Verze 20. července 2017

7. Aplikace derivace

Derivace funkce se využívá při řešení úloh technické praxe i teorie. Uvedeme několik z nich: vyčíslení hodnot funkce, výpočet limity, vyšetřování průběhu funkce a zkoumání křivek.

7A. Taylorův polynom

V matematické analýze známe řadu tzv. elementárních funkcí, např. $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$, $\log x$, $\operatorname{tg} x, \arcsin x, \operatorname{arctg} x$. Známe jejich chování, přesné vyčíslení jejich hodnoty v konkrétním bodě x (až na několik výjimek) však není možné.

Počítat umíme pouze s racionálními čísly, tato čísla umíme sčítat, odčítat a násobit. Proto dovedeme vyčíslit libovolný polynom s racionálními koeficienty v libovolném racionálním bodě. Umíme také dělit, což umožňuje vyčíslit i libovolnou hodnotu racionální funkce.

Jak vyčíslit hodnotu elementární funkce alespoň přibližně? Přesnou hodnotu stejně v praxi nepotřebujeme, stačí hodnota s požadovanou přesností, např. na 3 nebo 6 desetinných míst. K tomu se využívá tzv. Taylorův[1] polynom, který dokáže spočítat hledanou hodnotu s předem danou přesností. Jak to dělá kalkulačka, když počítá například $e^{0.1}$? Kalkulačka v sobě nemá