimes\delta(x)$$

Aplikujme na celou rovnici částečnou Fourierovu transformaci v proměnné x (jak bude patrno níže, je to výhodnější než Fourierova transformace v obou proměnných):

$$\mathfrak{F}_x\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathscr{E}(t,x)\right](t,\xi) = \mathfrak{F}_x\left[\delta(t)\otimes\delta(x)\right](t,\xi) = \delta(t)\otimes\mathfrak{F}_x\left[\delta(x)\right](\xi) = \delta(t)\otimes 1.$$

Vidíme tedy, že funkce na pravé straně rovnice je nezávislá na ξ. Upravme ještě levou stranu:

$$\mathfrak{F}_x\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathscr{E}(t,x)\right](t,\xi) = \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{F}_x\left[\mathscr{E}(t,x)\right](t,\xi) - \lambda(-\mathrm{i}\xi)^2\mathfrak{F}_x\left[\mathscr{E}(t,x)\right](t,\xi) = \delta(t)\otimes 1$$

[2]Touto notací rozumíme operátor v jedné časové proměnné a jedné prostorové souřadnici.

Nyní označme $\hat{\mathscr{E}}^x(t,\xi)$ a všimneme si, že pro pevné ξ (chápeme jako parametr) lze při dalším označení $\hat{\mathscr{E}}^x_\xi(t) := \hat{\mathscr{E}}^x(t,\xi)$ zjednodušit problém na obyčejnou diferenciální rovnici pro částečný Fourierův obraz fundamentálního řešení

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathscr{E}}^x_\xi(t) + \lambda\xi^2\hat{\mathscr{E}}^x_\xi(t) = \delta(t).$$

To jest funkce $\hat{\mathscr{E}}^x_\xi(t)$ je fundamentálním řešením operátoru $L_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a$ pro $a > 0$, které snadno uhodneme $\hat{\mathscr{E}}^x_\xi(t) = \hat{\mathscr{E}}^x(t,\xi) = \Theta(t)e^{-\lambda\xi^2 t}$ [3]. Vyhnuli jsme se tak počítání dopředné a inverzní Fourierově transformaci v proměnné t.

Abychom nalezli fundamentální řešení $\mathscr{E}(t,x)$, zbývá provést inverzní Fourierovu transformaci

$$\mathscr{E}(t,x) = \mathfrak{F}_x^{-1}\left[\hat{\mathscr{E}}^x(t,\xi)\right](t,x) = \Theta(t)\mathfrak{F}_x^{-1}\left[e^{-\lambda\xi^2 t}\right](t,x) = \frac{\Theta(t)}{2\pi}\mathfrak{F}_x\left[e^{-\lambda\xi^2 t}\right](t,x) = \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\lambda t\pi}}e^{-\frac{x^2}{4\lambda t}}.$$

V obecné dimenzi má fundamentální řešení operátoru vedení tepla tvar (viz cvičení)

$$\mathscr{E}(t,x) = \frac{\Theta(t)}{(2\sqrt{\pi\lambda t})^n}e^{-\frac{\|x\|^2}{4\lambda t}},$$

kde $\|x\|^2 = \sum_1^n x_k^2$.

III. Řešení zobecněné a klasické úlohy Řešení zobecněné úlohy je tedy

$$\tilde{u}(x,t) = \varepsilon(x,t) * \left(\tilde{f}(x,t) + u_0(x) \otimes \delta(t)\right).$$

Druhou část řešení získáme opět relativně přímočaře díky tomu, že Diracova δ funkce funguje jako jednička při konvoluci. Platí totiž následující tvrzení:

Věta 4.2.2. Mějme $u_0 \in D'$ s kompaktním nosičem a $\varepsilon \in D'$. Poté

$$\varepsilon(x,t) * (u_0(x) \otimes \delta(t)) = \varepsilon(x,t) *_x u_0(x).$$

Důkaz. Postupnými úpravami máme

$$(\varepsilon(x,t) * (u_0(x) \otimes \delta(t)), \varphi(x,t)) = (\varepsilon(x,t), ((u_0(\xi) \otimes \delta(\tau), \varphi(x+\xi, t+\tau))) =$$
$$(\varepsilon(t,x), (u_0(\xi), \varphi(x+\xi,t))) = (\varepsilon(t,x) *_x u_0(x), \varphi(t,x)).$$

□

Nyní s odvoláním na analogii k postupu v ODR opět bude platit (není to jasné, ale zpětným ověřením se lze o správnosti přesvědčit, viz níže), že konvoluce dvou regulárních zobecněných funkcí, které mají pozitivní nosiče v proměnné t, existuje a je rovna klasické konvoluci jejich generátorů, tj.

$$\varepsilon(t,x) * \Theta(t)f(t,x) = \theta(t)\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\xi\varepsilon(\tau,\xi)f(t-\tau,x-\xi).$$

Pro náš konkrétní případ máme

$$\varepsilon(t,x) * (\Theta(t)f(t,x)) = \Theta(t)\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\sqrt{\lambda\pi\tau}}e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda\tau}}f(t-\tau,x-\xi).$$

Podobně pro druhý výraz, konvoluci jen v proměnné x, máme:

$$\varepsilon(x,t) *_x u_0(x) = \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\lambda\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\xi e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda t}}u_0(x-\xi).$$

[3] Jedná se o řešení tvaru $\varepsilon(t) = \Theta(t)Z(t)$, kde $Z(t)$ splňuje rovnici $LZ = 0$ s počáteční podmínkou $Z(0) = 1$

Celkem tedy jsme nalezli řešení zobecněné úlohy rovnice vedení tepla v $\mathbb{R}^{1+1}$, které je tvaru $\tilde{u}(x,t) = \Theta(t)u(x,t)$, totiž

$$\tilde{u}(t,x) = \Theta(t)\underbrace{\left[\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\sqrt{\lambda\pi\tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda\tau}} f(t-\tau, x-\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda t}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\xi u_0(x-\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda t}} \mathrm{d}\xi\right]}_{=u(t,x)},$$

kde si čtenář může ověřit zpětným dosazením, že získaná funkce $u(t,x)$ je opravdu řešením původní Cauchyho úlohy. Touto argumentací (ex post) lze alespoň částečně zdůvodnit výše užité nejasné kroky ohledně existence a tvaru konvolucí zobecněných funkcí. Doporučuji však zkoumat správnost tohoto vzorce až v konkrétních úlohách, kdy je situace podstatně snazší. Uvažte například $f(t,x) = e^{-t}\cos x$ a počáteční podmínku $u_0(x) = \cos x$. Po dosazení do získaného vzorce získáme konkrétní podobu řešení, u kterého lze již snadno ověřit, že vyhovuje původní Cauchyho úloze.

Podobný postup je uplatnitelný ve všech ostatních případech. Klíčová je tedy znalost fundamentálních řešení. Jak se však ukazuje, výpočet fundamentálních řešení může být značně komplikovaný (obzvláště ve dvou prostorových dimenzích). Představíme si proto i metodu sestupu, která umožňuje získávat fundamentální řešení z již nalezených ve vyšších dimenzích.

4.2.4 Hledání fundamentálních řešení $\mathscr{E}$ vlnového a Laplaceova operátoru

Věta 4.2.3 (Metoda sestupu)**.** Nechť $u(t,x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{1+n})$ je zobecněná funkce s omezeným nosičem v t, tj. $\exists R > 0$ takové, že $\forall x$ je $\operatorname{supp} u(t,x) \subset B_R(0)$, která je řešením diferenciální rovnice $\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^k}{\partial t^k} L_k + L_0\right) u(t,x) = \delta(t) \otimes f(x)$, kde L_k, L_0 jsou lineární diferenciální operátory působící v $x \in \mathbb{R}^n$ s koeficienty třídy $\mathcal{C}^\infty$. Potom u_0 definované jako

$$(u_0(x), \varphi(x)) := (u(t,x), \varphi(x)\eta(t)),$$

kde $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ je libovolná taková, že $u(t,x) = \eta(t)u(t,x)$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{1+n})$ a $\eta(0) = 1$ (ukažte si, že takové existují), je řešením rovnice

$$L_0 u_0 = f.$$

Důkaz. Tvrzení je konstruktivní, stačí tedy jen ověřit tvrzení. Upravíme levou stranu

$$(L_0 u_0(x), \varphi(x)) := (u_0(x), \tilde{L}_0\varphi(x)),$$

kde operátor $\tilde{L}_0$ získáme přímočarou obměnou z operátoru L_0 (změny ve znaménkách, pořadí násobení a derivování; např. pro $L_0 = a(x)\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}$ je $\tilde{L}_0 = (-1)^3 \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}(a(x)\cdot))$.

Dále pokračujeme pomocí šikovného vyjádření nuly:

$$(u_0(x), \tilde{L}_0\varphi(x)) = (u(t,x), \tilde{L}_0\varphi(x)\eta(t)) + \underbrace{\sum_{k=1}^n \left(u(t,x), \left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}\tilde{L}_k\right)(\varphi(x)\eta(t))\right)}_{=0} =$$

$$= \left(u(t,x), \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^k}{\partial t^k}\tilde{L}_k + \tilde{L}_0\right)(\varphi(x)\eta(t))\right) = \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^k}{\partial t^k} L_k + L_0\right) u(t,x), \varphi(x)\eta(t)\right) =$$
$$= (\delta(t) \otimes f(x), \varphi(x)\eta(t)) = (f(x), \varphi(x)),$$

kde jsme v předposledním kroku využili zavedení pomocné η funkce, jejíž (nutná) funkční hodnota rovna jedné je protažena až do počátku. □

Poznámka. Je-li funkce $u(t,x) \in \mathscr{D}'_{reg}$ a $\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\mathrm{d}t \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, tak lze $u_0(x)$ určit jednodušším předpisem:

$$(u_0(x), \varphi(x)) := (u(t,x), \varphi(x)\eta(t)) = \int_{\mathbb{R}^{1+n}} u(t,x)\varphi(x)\eta(t)\mathrm{d}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t u(t,x)\right).$$

Tedy pozorujeme, že $u_0(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t\ u(t,x)$.

Podobně je-li řešení vícerozměrného problému separovatelné a v proměnné sestupu působí jako Diracova δ funkce, $u(t,x) = \delta(t) \otimes v(x)$, pak $u_0(x) = v(x)$.

Laplaceova rovnice Laplaceův operátor je eliptický operátor v normálním tvaru

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

Fundamentální řešení v jedné dimenzi je triviální, naopak ve dvou dimenzích je obtížně získatelné (i ověřením) a má tvar

$$\mathscr{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \|x\|.$$

Pro $n \geq 3$ užijeme k nalezení fundamentálního řešení metodu sestupu z fundamentálního řešení rovnice vedení tepla v proměnné t (co volíme za f z metody?). Budeme vycházet z první poznámky, byť se opět jedná o případ za hranicí námi ukázané funkčnosti metody (totiž fundamentální řešení rovnice vedení tepla nemá omezený nosič v t). Formálně tedy získáváme

$$u_0(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\Theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \mathrm{d}t$$

Provedeme substituci v integrační proměnné, $\frac{\|x\|^2}{4t} = u$, tedy dostáváme

$$\mathscr{E}_n(x) = u_0(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \frac{4^{n/2}}{4} \|x\|^{-n+2} \int_0^{+\infty} u^{\frac{n}{2}-2} e^{-u} \mathrm{d}u = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{4\pi^{\frac{n}{2}} \|x\|^{n-2}}.$$

Speciálně pro třetí dimenzi dostáváme obvyklý tvar

$$\mathscr{E}_3(x) = \frac{1}{4\pi \|x\|}.$$

Vlnová rovnice Připomínáme tvar vlnové rovnice v $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_{x,y,z},$$

přičemž na cvičeních bude relativně snadno ukázáno, že fundamentální řešení je tvaru

$$\mathscr{E}_3(t,x) = \frac{\Theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x,y,z).$$

Opět užijeme metodu sestupu k nalezneme fundamentální řešení v prostorové dimenzi dva. Je však tedy třeba volit za proměnnou, ve které sestup provádíme, třetí prostorovou proměnnou z (rozmyslete, co je tentokráte f?). Z tvrzení věty pak postupujeme

$$(\mathscr{E}_2(t,x,y), \varphi(t,x,y)) = (\mathscr{E}_3(t,x,y,z), \varphi(t,x,y)\eta(z)) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{S_{at}} \frac{\varphi(t,x,y)}{t} \underbrace{\eta(z)}_{=1} \mathrm{d}S.$$

Jedná se o plošný integrál a cílem je přejít pouze k integracím v proměnných testovací funkce $\varphi(t,x,y)$, tj. parametrizaci kulové plochy volíme pomocí prvních dvou kartézských souřadnic:

$$z = \pm\sqrt{a^2t^2 - x^2 - y^2}$$
$$(at)^2 \geq x^2 + y^2$$
$$\left\| \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \right\| = \frac{at}{\sqrt{a^2t^2 - x^2 - y^2}}.$$

Plošný integrál tak již lze přepsat na integraci jen přes prostorové proměnné x, y a integrujeme přes dvě polokoule

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{4\pi a^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_{(at)^2\geq x^2+y^2}\mathrm{d}(x_1,x_2)\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-x^2-y^2}}\frac{\varphi(t,x,y)}{t} &= \\
&= \frac{1}{2\pi a}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}t\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}(x_1,x_2)\frac{\Theta(t)\Theta(a^2t^2-x^2-y^2)}{\sqrt{a^2t^2-x^2-y^2}}\varphi(t,x,y).
\end{aligned}
$$

Odtud již vidíme z rovnosti zobecněných funkcí, jak vypadá hledané fundamentální řešení (díky první části poznámky):

$$\mathscr{E}_2(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\Theta(t)\Theta(at-\|x\|)}{\sqrt{a^2t^2-\|x\|^2}},$$

kde jsme přepsali podmínku $(at)^2 \geq x^2+y^2$ na $at \geq \|x\|$.

4.2.5 Vhled do kvalitativního chování řešení jednotlivých typů PDR

Fundamentální řešení sice hledáme čistě jako mezikrok při hledání obecného řešení dané počáteční úlohy. Má však samotné dobrý fyzikální význam umožňující nahlédnout do kvalitativního chování řešení jednotlivých diferenciálních problémů. Totiž Diracova δ funkce je dobrou reprezentací bodového zdroje v prostoru i čase. Uvažme, co říkají jednotlivá fundamentální řešení o typech PDR.

Parabolická PDR, vedení tepla Fundamentální řešení má tvar

$$\mathscr{E}_n(t,x)=\frac{\Theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}.$$

Všimněme si, že tedy po zapnutí bodově malého zdroje umístěného v počátku na okamžik v čase nula (tuto skutečnost aproximujeme pomocí Diracovy δ funkce) lze pocítit důsledky tohoto tepelného zdroje libovolně daleko od něj, a to pro libovolně malé časy. Tomuto jevu se typicky říká nekonečná rychlost šíření informace a je vlastností lineárních parabolických rovnic, tedy je součástí Fourierova zákona vedení tepla či Fickova zákona difuze. Je-li tato aproximace skutečnosti příliš hrubá, tak je třeba model vedení tepla poopravit pomocí přidání další časové škály, jak je tomu v Cattaneově modelu vedení tepla. Tím však dostáváme hyperbolický problém, který má vskutku již konečnou rychlost šíření informace (vlny). Též je vhodné poznamenat, že v případě nelineární parabolické rovnice (např. v případě, kdy tepelná vodivost λ závisí na teplotě), tak tento poznatek o rychlosti šíření nemusí být pravdou.

Difuzní rovnice, která je identická s rovnicí vedení tepla, je spojitým modelem náhodné procházky. Je však zajímavé, že jistá důležitá vlastnost náhodné procházky závisí na dimenzi a naštestí pro opilce (drunkard's walk, jak je též nazývaná náhodná procházka) se pohybujeme efektivně ve 2D, ikdyž žijeme ve třírozměrném světě. Opilec totiž s jistotou ve 2D nakonec trefí domů, ale ve vyšších dimenzích už by byl spíše neúspěšný než úspešný. Problém byl studován v Pólyově teorému a na fakultě se s ním máte možnost seznámit v rámci předmětu Náhodných procesů (intuitivně lze do tohoto problému nahlédnout z odhalené závislosti fundamentálního řešení na čase, kdy závislost amplitudy s časem je ve formě $t^{-n/2}$).

Hyperbolická PDR, vlnová rce Fundamentální řešení mají tvar

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_1(t,x)&=\frac{1}{2a}\theta(at-|x|),\\
\mathscr{E}_2(t,x)&=\frac{1}{2\pi a}\frac{\Theta(t)\Theta(at-\|x\|)}{\sqrt{a^2t^2-\|x\|^2}},\\
\mathscr{E}_3(t,x)&=\frac{\Theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x).
\end{aligned}
$$

Vidíme, že tentokráte máme konečnou rychlost šíření, a to právě vždy s rychlostí a (interval, kruh i sféra zvětšující se rychlostí a), jak jste viděli při řešení vlnové rovnice v rámci VOAF. Nicméně si povšimněte též velmi různé závislosti amplitudy na dimenzi: v jedné dimenzi amplituda neklesá, kdežto ve třech dimenzích lineárně klesá s časem. Ve dvou dimenzích pro velké časy máme též přibližně lineární pokles amplitud s časem, avšak z počátku pokles závisí i na poloze. Co to však znamená pro princip superpozice pro skládání vln v různých dimenzích?

Eliptická PDR, Laplacián Fundamentální řešení mají tvar

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_1(x) &= \Theta(x)x,\\ \mathscr{E}_2(x) &= \frac{1}{2\pi}\ln\|x\|,\\ \mathscr{E}_n(x) &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{4\pi^{\frac{n}{2}}\|x\|^{n-2}}, \quad n \geq 3\end{aligned}$$

a vidíme, že jejich funkční závislost je silně závislá na dimenzi. Například singularita v nule je ve dvou dimenzích logaritmická, avšak ve třech dimenzích hyperbolická (úměrná převrácené hodnotě vzdálenosti od počátku).

Kapitola 5

Integrální rovnice, spektrum, ON báze

Výrazem integrální se označují takové rovnice, v niž se neznámá funkce nachází za integrálem. Jak uvidíme, je zde blízká souvislost s diferenciálními rovnicemi.

Pro tyto účely uvažme následující objekty. Buď G omezená oblast v $\mathbb{R}^n$ a dále připomínáme funkční prostory s normou, na kterých budeme zkoumat řešení integrálních rovnic:

$L^2(G)$, pro funkce s normou $\|f\|_2 = \left(\int_G f(x)\bar{f}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$;

$\mathcal{C}(\bar{G})$, pro funkce s normou $\|f\|_{\mathcal{C}} = \max_{x\in\bar{G}}|f(x)|$.

Definice 5.0.1. Integrálním operátorem $\mathbf{K}$ působícím na funkci φ rozumíme

$$\mathbf{K}\varphi(x) = \int_G \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y,$$

kde $\mathscr{K}$ nazýváme integrální jádro. V našem nahlédnutí do teorie integrálních rovnic budeme uvažovat pouze spojitá integrální jádra, tj. $\mathscr{K} \in \mathcal{C}(\bar{G} \times \bar{G})$. Dále zavádíme označení:

mez jádra $M := \max_{\bar{G}\times\bar{G}}|\mathscr{K}(x,y)|$;

objem oblasti $V := \int_G 1\mathrm{d}x$.

Nejprve se zabývejme klasickým problémem v teorii integrálních rovnic.

5.1 Fredholmovy integrální rovnice

Definice 5.1.1. Fredholmovou integrální rovnicí pro funkci φ rozumíme rovnici tvaru

$$\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi + f,$$

kde $\lambda \in \mathbb{C}$, funkce f se obvykle nazývá pravá strana a $\mathbf{K}$ je integrální operátor se spojitým jádrem.

Tuto úlohu můžeme přepsat do ekvivalentní podoby $(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K})\varphi = f$ a hledáme řešení buď v $L^2(G)$ (pak $f \in L^2(G)$), nebo v $\mathcal{C}(\bar{G})$ (pak $f \in \mathcal{C}(\bar{G})$). Speciálně pro nulovou pravou stranu dostáváme úlohu na vlastní čísla operátoru $\mathbf{K}$.

5.1.1 Degenerované jádro

Definice 5.1.2. Řekneme, že integrální jádro $\mathscr{K}(x,y)$ je degenerované, jestliže je separovatelné v podobě konečné sumy, tj. existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že je možné jej zapsat ve tvaru $\mathscr{K}(x,y) = \sum_{j=1}^{p} u_j(x)v_j(y)$, kde $u_j, v_j \in \mathcal{C}(\bar{G})$.

Pro takovýto případ lze však integrální rovnici snadno vyřešit. Totiž uhodneme okamžitě strukturu řešení, když si přepíšeme Fredholmovu integrální rovnici pro degenerované jádro:

$$\varphi(x) = \lambda \mathbf{K}\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_G \sum_{j=1}^{p} u_j(x) v_j(y) \varphi(y) \mathrm{d}y + f(x) =$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{p} u_j(x) \underbrace{\int_G v_j(y)\varphi(y)\mathrm{d}y}_{c_j \in \mathbb{C}} + f(x).$$

Tedy vidíme tvar hledaného řešení

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{j=1}^{p} u_j(x) c_j + f(x).$$

Nyní zbývá určit neznámé koeficienty c_j, které lze nalézt prostým zpětným dosazením do integrální rovnice. Tento postup je ekvivalentní (i co do výpočtu) přenásobením nalezeného tvaru řešení funkcemi v_i a integrací přes prostor. Tak totiž z levé strany rovnice, z řešení, vyrobíme opět konstanty c_i. Pravá strana je pak sestavena již jen ze zadaných funkcí a neznámých konstant c_j.

Konkrétně máme řešení ve tvaru

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{j=1}^{p} u_j(x) c_j + f(x).$$

Přenásobením výrazem $v_i(x)$ a zintegrováním přes G podle x dostáváme

$$c_i = \int_G v_i(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lambda \sum_{k=1}^{p} c_k \int_G u_k(x) v_i(x) \mathrm{d}x + \int_G v_i(x) f(x) \mathrm{d}x.$$

pro všechny indexy i. Když označíme

$$A_{ik} = \int_G u_k(x) v_i(x) \mathrm{d}x, \quad b_i = \int_G v_i(x) f(x) \mathrm{d}x,$$

tak vidíme, že pro neznáme konstanty c_i máme následující systém lineárních rovnic

$$c = \lambda \mathbf{A} c + b.$$

Označme řešení c^*. Dosazením do uhodnutého tvaru řešení získáme výsledný tvar řešení integrální rovnice:

$$\varphi^*(x) = \lambda \sum_{j=1}^{p} u_j(x) c_j^*(x) + f(x).$$

Čtenář si snadno ověří, že se vskutku jedná o řešení původní integrální rovnice.

5.1.2 Iterativní metody řešení

Narozdíl od případu, kdy lze integrální rovnici snadno vyřešit (v případě degenerovaného jádra), je pro iterativní způsob řešení nutné zajistit existenci a jednoznačnost řešení (aby aproximace konvergovala k řešení). Pro tyto účely se nám budou hodit následující odhady. Dodejme snad jen, že přirozeně nutnost existence jednoznačného řešení automaticky znemožňuje užít aproximativní metody pro řešení úloh na vlastní čísla.

Věta 5.1.3. Integrální operátor $\mathbf{K}$ se spojitým jádrem $\mathscr{K}$ zobrazuje:

1. $L^2(G) \to \mathcal{C}(\bar{G})$, jelikož $\|\mathbf{K}f\|_{\mathcal{C}} \le M\sqrt{V}\|f\|_2$ pro všechny $f \in L^2(G)$;

2. $\mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(\bar{G})$, jelikož $\|\mathbf{K}f\|_{\mathcal{C}} \le MV\|f\|_{\mathcal{C}}$ pro všechny $f \in \mathcal{C}(\bar{G})$;

3. $L^2(G) \to L^2(G)$, jelikož $\|\mathbf{K}f\|_2 \le MV\|f\|_2$ pro všechny $f \in L^2(G)$.

Důkaz. Důkaz odhadů je přímočarý na základě Schwarzovy nerovnosti či odhadů pomocí suprém.

1.
$$\|\mathbf{K}f\|_{\mathcal{C}} = \max_{\bar{G}}\left|\int_G \mathscr{K}(x,y)f(y)\mathrm{d}y\right| \le \max_{\bar{G}}\left|\left(\int_G \mathscr{K}^2(x,y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_G f^2(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\right| =$$
$$= \sqrt{M^2}\max_{\bar{G}}\left(\int_G 1\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_2 = M\sqrt{V}\|f\|_2.$$

2.
$$\|\mathbf{K}f\|_{\mathcal{C}} = \max_{\bar{G}}\left|\int_G \mathscr{K}(x,y)f(y)\mathrm{d}y\right| \le \max_{\bar{G}}\int_G |\mathscr{K}(x,y)||f(y)|\mathrm{d}y \le MV\|f\|_{\mathcal{C}}$$

3.
$$\|\mathbf{K}f\|_2^2 = \int_G |\mathbf{K}f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_G\left|\left(\int_G \mathscr{K}(x,y)f(y)\mathrm{d}y\right)\right|^2\mathrm{d}x \le$$
$$\le \int_G\left[\left(\int_G |\mathscr{K}(x,y)|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_G |f(y)|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\mathrm{d}x \le$$
$$\le \int_G\left(MV^{\frac{1}{2}}\|f\|_2\right)^2\mathrm{d}x = M^2V^2\|f\|_2^2.$$

□

Definice 5.1.4. Buďte V, V_1 normované vektorové prostory. Zobrazení (operátor) $B : V \to V_1$ nazveme **omezené (omezený)**, jestliže existuje $c > 0$ takové, že pro všechna $x \in V$ platí, že
$$\|Bx\|_1 \le c\|x\|.$$
Lze ukázat, že existuje nejmenší takovéto c a splňuje definici normy. Nazveme jej normou operátoru B a značíme $\|B\|$.

Je zřejmé, že normu operátoru lze snadno určit pomocí nejmenší horní závory, tedy
$$\|B\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Bx\|_1}{\|x\|}.$$

Poznámka. Nabízí se nám tímto jiný pohled na předchozí větu. Například integrální operátor $\mathbf{K}$ na $\mathcal{C}(\bar{G})$ je omezený a pro jeho normu platí $\|\mathbf{K}\|_{\mathcal{C}} \le MV$.

Poznámka. Skládáním omezených operátorů získáme opět omezený operátor. Totiž $\|BCx\| = \|B(Cx)\| \le \|B\|\|Cx\| \le \|B\|\|C\|\|x\|$ a tedy dokonce platí odhad $\|BC\| \le \|B\|C\|$.

Věta 5.1.5. Buďte $(V, \|\cdot\|), (V_1, \|\cdot\|_1)$ normované prostory a buď $B : V \to V_1$ *lineární* operátor. Pak následující výroky jsou ekvivalentní :

1. B je omezený;

2. B je spojitý;

3. B je spojitý v bodě.

Důkaz. 1 $\Rightarrow$ 2

$$\|Bx - By\|_1 = \|B(x-y)\|_1 \leq \|B\|\|x-y\|$$

Odtud již z omezenosti plyne spojitost.

2 $\Rightarrow$ 3 Je zřejmé, že zobrazení, které je spojité (tedy je spojité v každém bodě svého definičního oboru), je spojité v bodě.

3 $\Rightarrow$ 1 Buď B spojité bez újmy na obecnosti v $x_0 = 0$ (z linearity bod mohu posunout). To znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \|x\| < \delta \Rightarrow \|Bx\|_1 < \varepsilon.$$

Volme $\varepsilon = 1$. Pak na okolí počátku máme $\|x\| < \delta \Rightarrow \|Bx\|_1 < 1$. Vezměme nyní libovolné $y \in V$, $y \neq 0$, které šikovně zmenšíme do dostatečně malého okolí nuly, aby platila nerovnost pro obraz při zobrazení B. Totiž

$$\left\| \frac{\delta}{2} \frac{y}{\|y\|} \right\| < \delta \Rightarrow \left\| B\left(\frac{\delta}{2} \frac{y}{\|y\|} \right) \right\|_1 < 1,$$

což je ekvivalentí nerovnosti

$$\frac{\delta}{2} \frac{1}{\|y\|} \|By\|_1 < 1 \Leftrightarrow \|By\|_1 < \frac{2}{\delta} \|y\|.$$

□

Poznámka. Nabízí se nám tedy ještě jiný pohled na větu s odhady. Fredholmův integrální operátor je omezený a spojitý (a lineární) jakožto zobrazení $L^2(G) \to \mathcal{C}(\bar{G})$, $\mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(\bar{G})$, $L^2(G) \to L^2(G)$.

5.1.3 Metoda postupných aproximací na $\mathcal{C}(\bar{G})$

Předpokládejme, že $f \in \mathcal{C}(\bar{G})$ a hledejme funkci $\varphi \in \mathcal{C}(\bar{G})$, která bude řešit úlohu

$$\varphi(x) = \lambda \mathbf{K} \varphi(x) + f(x). \tag{5.1}$$

Jak název metody napovídá, budeme se snažit najít řešení iterací. Definujme posloupnost rekurentním vztahem

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f(x), \\ \varphi_{k+1}(x) &= \lambda \mathbf{K} \varphi_k(x) + f(x). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Získáváme posloupnost funkcí $\varphi_k(x) \in \mathcal{C}(\bar{G})$, a tedy pokud se jedná o posloupnost stejnoměrně konvergentních funkcí, tak limitní funkce je opět spojitá, lze zaměnit integrál a posloupnost, a tedy skutečně získáváme řešení integrální rovnice. V detailu je toto předmětem následujícího tvrzení.

Věta 5.1.6. Buď $|\lambda| < \frac{1}{MV}$. Pak posloupnost $\varphi_k \overset{\bar{G}}{\rightrightarrows} \varphi$, kde funkce φ je jediným řešením rovnice $\varphi(x) = \lambda \mathbf{K} \varphi(x) + f(x)$.

Důkaz. Definiční rekurentní vztah má explicitní řešení

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda^j \mathbf{K}^j f + f,$$

jak ověříme matematickou indukcí. Pro $k = 0, 1$ je vztah dle definice výše zřejmě splněn. Proto se zaměřme na přechod od k ke $k+1$:

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1} = \lambda \mathbf{K} \varphi_k + f = \lambda \mathbf{K} \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda^j \mathbf{K}^j f + f \right) + f &= \sum_{j=1}^{k} \lambda^{j+1} \mathbf{K}^{j+1} f + \lambda \mathbf{K} f + f = \\ &= \sum_{j=2}^{k+1} \lambda^j \mathbf{K}^j f + \lambda \mathbf{K} f + f = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda^j \mathbf{K}^j f + f. \end{aligned}$$

Pro ukázání stejnoměrné konvergence funkční posloupnosti φ_k stačí ukázat, že řada $\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j \mathbf{K}^j f$ konverguje stejnoměrně. To ukážeme z Weierstrassovy věty srovnáním s konvergentní číselnou majorantou. Totiž řada $\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j \mathbf{K}^j f$ konverguje stejnoměrně na $\bar{G}$, pokud číselná řada $\sum_{j=1}^{+\infty} \|\lambda^j \mathbf{K}^j f\|_{\mathcal{C}}$ konverguje. Pro každý jednotlivý člen sumy platí odhad ze skládání omezených operátorů:

$$\|\lambda^j \mathbf{K}^j f\|_{\mathcal{C}} = |\lambda^j| \|\mathbf{K}^j f\|_{\mathcal{C}} \leq |\lambda|^j \|\mathbf{K}^j\|_{\mathcal{C}} \|f\|_{\mathcal{C}} \leq |\lambda|^j \|\mathbf{K}\|_{\mathcal{C}}^j \|f\|_{\mathcal{C}} \leq |\lambda M V|^j \|f\|_{\mathcal{C}}.$$

Jelikož je $\|f\|_{\mathcal{C}}$ konstanta, je možné ji z řady vytknout a díky předpokladům je výraz v závorce ostře menší než jedna, tudíž řada (geometrická) konverguje.

Jednoznačnost si čtenář snadno ukáže sporem. □

Poznámka. Předpoklad věty na velikost parametru λ má poněkud hlubší význam, jak naznačíme níže.

Poznámka. Z důkazu vyplynulo, že řešení je limitou (stejnoměrně konvergentních) částečných součtů

$$\varphi(x) = \lim_{k \to +\infty} \varphi_k(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j \mathbf{K}^j f(x) + f(x).$$

Později ukážeme, že $\mathbf{K}^j$ je opět integrální operátor s jádrem, které označíme $\mathscr{K}_j(x, y)$. Využijme nyní této znalosti a zkusme přepsat obdržený výraz pomocí záměny pořadí integrace a nekonečné sumy (korektnost ověříme později):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j \mathbf{K}^j f(x) + f(x) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j \int_G \mathscr{K}_j(x, y) f(y) \mathrm{d}y + f(x) = \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j \int_G \mathscr{K}_{j+1}(x, y) f(y) \mathrm{d}y + f(x) = \lambda \int_G \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j \mathscr{K}_{j+1}(x, y) \right) f(y) \mathrm{d}y + f(x). \end{aligned}$$

Vidíme, že se nám povedlo jaksi invertovat původní problém, a sice pomocí integrálního operátoru, který vychází pouze z původního integrálního operátoru a je nezávislý na pravé straně f, na rozdíl od metody postupných aproximací.

Výraz $\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j \mathscr{K}_{j+1}(x, y)$ nazýváme *rezolventa* a označujeme jej $\mathscr{R}(x, y, \lambda)$. Pomocí rezolventy je pak možné napsat funkci $\varphi(x)$ ve tvaru:

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathscr{R}(x, y, \lambda) f(y) \mathrm{d}y + f(x).$$

Tedy se zdá rozumné prozkoumat více toto alternativní zapsání (jednoznačného) řešení. Učiníme tak v následující sekci, která nese jméno metoda iterovaných jader, jelikož je založena právě na jádrech mocnin původního integrálního operátoru, tj. $\mathscr{K}_j(x, y)$.

5.1.4 Metoda iterovaných jader

Začněme pozorováním, že složením integrálních operátorů dostaneme opět integrální operátor. Získáme tím i (rekurentní) vztah pro iterovaná jádra.

Poznámka. Buďte $K, L : \mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(\bar{G})$ integrální operátory se spojitými jádry $\mathscr{K}(x, y), \mathscr{L}(x, y)$. Pak operátor (KL) je opět integrálním operátorem a $KL : \mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(\bar{G})$. Složený operátor působí na funkci f následovně:

$$\begin{aligned} (KLf)(x) = K(Lf(z))(x) = \int_G \mathscr{K}(x, z) Lf(z) \mathrm{d}z = \int_G \mathscr{K}(x, z) \left(\int_G \mathscr{L}(z, y) f(y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \\ = \int_G f(y) \left(\int_G \mathscr{K}(x, z) \mathscr{L}(z, y) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Odtud získáváme nejen závěr, že KL je vskutku integrální operátor, ale navíc jeho jádro je $\int_G \mathscr{K}(x,z)\mathscr{L}(z,y)\mathrm{d}z$, což je spojitá funkce. Odsud konečně plyne, že se opravdu jedná o zobrazení do spojitých funkcí.

Dále užijeme-li tato pozorování pro K^j, získáme rekurentní vztah pro posloupnost iterovaných jader:

$$\mathscr{K}_{j+1}(x,y) = \int_G \mathscr{K}(x,z)\mathscr{K}_j(z,y)\mathrm{d}z = \int_G \mathscr{K}_j(x,z)\mathscr{K}(z,y)\mathrm{d}z.$$

Pokud tedy vyjasníme možnost záměny v předešlých úpravách, dostaneme onu jinou možnost výpočtu jednoznačného řešení pomocí rezolventy. Shrňme nyní metodu do věty.

Věta 5.1.7. Je-li $|\lambda| < \frac{1}{MV}$, pak řada $\mathscr{R}(x,y,\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \mathscr{K}_{k+1}(x,y)$ konverguje v $\mathcal{C}(\bar{G}\times\bar{G})$. Řadu $\mathscr{R}$ nazýváme resolventní jádro. Toto jádro je spojité na $\bar{G}\times\bar{G}\times B_{\frac{1}{MV}}(0)$. Navíc řešení φ rovnice $\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi + f$ je

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_G \mathscr{R}(x,y,\lambda)f(y)\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Zbývá tedy pouze ukázat, že $\mathscr{R}$ je stejnoměrně konvergentní. Pak je možné v postupu provést záměnu a tím je tvrzení dokázáno. K vyšetření stejnoměrné konvergence opět použijeme Weierstrassovu větu srovnávající vyšetřovanou řadu s číselnou řadou, jejíž součet vypočteme. Buď proto $x, y \in \bar{G}$ libovolná. Pak

$$|\mathscr{K}_{p+1}(x,y)| = \left|\int_G \mathscr{K}(x,z)\mathscr{K}_p(z,y)\mathrm{d}z\right| \leq MV\max_{\bar{G}\times\bar{G}} |\mathscr{K}_p(x,y)|\,.$$

Jelikož jsme získali ve skutečnosti stejnoměrný odhad, máme

$$\|\mathscr{K}_{p+1}\|_{\mathcal{C}} \leq MV\,\|\mathscr{K}_p\|_{\mathcal{C}}\,,$$

tedy pokud odhadneme první člen, získáme odhad na všechny členy argumentu číselné řady. Pro první člen platí

$$|\mathscr{K}_1(x,y)| \leq |\mathscr{K}(x,y)| \Rightarrow \|\mathscr{K}_1\|_{\mathcal{C}} = M,$$

a tedy

$$\|\mathscr{K}_p\|_{\mathcal{C}} \leq M^p V^{p-1}.$$

Jelikož pro každý člen řady platí odhad $|\lambda^k\mathscr{K}_{k+1}(x,y)| \leq \left\|\lambda^k\mathscr{K}_{k+1}\right\|_{\mathcal{C}}$, tak $\sum\left\|\lambda^k\mathscr{K}_{k+1}\right\|_{\mathcal{C}}$ je číselnou majorantou $\mathscr{R}$. Navíc pro ni platí

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left\|\lambda^k\mathscr{K}_{k+1}\right\|_{\mathcal{C}} \leq \sum_{k=0}^{+\infty}|\lambda|^k M^{k+1}V^k = \frac{M}{1-|\lambda|MV} < +\infty.$$

Tedy nalezli jme číselnou majorantu k $\mathscr{R}(x,y,\lambda)$ pro libovolné x, y z uvažovaného definičního oboru. Ze stejnoměrné konvergence na omezené množině plyne záměna v Lebesgueově integrálu. □

5.2 Volterrovy integrální rovnice

Nyní uvažme integrální rovnici, která má složitější závislost na nezávislé proměnné.

Definice 5.2.1. Buď $G = (0,a)$, kde $a > 0$. Pak **Volterrovou integrální rovnicí** nazýváme rovnici tvaru

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^x \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y + f(x) = \lambda\mathbf{K}\varphi + f.$$

Jak je patrné, metoda degenerovaného jádra zde neumožňuje uhodnout strukturu řešení. Jsme nuceni tedy pro její řešení užít pouze iterativních metod, kde však, jak ukážeme, bude k dispozici díky závislosti v horní mezi lepší odhad a tedy větší okruh platnosti metod.

Nejprve však rozmysleme souvislost s Fredhlomovými integrálními rovnicemi. Totiž rozšířením integrálního jádra nulou na patřičném trojúhelníku lze Volterrovu integrální rovnici převést na Fredholmovu:

$$\lambda \mathbf{K}\varphi + f = \lambda \int_G \widetilde{\mathscr{K}}(x,y)\varphi(y) + f(x) = \lambda \widetilde{\mathbf{K}}\varphi + f,$$

kde doplněné jádro je definováno jako

$$\widetilde{\mathscr{K}}(x,y) = \begin{cases} \mathscr{K}(x,y), & \text{pro } 0 \le y < x < a, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases},$$

a tedy $\widetilde{\mathbf{K}}$ je Fredholmův integrální operátor.

Lze nahlédnout, že Volterrovo integrální jádro působí nenulově na množině, kterou je v $\mathbb{R}^2$ pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, který má jednu z odvěsen na x-ové ose. Volterrův integrální operátor je tak speciálním případem Fredholmova integrálního operátoru, jehož jádro však nemusí (typicky není) být spojité. Nejedná se tedy o speciální případ předchozí kapitoly.

5.2.1 Iterativní metody

Nejprve si připravíme rekurentní vztah pro iterovaná jádra a odhad pro normu mocniny operátoru. Platnost metod pak již bude triviální.

Pro iterovaná jádra můžeme použít vztahu získaného pro jádra Fredholmových operátorů:

$$\widetilde{\mathscr{K}_{k+1}}(x,y) = \int_0^a \widetilde{\mathscr{K}}(x,z)\widetilde{\mathscr{K}_k}(z,y)\mathrm{d}z = \int_y^x \mathscr{K}(x,z)\mathscr{K}_k(z,y)\mathrm{d}z,$$

kde jsme využili toho, že jádro $\widetilde{\mathscr{K}}(x,z)$ je nenulové pouze pro $0 < z < x < a$ a naopak $\widetilde{\mathscr{K}_k}(z,y)$ je nenulové pro $0 < y < z < a$. Zároveň však je výsledek nenulový pouze v případě, že $y < x$ (integrál je nulový, nemění pouze znaménko), a tedy vidíme, že skládáním Volterrových integrálních operátorů vzniká opět Volterrův integrální operátor, který je nenulový jen na trojúhelníku $0 < y < x < a$. Dále jeho nenulové hodnoty jsou dány hodnotami $\mathscr{K}_{k+1}(x,y) = \int_y^x \mathscr{K}(x,z)\mathscr{K}_k(z,y)\mathrm{d}z$.

Lemma 5.2.2. Buď $\mathbf{K}$ Volterrův integrální operátor. Pak pro všechna $p \in \mathbb{N}_0$ a pro všechna $x \in [0,a]$ platí

$$|\mathbf{K}^p\varphi(x)| \le \frac{(Mx)^p}{p!}\|\varphi\|_{\mathcal{C}}.$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $p = 0$ zjevně platí. Pro $p = 1$ platí:

$$|\mathbf{K}\varphi(x)| = \left|\int_0^x \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y\right| \le \int_0^x |\mathscr{K}(x,y)||\varphi(y)|\mathrm{d}y \le Mx\|\varphi\|_{\mathcal{C}}.$$

Nyní provedeme indukční krok $p \mapsto p+1$:

$$|\mathbf{K}^{p+1}\varphi(x)| = |\mathbf{K}(\mathbf{K}^p\varphi(x))| \le \int_0^x |\mathscr{K}(x,y)||\mathbf{K}^p\varphi(y)|\mathrm{d}y \le \int_0^x M\frac{(My)^p}{p!}\|\varphi\|_{\mathcal{C}}\mathrm{d}y = \frac{(Mx)^{p+1}}{(p+1)!}\|\varphi\|_{\mathcal{C}}.$$

□

Přímým důsledkem je pak stejnoměrný odhad

$$\|\mathbf{K}^p\varphi\|_{\mathcal{C}} \le \frac{(Ma)^p}{p!}\|\varphi\|_{\mathcal{C}}.$$

Když si však připomeneme důkaz konvergence metody postupných aproximací, tak klíčovým krokem bylo ukázat stejnoměrnou konvergenci aproximativní posloupnosti tvořenou částečnými součty $\varphi_k = \sum_{j=0}^k \lambda_j \mathbf{K}^j f + f$. Ta však nyní plyne z odhadu dokonce pro libovolné hodnoty λ, jelikož

$$\|\lambda^p \mathbf{K}^p f\|_{\mathcal{C}} \leq |\lambda|^p \|f\|_{\mathcal{C}} \frac{(Ma)^p}{p!},$$

a tedy v součtu dostáváme konvergující číselnou řadu pro libovolné λ (exponenciela).

Podobně také u metody postupných aproximací bylo třeba znát odhad $\|\mathbf{K}^p \varphi\|_{\mathcal{C}}$ kvůli nalezení integrabilní majoranty. Opět řada bude konvergovat pro libovolné λ.

Věta 5.2.3. Volterrova integrální rovnice $\varphi(x) = \lambda \int_0^x \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y + f(x)$ má pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$ a pro všechny spojité funkce $f \in \mathcal{C}([0,a])$ právě jedno řešení $\varphi(x) \in \mathcal{C}([0,a])$.

5.3 Spektrum, ortonormální báze a vlastnosti integrálních operátorů

V této sekci rozvineme již dříve lehce zmíněný pojem ortonormální báze v nekonečně rozměrném prostoru a uvedeme si několik kvalitativních vlastností integrálních operátorů (na základě převzaných poznatků z funkcionální analýzy). Tato pozorování, jak uvidíme v poslední kapitole, nejen zkoumají integrální operátory, ale umožní nám i vhled do třídy eliptických parciálních diferenciálních rovnic, kde ukážeme, že jistý inverzní operátor k diferenciálnímu bude integrální operátor daných potřebných vlastností. Tímto propojením budeme schopni snadno sestrojovat explicitní příklady ortonormálních bází ve funkčním prostoru $L^2(G)$ včetně známých rozvojů do Fourierových řad.

Začneme definicí pojmu spektrum operátoru následovaný definicí ortonormální báze. Vždy si nejprve připomeneme konečněrozměrný případ, který důvěrně známe z předchozích ročníků a uvidíme tak souvislosti a rozdíly proti konečné dimenzi.

Mějme lineární operátor $T : X \to X$ na Banachově prostoru. Zkoumejme řešitelnost rovnice

$$(T - \lambda I)x = y \tag{5.3}$$

v závislosti na $\lambda \in \mathbb{C}$ a $y \in X$. Řešitelnost je samozřejmě úzce spjata s pojmem spektra. Připomeňme, že z lineární algebry (tj. pro X konečně dimenzionální) víme, že spektrum operátoru T je množina

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists x \in X,\ x \neq 0,\ Tx = \lambda x\}.$$

Rovněž víme, že

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \det(T - \lambda I) = 0,$$

čímž se oddělil problém řešitelnosti od samotného řešení.

Jelikož na prostorech konečné dimenze jsou pojmy regularita, prostota a surjektivita ekvivalentní, tak můžeme řešitelnost a spektrum dále ekvivalentně přeformulovávat, jak si nyní naznačíme.

Je-li $y = 0$, má rovnice (5.3) řešení, právě když $\lambda \in \sigma(T)$. Naopak jestliže je $y \neq 0$, operátor $(T - \lambda I)$ je bijekcí, právě když $\lambda \notin \sigma(T)$. Odtud máme možnost jiné definice spektra:

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \varrho(T),$$

kde $\varrho(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \text{ existuje a je omezený}\right\}$.

Na prostorech nekonečné dimenze však tato vyjádření ekvivalentními nejsou. Ukazuje se, že vhodnější definice spektra je ta poslední varianta.

Definice 5.3.1. Spektrem operátoru $T : X \to X$ (X je Banachův prostor) rozumíme

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \varrho(T),$$

kde $\varrho(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \text{ existuje a je omezený}\right\}$ a $\varrho(T)$ nazýváme rezolventní množina.

Spektrum je doplňkem, tedy existence omezeného inverzního operátoru nenastává. Spektrum dále dělíme podle důvodů, proč operátor $(T-\lambda I)^{-1}$ neexistuje. Mějme tedy $\lambda \in \sigma(T)$. Pak

1. $(T-\lambda I)$ není prosté, a tedy k němu neexistuje inverzní operátor. Množinu těchto čísel nazýváme *bodové spektrum* a označujeme $\sigma_p(T)$.

2. Inverzní operátor existuje, ale není surjektivní. Jestliže je

   $\overline{\operatorname{Ran}(T-\lambda I)} = X$, pak říkáme, že λ leží ve *spojitém spektru*, tj. $\lambda \in \sigma_c(T)$;

   $\overline{\operatorname{Ran}(T-\lambda I)} \neq X$, pak říkáme, že λ leží v *reziduálním spektru*, tj. $\lambda \in \sigma_r(T)$.

Odtud tedy plyne, že spektrum je možné zapsat jako sjednocení bodového, spojitého a reziduálního spektra, tj.

$$\sigma = \sigma_p \cup \sigma_c \cup \sigma_r.$$

Studiem spektra se zabývá kurz funkcionální analýzy.

Definice 5.3.2. $R_T(\lambda) = (T-\lambda I)^{-1}$ se nazývá **rezolventní funkcí operátoru** T. Omezené operátory $R_T(\lambda)$ nazýváme rezolventou operátoru v λ.

Zaměřme se nyní na souvislost s integrálními rovnicemi. Zavedený název rezolventa v integrálních rovnicích odpovídá obdobnému pojmu zde v definici spektra. Můžeme též jinak nahlédnout na roli parametru λ v integrálních rovnicích:

$$\varphi = \lambda \mathbf{K}\varphi + f \Leftrightarrow \left(\mathbf{K} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{I}\right)\varphi = \widetilde{f} = -\frac{1}{\lambda} f,$$

a tedy nemá smysl hledat řešení pro $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(\mathbf{K})$. Podobně pak pro $f = 0$ existuje (nekonečně mnoho) řešení pouze pro $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(\mathbf{K})$.

Nyní učiníme pozorování o souvislosti lokalizaci spektra a normy omezeného operátoru, které nám umožní opět jiný pohled na omezující podmínku na parametr λ v iterativních metodách řešení integrálních rovnic.

Lemma 5.3.3. Je-li B omezený operátor a $\|I-B\| < 1$, pak existuje B^{-1} omezený operátor.

Důkaz. Důkaz bude překvapivě konstruktivní. Z faktu, že $\|I-B\| < 1$, plyne, že posloupnost $\|I-B\|^n$ konverguje k nule. Odtud vidíme z odhadu

$$\left\| \sum_{j=m+1}^{n} (I-B)^j \right\| \leq \sum_{j=m+1}^{n} \|(I-B)\|^j ,$$

že částečné součty $S_k = \sum_{j=0}^{k} (I-B)^j$ jsou Cauchyovské posloupnosti. Jelikož je prostor omezených operátorů na Banachově prostoru opět Banachův (FA), existuje limita posloupnosti S_k v omezených operátorech. Označme jí $\lim_{k\to+\infty} S_k = S$. Dále platí, že

$$\begin{aligned} BS_k = S_k B &= S_k - S_{k+1} + I \\ &\downarrow \lim \\ BS = SB &= I \end{aligned}$$

Tedy $S = B^{-1}$. $\square$

Věta 5.3.4. Buď T omezený operátor , pak $\sigma(T) \subset B_{\|T\|}(0)$.

Důkaz. Volme λ takové, že $|\lambda| > \|T\|$. Budeme chtít ukázat, že při této volně již λ leží v rezolventní množině $\varrho(T)$. Proto definujme operátor A jako:

$$A = I - \frac{1}{\lambda} T$$

Tento operátor je omezený, jelikož lineární kombinace omezených operátorů je omezený operátor. Dále z konstrukce $\|I - A\| < 1$, a tedy dle předchozího lemmatu existuje A^{-1} omezený operátor. Nyní zkoumejme operátor z definice rezolventní množiny.

$$(T - \lambda I)^{-1} = (\lambda)^{-1}(I - \frac{1}{\lambda}T)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

Odsud již máme $\lambda \in \varrho(T)$. □

Poznámka. Pro integrální operátor $\mathbf{K} : \mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(\bar{G})$ jsme ukázali, že je omezený a navíc $\|\mathbf{K}\|_{\mathcal{C}} \leq MV$. Tedy jelikož hledat řešení integrální rovnice dává smysl jen pro $\frac{1}{\lambda} \in \varrho(\mathbf{K})$ z rezolventní množiny, vidíme, že podmínka $\lambda < 1/(MV)$ zaručuje právě tuto skutečnost.

Dále pro $f = 0$ existuje řešení jen pro $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(\mathbf{K})$, a tedy aproximativní metody nemohou fungovat, jelikož řešeních existuje nekokněčně mnoho.

Z funkcionální analýzy převezměme nyní dvě pozorování o vlastnostech integrálních operátorů.

Věta 5.3.5. Integrální operátor $\mathbf{K} : \mathcal{C}(\bar{G}) \to \mathcal{C}(\bar{G})$ se spojitým jádrem (je kompaktní, a tedy)[1] má čistě bodové spektrum kromě 0, tj. $\sigma = \sigma_p$, všechny vlastní hodnoty mají konečnou násobnost a nemají nenulový hromadný bod.

Věta 5.3.6 (Hilbert-Schmidtova věta)**.** Buď $\mathbf{K} : L^2(G) \to L^2(G)$ integrální operátor se spojitým jádrem $\mathscr{K}(x, y)$, které navíc splňuje $\mathscr{K}(x, y) = \overline{\mathscr{K}(y, x)}$ (operátor je samosdružený). Pak $\mathbf{K}$ má čistě bodové spektrum kromě 0 a z vlastních funkcí operátoru $\mathbf{K}$ lze sestavit ortonormální bázi.

Nakonec si vyjasněme, co znamená pojem ortonormální (ortogonální) báze v $L^2(G)$. Jedná se opět o přirozené rozšíření klasické definice báze a pojmů ortogonální, resp. ortonormální, množina z lineární algebry.

Předně je vhodné si uvědomit, že vskutku $L^2(G)$ je prostorem nekonečné dimenze (jak lze nahlédnout z Fourierových řad či ověřením ortogonality, a tedy lineární nezávislosti

$$\left\{1, \sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right), \cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) : n \in \mathbb{N}\right\},$$

v $L^2(0, l)$.

Definice 5.3.7. O množině M řekneme, že je ortonormální (ON), resp. ortogonální (OG), bází Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$, jestliže

1. M je ortonormální, resp. ortogonální, množina;
2. $\overline{M_{lin}} = \mathcal{H}$, tj. množina všech lineárních kombinací prvků z M je hustá v prostoru $\mathcal{H}$ (takováto M se též nazývá totální množina).

Věta 5.3.8. Následující výroky o množině OG množině $M \subset \mathcal{H}$ jsou ekvivalentní:

1. Množina M je OG bází v $\mathcal{H}$;
2. $M^{\perp} = \{0\}$;
3. M je maximální OG množina v $\mathcal{H}$, tj. není vlastní podmnožinou jiné OG množiny;
4. $\forall x \in \mathcal{H}$ platí $x = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \beta_\alpha m_\alpha$ pro β_α z tělesa (tj. $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) a $m_\alpha \in M$. $\mathcal{I}$ je indexová množina, která je obecně nespočetná, ale důležité funkční prostory jsou typicky tzv. separabilní, tj. existuje nejvýše spočetná ortonormální báze.

Uveďme některé příklady ortogonálních bází na prostoru funkcí lebegueovsky integrovatelných s kvadrátem.

[1] Informace v závorkách tu jsou čistě pro úplnost a pro zájemce o funkcionální analýzu kvůli souvislostem a provázanosti.

1. Pro $G = (-\pi, \pi)$ je to například $\{1, \sin(nx), \cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ užívané ve Fourierových řadách.

2. *Ortogonální polynomy* (resp. ON polynomy při použití Gramm-Schmidtova ON procesu) Z aproximativních vět (jmenovitě Stone-Weierstrassovy věty či obvyklé aproximace spojité funkce polynomem a z dřívější znalosti, že libovolnou funkci z L^p lze aproximovat hladkou funkcí) plyne, že každou funkci z $L^2(a,b)$ je možné libovolně přesně aproximovat polynomem. Odtud plyne, že
$$\left\{x^l : l \in \mathbb{N}_0\right\}$$
je totální množina v $L^2((a,b))$. Z tohoto souboru pak můžeme pomocí Gramm-Schmidtova ON procesu získat různou volbou skalárního součinu následující ON polynomy:

   na $L^2((0,1))$ se skalárním součinem $\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_0^1 \bar{u}(x)v(x)\mathrm{d}x$ dávají tzv. **Lagrangeovy polynomy**

   na $L^2((0,+\infty))$ se skalárním součinem $\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \bar{u}(x)v(x)e^{-x}\mathrm{d}x$ dávají tzv. **Laguerrovy polynomy**

   Hermitovy polynomy etc.

Poznámka. Obecně je možné ortogonální polynomy vyjádřit čtyřmi způsoby:

1. Gramm-Schmidtovým ortogonalizačním procesem;
2. rekurentní formulí;
3. diferenciální rovnicí;
4. Rodriguezovou formulí.

Poznámka. Závěrem poznamenejme, že integrální operátory se spojitým symetrickým jádrem mají ONB z vlastních funkcí v $L^2(G)$ s nekonečnou dimenzí. Z výše uvedených vět však plyne, že ono vynechávané vlastní číslo 0 musí mít nekonečnou násobnost, tj. přísluší mu nekonečně mnoho nezávislých vlastních funkcí, které ale neumíme nalézt pomocí nastíněných metod řešení integrálních rovnic.

Kapitola 6

Eliptické diferenciální rovnice a operátory, Sturm-Liouvilleova teorie

Vraťme se ještě k eliptickým diferenciálním rovnicím. Tento typ úloh se vyskytuje často ve fyzikálních modelech. Navíc díky konceptu ortonormální báze u eliptických operátorů lze pomocí těchto poznatků řešit i časově závislé parabolické rovnice. Skutečně, uvážíme-li stacionární problém rovnice vedení tepla, dostáváme eliptický problém. Ortonormální báze tohoto prostorového diferenciálního operátoru nám následně umožní řešit i časově závislou úlohu převodem do nekonečného systému obyčejných diferenciálních rovnic.

Definice 6.0.1. Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ omezená, otevřená množina. Nechť je dále ∂G po částech z $\mathcal{C}^1$. Buďte dále $p \in \mathcal{C}^1(\bar{G})$, $q \in \mathcal{C}(\bar{G})$ takové funkce, že $p(x) > 0$ a $q(x) \geq 0$ pro všechna $x \in G$. Pak

$$Lf(x) = -\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} f(x)) + q(x)f(x) = g(x)$$

nazýváme **Sturm-Liovilleovou úlohou** s okrajovými podmínkami (Robinovými): Existují funkce $\alpha(x), \beta(x)$ takové, že $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ a $\alpha + \beta > 0$ takové, že

$$\alpha(x)f(x) + \beta(x)\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{na} \quad \partial G,$$

kde $\vec{n}$ značí jednotkový vektor směřující ve směru vnější normály.

Poznámka. Robinovy okrajové podmínky obsahují jako speciální případy dvě velmi často uvažované okrajové podmínky. Při volbě

$\alpha = 0$ má podmínka tvar $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = 0$ na ∂G a nazývá se *homogenní Neumannova okrajová podmínka.*

$\beta = 0$ má podmínka tvar $f(x) = 0$ na ∂G a nazývá se *Dirichletova okrajová podmíka.*

Poznámka. Mohlo by se zdát, že se jedná o velmi speciální případ eliptické rovnice, kdy koeficienty u nejvyšších a prvních derivací jsou velmi úzce svázány. Není to však úplně pravda. Ukažte si, že v jedné dimenzi lze dokonce každou lineární diferenciální rovnici druhého řádu převést do Sturm-Liouvilleovy formy.

(Tento tvar má totiž zásadní výhodu - odpovídá samosdruženému operátoru vůči standardnímu skalárnímu součinu v $L^2(G)$ pro funkce splňující uvažované okrajové podmínky, jak uvidíme níže.)

Kromě hledání řešení Sturm-Liouvilleovy úlohy se budeme věnovat i vlastnostem Sturm-Liouvilleova operátoru L. Odtud totiž budou plynout ony zásadní pozorování o spektru a ortonormální bázi. Vlastnosti operátoru L se však odvíjí nejen od jeho bodového působení popsaného výše, ale i od jeho uvažovaného definičního oboru (podobně, jako je tomu u funkcí, ale zde je to zcela zásadní). Pro naše účely budeme uvažovat za definiční obor operátoru L množinu

$$\mathrm{Dom}(L) = \left\{ f \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}^1(\bar{G}) : Lf \in L^2(G) \text{ a splňují okrajové podmínky} \right\}.$$

Podotkněme, že při změně definičního oboru (např. při uvažování periodických okrajových podmínek) již nemusí níže ukázané vlastnosti operátoru L platit.

6.1 Vlastnosti L

Nejprve si upravme integrál, který se bude opakovaně vyskytovat v následujících úvahách. Mějme $u \in \mathrm{Dom}(L),\ v \in C^1(\bar{G})$. Pak

$$\int_G v(x)Lu(x)\mathrm{d}x = \int_G v(x)\left(-\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad}u(x)) + q(x)u(x)\right)\mathrm{d}x = -\int_G v(x)\left(\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad}u(x)) - q(x)u(x)\right)\mathrm{d}x =$$
$$= -\int_G \operatorname{div}(v(x)p(x)\operatorname{grad}u(x))\mathrm{d}x + \int_G (p(x)\operatorname{grad}v(x)\operatorname{grad}u(x) + v(x)q(x)u(x))\mathrm{d}x =$$
$$= -\int_{\partial G} v(x)p(x)\underbrace{\operatorname{grad}u(x)\cdot\vec{n}}_{\frac{\partial u(x)}{\partial\vec{n}}}\mathrm{d}S + \int_G (p(x)\operatorname{grad}v(x)\operatorname{grad}u(x) + v(x)q(x)u(x))\mathrm{d}x.$$

Při úpravách jsme využili

$$\operatorname{div}(v(x)p(x)\operatorname{grad}u(x)) = p(x)\operatorname{grad}v(x)\operatorname{grad}u(x) + v(x)\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad}u(x)).$$

Věta 6.1.1 (Vlastnosti S-L operátoru)**.** Buď L operátor z definice výše. Pak platí:

1. L je symetrický operátor, tj. $\forall u, v \in \mathrm{Dom}(L)$ platí $\langle u, Lv\rangle = \langle Lu, v\rangle$;
2. L je pozitivní operátor, tj. $\forall u \in \mathrm{Dom}(L)$ platí $\langle u, Lu\rangle \geq 0$;
3. L je prostý ($\ker L = 0$) či pouze konstantní funkce zobrazí L na nulu ($\ker(L) = \{\text{konst. fce}\}$). Navíc druhá možnost nastává právě tehdy, když $\alpha = 0$ a $q = 0$.
4. všechny vlastní hodnoty operátoru L jsou nezáporné, tj. $\sigma_p(L) \subset \mathbb{R}^+$;
5. vlastní funkce příslušné různým vlastním hodnotám jsou na sebe kolmé;
6. vlastní funkce lze volit reálné.

Důkaz. 1. Připomeňme si, že skalární součin na $L^2(G)$ je $\langle f, g\rangle = \int_G \bar{f}g$ a $\overline{Lf} = L\bar{f}$, jelikož operátor L má reálné koeficienty.

Pro symetrii chceme ukázat, že následující rozdíl je roven nule:

$$\langle u, Lv\rangle - \langle Lu, v\rangle = \int_G \bar{u}Lv - (\overline{Lu})v\ \mathrm{d}x = \int_G \bar{u}Lv - (L\bar{u})v\ \mathrm{d}x =$$
$$= -\int_{\partial G} p\left(\bar{u}\frac{\partial v}{\partial\vec{n}} - v\frac{\partial\bar{u}}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}S + \int_G [p\operatorname{grad}\bar{u}\operatorname{grad}v + \bar{u}vq - (p\operatorname{grad}v\operatorname{grad}\bar{u} + v\bar{u}q)]\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\int_{\partial G} p\left(\bar{u}\frac{\partial v}{\partial\vec{n}} - v\frac{\partial\bar{u}}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

Tento poslední výraz je roven nule, jak ukážeme z okrajových podmínek. Víme $\alpha\bar{u} + \beta\frac{\partial\bar{u}}{\partial\vec{n}} = 0,$ na ∂G, $\alpha v + \beta\frac{\partial v}{\partial\vec{n}} = 0,$ na ∂G, což lze však přepsat maticově jako:

$$\begin{pmatrix} \bar{u} & \frac{\partial\bar{u}}{\partial\vec{n}} \\ v & \frac{\partial v}{\partial\vec{n}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jelikož však $\alpha + \beta > 0$ v každém bodě hranice, tak víme, že matice soustavy musí být singulární, tj.
$$\bar{u}\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial \bar{u}}{\partial \vec{n}} = 0.$$
Tedy vskutku operátor je symetrický.

2. Nyní máme ukázat, že $\langle u, Lu\rangle \geq 0$. Postupujeme obdobně:
$$\langle u, Lu\rangle = \int_G \bar{u}Lu\mathrm{d}x = -\int_{\partial G} \bar{u}p\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}S + \int_G p\,\mathrm{grad}\bar{u}\,\mathrm{grad}u + \bar{u}uq\mathrm{d}x =$$
$$= -\int_{\partial G} \bar{u}p\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}S + \int_G p\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 + q|u|^2\mathrm{d}x.$$
Integrandy v objemovém integrálu jsou oba nezáporné díky vlastnostem funkcí p, q.

První integrand je nezáporný kvůli okrajovým podmínkám, jak nyní ukážeme. Mohou nastat tři situace. Uvažme nejprve body z hranice, kde platí Neumannova podmínka, tj. x_0 takové, že $\alpha(x_0) = 0$ a $\beta(x_0) > 0$, kdy podmínka přechází na tvar $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x_0) = 0$. Vidíme tedy, že v částech hranice, které odpovídají Neumannově okrajové podmínce, hraniční integrál mizí. Stejně lze ukázat, že v bodech hranice, kde platí Dirichletova okrajová podmínka, hraniční integrál mizí.

Konečně označme $\Gamma = \{x \in \partial G : \alpha(x) \neq 0 \wedge \beta(x) \neq 0\}$. V takovýchto bodech hranice však platí lineární vztah mezi hodnotami funkce a její normálovou derivací. Totiž $\forall x \in \Gamma$ platí
$$\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \Leftrightarrow u = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}.$$
Dosazením do hraničního integrálu máme
$$-p\bar{u}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = p\frac{\beta}{\alpha}\overline{\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = p\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \vec{n}}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = p\frac{\beta}{\alpha}\left\|\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right\|^2 \geq 0.$$

3. Poznatky z dokazování pozitivity lze snadno využít k nalezení funkcí z jádra. Uvažme tedy $u \in kerL$. Pak z pozitivity víme
$$0 = \langle u, Lu\rangle = \int_{\partial G} p\bar{u}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}S + \int_G p\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2 + q\|u\|^2\mathrm{d}x,$$
přičemž víme, že všechny členy jsou nezáporné. Tedy aby nastala rovnost nule, musí být všechny členy najednou rovny nule. Z nulovosti druhého integrálu ihned dostáváme, že u musí být konstantní funkce ve všech proměnných. Odsud však z posledního integrálu plyne, že zároveň nutně $q = 0$. Nakonec z konstantnosti funkce u plyne, že normálová derivace je nulová, a tedy okrajová podmínka přechází na $\alpha u = 0$ na hranici. Jelikož však u je nenulová, tak vidíme, že nutně $\alpha = 0$, tj. muselo se jednat o Neumannovu okrajovou podmínku.

4. Buď λ vlastní hodnota operátoru L, tj. $Lu = \lambda u$ pro jisté $u \in \mathrm{Dom}(L)$. Pak
$$\langle u, Lu\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle u, \lambda u\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \lambda\langle u, u\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 0.$$
Poslední nerovnost plyne z pozitivity skalárního součinu.

5. Buďte λ, μ různé vlastní hodnoty operátoru L a u, v k nim příslušné vlastní vektory. Potom
$$\langle u, Lv\rangle = \langle u, \mu v\rangle \wedge \langle Lu, v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle.$$
Jelikož je ale operátor L symetrický, platí $\langle u, Lv\rangle = \langle Lu, v\rangle$, a tedy
$$\langle u, \mu v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle \Rightarrow \mu\langle u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle \Leftrightarrow (\mu - \lambda)\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0.$$

6. Předpokládejme, že $Lu = \lambda u$. Pak pomocí komplexního sdružení získáme $\overline{Lu} = \overline{\lambda u} = \lambda\bar{u}$, tedy $\lambda, \bar{u}$ též tvoří vlastní pár. Odtud víme, že i součet $u, \bar{u}$ je vlastním vektorem příslušejícím k λ. Pak ale stačí volit jako reálnou funkci $u + \bar{u}$.

□

6.2 Sturm-Liouvilleova úloha pro 1 dimenzi

Nyní konstruktivně vyřešíme obecnou obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu. Nejen, že získáme znalost řešení, ale díky předchozím poznatkům o integrálních operátorech budeme moci učinit pozorování o spektru a ortonormální bázi z vlastních vektorů Sturm-Liouvilleova operátoru. Novým klíčovým pojmem bude Greenova funkce, která, jak ukážeme, je úzce spojená s pojmem fundamentálního řešení z teorie zobecněných funkcí. Nalezneme její vlastnosti, které jí charakterizují a tuto kapitolu zakončíme poznámkou o hledání Greenových funkcích ve vyšších dimenzích.

Pro úpnost Sturm-Liouvilleova úloha má v jedné dimenzi tvar: *Buď* $G = (0, l)$*,* $l > 0$ *s hranicí* $\partial G = \{0, l\}$*. Buď dále* $p > 0$*,* $p \in \mathcal{C}^1([0, l])$ *a* $q \geq 0$*,* $q \in \mathcal{C}([0, l])$*.*

$$Lu(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\right) + q(x)u(x) = f(x)$$

s okrajovou podmínkou pro dva body na hranici: Buďte $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \geq 0$ *tak, že* $\alpha_0 + \beta_0 > 0$ *a* $\alpha_1 + \beta_1 > 0$*, pak*

$$\alpha_0 u(0) - \beta_0 u'(0) = 0^1$$
$$\alpha_1 u(l) + \beta_1 u'(l) = 0.$$

Definiční obor zůstává a předpokládejme nejprve, že operátor je prostý, tj. není pravda, že $q(x) = 0\ \forall x \in G \wedge \alpha_0 = \alpha_1 = 0$.

Spočítáme nyní řešení úlohy $Lu = f$. Budeme postupovat v několika krocích:

1. Nalezneme dvě jednostranná řešení, přesněji nalezneme dvojici nenulových funkcí v_0, v_1, která řeší úlohu $Lv_0 = 0 = Lv_1$ a splňují právě jednu z okrajových podmínek, každá jinou. Nechť tedy v_0 splňuje levou hraniční podmínku, tj.

$$\alpha_0 v_0(0) - \beta_0 v_0'(0) = 0,$$

   a v_1 splňuje pravou hraniční podmínku, tj.

$$\alpha_1 v_1(l) + \beta_1 v_1'(l) = 0.$$

2. Hledejme obecné řešení $Lu = f$ pomocí variace konstant:

$$u(x) = C_0(x)v_0(x) + C_1(x)v_1(x)$$

   Pak po dosazení do Sturm-Liouvilleova operátoru získáváme

$$\begin{aligned} Lu &= -\left(p(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x) = -\left[p(C_0'v_0 + C_0v_0' + C_1'v_1 + C_1v_1')\right]' + q(C_0v_0 + C_1v_1) = \\ &= -p'(C_0'v_0) - p(C_0'v_0)' - p(C_0v_0')' - p'(C_0v_0') - p'(C_1'v_1) - p(C_1'v_1)' - p(C_1v_1')' - p'(C_1v_1') + qC_0v_0 + qC_1v_1 = \\ &= C_0\underbrace{\left[-(pv_0')' + qv_0\right]}_{Lv_0=0} - pC_0'v_0' + C_1\underbrace{\left[-(pv_1')' + qv_1\right]}_{Lv_1=0} - pC_1'v_1' - p'(C_0v_0') - p(C_0v_0)' - p'(C_1'v_1) - p(C_1'v_1)' = \\ &= -\left[p\left(C_0'v_0 + C_1'v_1\right)\right]' - p\left(C_0'v_0' + C_1'v_1'\right) \overset{!}{=} f, \end{aligned}$$

   kde úpravy provádíme úsporně tak, abychom využili toho, že v_0, v_1 jsou řešením homogenní rovnice. Stejně jako v metodě variace konstant můžeme naložit na neznámé funkce C_0, C_1 dodatečné podmínky. Ukazuje se, že vhodná zjednodušující podmínka je

$$C_0'v_0 + C_1'v_1 = 0,$$

[1] Před derivací je vskutku znaménko mínus, jelikož normálová derivace je proti směru klasické derivace.

a tedy pro splnění rovnosti $Lu = f$ stačí, aby

$$C_0'v_0' + C_1'v_1' = -\frac{f}{p}.$$

Tuto soustavu lze maticově formulovat jako:

$$\begin{pmatrix} v_0 & v_1 \\ v_0' & v_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0' \\ C_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{f}{p} \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Matice soustavy je *Wronského matice* funkcí v_0, v_1, ozn. $\mathcal{W}(v_0, v_1)$. Jestliže ukážeme, že *wronskián* $\mathscr{W}$ je nenulový, tj. $\det \mathcal{W}(v_0, v_1) \neq 0$ pro všechna $x \in [0, l]$, tak víme, že funkce v_0, v_1 jsou lineárně nezávislá řešení homogenního problému. Následně je tedy možné tuto soustavu vyřešit, tj. najít funkce C_0 a C_1, čímž se ex post zdůvodňuje vhodnost dodatečné zjednodušující podmínky na funkce C_0, C_1.

3. Sporem ukážeme, že $\mathscr{W} = \begin{vmatrix} v_0 & v_1 \\ v_0' & v_1' \end{vmatrix} = v_0v_1' - v_1v_0' \neq 0$ pro všechna $x \in [0, l]$. Pro spor předpokládejme, že existuje bod $x_0 \in [0, l]$ takový, že $\mathscr{W}(x_0) = 0$. To ale znamená, že Wronského matice má lineárně závislé sloupce v x_0. Tedy existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ tak, že

$$\begin{pmatrix} v_0(x_0) \\ v_0'(x_0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1(x_0) \\ v_1'(x_0) \end{pmatrix}.$$

Když pak označíme rozdíl $\tilde{v}(x) = v_0(x) - \lambda v_1(x)$, tak z linearity operátoru L plyne, že $L\tilde{v} = 0$ a zároveň z nulovosti determinantu plyne $\tilde{v}(x_0) = 0$ a $\tilde{v}'(x_0) = 0$. Z jednoznačnosti řešení ale dostáváme, že $\tilde{v}$ musí být nulová funkce, tedy $v_0(x) = \lambda v_1(x)$ na $(0, l)$. To však znamená, že v_0 splňuje i pravou okrajovou podmínku, a tedy $v_0 \in \ker(L) = \{0\}$, což je spor s předpokladem prostoty operátoru.

4. Ještě ukážeme, že $p(x)\mathscr{W}(x)$ je konstantní. Toto ověříme přímým výpočtem:

$$(p\mathscr{W})' = (p(v_0v_1' - v_1v_0'))' = v_0'pv_1' + v_0\underbrace{(pv_1')'}_{qv_1} - v_1'pv_0' - v_1\underbrace{(pv_0')'}_{qv_0} = qv_0v_1 - qv_1v_0 = 0$$

5. Nalezneme funkce C_0, C_1 pomocí „invertování" rovnice 6.1

$$\begin{pmatrix} C_0' \\ C_1' \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathscr{W}} \begin{pmatrix} v_1' & -v_1 \\ -v_0' & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{f}{p} \end{pmatrix} = \frac{1}{p\mathscr{W}} \begin{pmatrix} fv_1 \\ -fv_0 \end{pmatrix}.$$

Tímto jsme identifikovali dvojici obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu, které určují funkce C_0, C_1:

$$C_0' = \frac{1}{p\mathscr{W}} v_1 f \tag{6.2}$$

$$C_1' = -\frac{1}{p\mathscr{W}} v_0 f. \tag{6.3}$$

Ještě tedy potřebujeme nalézt jednu podmínku pro každou funkci C_0, C_1, abychom získali řešení. Hledáme řešení ve tvaru $u = C_0v_0 + C_1v_1$ jež rovněž musí splňovat okrajové podmínky. Využitím toho, že v_0 splňuje levou okrajovou podmínku a vztahů pro první derivace funkcí C_0, C_1 6.2 a 6.3 dostáváme:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 u(0) - \beta_0 u'(0) = \\ &= \alpha_0 \left(C_0(0)v_0(0) + C_1(0)v_1(0)\right) - \beta_0 \left(C_0'(0)v_0(0) + C_0(0)v_0'(0) + C_1'(0)v_1(0) + C_1(0)v_1'(0)\right) = \\ &= \alpha_0 C_1(0)v_1(0) - \beta_0 v_0(0)\frac{1}{p\mathscr{W}} v_1(0)f(0) + \beta_0 v_1(0)\frac{1}{p\mathscr{W}} v_0(0)f(0) - \beta_0 C_1(0)v_1'(0) = \\ &= \left[\alpha_0 v_1(0) - \beta_0 v_1'(0)\right] C_1(0). \end{aligned}$$

Jelikož však výraz v závorce je nenulový (v_1 nemůže splňovat i levou okrajovou podmínku), tak musí $C_1(0) = 0$. Obdobnou úvahou bychom z pravé okrajové podmínky získali

$$C_0(l) = 0.$$

Nyní již prostou integrací 6.2 a 6.3 získáme hledané funkce:

$$C_0(x) - C_0(l) = \int_l^x \frac{1}{p\mathscr{W}} v_1(y) f(y) \mathrm{d}y,$$

a tedy

$$C_0(x) = -\frac{1}{p\mathscr{W}} \int_x^l v_1(y) f(y) \mathrm{d}y.$$

Pro funkci C_1 dostáváme

$$C_1(x) - C_1(0) = -\int_0^x \frac{1}{p\mathscr{W}} v_0(y) f(y) \mathrm{d}y,$$

a tedy

$$C_1(x) = -\frac{1}{p\mathscr{W}} \int_0^x v_0(y) f(y) \mathrm{d}y.$$

Konkrétní tvar řešení $u(x)$ má tedy podobu:

$$u(x) = -\frac{1}{p\mathscr{W}} \left[v_0(x) \int_x^l v_1(y) f(y) \mathrm{d}y + v_1(x) \int_0^x v_0(y) f(y) \mathrm{d}y \right] \stackrel{\text{ozn.}}{=} \int_0^l \mathscr{G}(x,y) f(y) \mathrm{d}y$$

Definice 6.2.1. Zavedením tzv. **Greenovy funkce**

$$\mathscr{G}(x,y) = -\frac{1}{p\mathscr{W}} \begin{cases} v_0(x) v_1(y), & \text{pro } 0 < x < y < l, \\ v_0(y) v_1(x), & \text{pro } 0 < y < x < l. \end{cases},$$

jsme tedy byli schopni nalézt explicitní tvar řešení diferenciálního problému $Lu = f$.

Získali jsme však mnohem více, než jen řešení. Totiž ukázali jsme, že řešení úlohy $Lu = f$ má tvar

$$u = \int_0^l \mathscr{G}(x,y) f(y) \mathrm{d}y = Gf,$$

kde G je integrální operátor, jehož jádrem je Greenova funkce.

Odsud však též plyne, že G je inverzním operátorem k L, jak se lze přesvědčit výpočtem (vřele doporučuji): pro $f \in C[0,1]$ víme z předchozí kapitoly, že $Gf \in \mathrm{Dom}(L)$ (opět přesvědčte se) a platí $LGf = f$ identita[2].

Navíc Greenova funkce je spojitá, neboť $v_1(x)$, $v_0(x)$ jsou řešeními diferenciální rovnice a pro $y = x$ jsou si funkční hodnoty rovny. Tedy $\mathscr{G} \in \mathcal{C}(\bar{G} \times \bar{G})$. Dále Greenova funkce je symetrická, a tedy ze studia integrálních rovnic víme, že operátor $G = L^{-1}$ má čistě bodové spektrum bez nenulových hromadných bodů a jeho vlastní funkce tvoří ON bázi v $L^2(G)$. Jelikož spektrum je čistě bodové, tak víme z lineární algebry, že L má stejné vlastní funkce a odpovídají převráceným vlastním číslům. Tedy

Věta 6.2.2 (Vlastnosti S-L operátoru II)**.** Pro Sturm-Liouvilleův operátor v jedné dimenzi platí:

7. Vlastní čísla L mají konečné násobnosti a nemají konečný hromadný bod.
8. Z vlastních funkcí L lze sestavit ON bázi prostoru $L^2((0,l))$.

[2] Zkuste promyslet i ukázání levé inverze.

Poznámka. Veškeré úvahy byly zatím vedeny za předpokladu prostoty operátoru L, tj. pro nulové jádro. Jestliže je jádro operátoru nenulové, tj. je tvořeno konstantními funkcemi, můžeme operátor snadno převést na předchozí případ. Totiž stačí k operátoru „přičíst“ jedničku, spektrum nového operátoru se pouze posune o jednotku, zatímco vlastní funkce zůstávají beze změny.

Věta 6.2.3 (Vlastnosti Greenovy funkce)**.** 1. $\mathscr{G}(x,y)$ je spojitá funkce na $[0,l]\times[0,l]$;

2. Pro všechna x,y platí $\mathscr{G}(x,y)=\mathscr{G}(y,x)$;

3. Buď $y\in(0,l)$ pevné. Označme $g_y(x)=\mathscr{G}(x,y)$. Pak
   [3a] $g_y(x)$ splňuje obě hraniční podmínky;
   [3b] $g_y(x)\in\mathcal{C}^2([0,l]\setminus\{y\})$;
   [3c] $Lg_y(x)=\delta(x-y)$.

Důkaz. Tvrzení 1, 2 a 3a se dokáží přímým dosazením. Tvrzení 3c získáme aplikací věty o (zobecněném) derivování po částech hladké funkce, jelikož derivace na spojnici trojúhelníků existovat nemusí: Zderivujeme výraz $pg_y'(x)$. Ten má následující podobu:

$$pg_y'(x)=-\frac{1}{\mathscr{W}}\begin{cases} v_0'(x)v_1(y), & \text{pro } 0<x<y<l,\\ v_0(y)v_1'(x), & \text{pro } 0<y<x<l.\end{cases}$$

Proto

$$\begin{aligned}(pg_y'(x))'=\left\{(pg_y'(x))'\right\}+\delta(x-y)\left(\frac{1}{\mathscr{W}}(v_1(x)v_0'(x)-v_1'(x)v_0(x)\right)=\\ \left\{(pg_y'(x))'\right\}-\delta(x-y)\left(\frac{1}{\mathscr{W}}\mathscr{W}\right)=\left\{(pg_y'(x))'\right\}-\delta(x-y),\end{aligned}$$

a tedy skutečně $Lg_y(x)=\delta(x-y)$ a pozorování 3b jsme ověřili též. □

Poznámka. Ukazuje se, že těchto pět vlastností charakterizuje Greenovu funkci a lze jich užít pro rozšíření/hledání Greenových funkcí ve vyšších dimenzích.

Greenova funkce též nahrazuje koncept fundamentálních řešení ze zobecněných funkcí. Při volbě $y=0$ máme $Lg_0=\delta$, tj $g_0=\varepsilon$ a navíc jsme ukázali, že řešení problému $Lu=f$ je

$$u=\varepsilon*f=\int f(y)\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y=\int f(y)g_0(x-y)\mathrm{d}y=\int f(y)g_y(x)\mathrm{d}y=\int f(y)\mathscr{G}(x,y)\mathrm{d}y,$$

tedy Greenova funkce zahrnuje jaksi i poznatek, že řešení získáváme pomocí konvoluce s pravou stranou.

Poznámka. Analytický tvar Greenových funkcí ve vyšších dimenzí je známý jen pro jednodušší geometrie a okrajové podmínky. Lze však získávat přibližná řešení pomocí metody zrcadlení, jako je tomu například v problematice dynamiky tekutin, kde se užívá názvu Stokeslety či případně Blakelety (po matematikovi Blakeovy, který našel singularity Stokesových rovnic v polorovině s nulovou Dirichletovou hraniční podmínkou).

Poznámka. Uveďme ještě jedno pozorování o souvislosti integrálních a eliptických rovnic. Uvažujme jednorozměnou Sturm-Liouvilleovu úlohu s operátorem L. Pak úloha $Lu=\lambda u+f$ je ekvivalentní integrální rovnici

$$u(x)=\lambda\int_0^l\mathscr{G}(x,y)u(y)\mathrm{d}y+\int_0^l\mathscr{G}(x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$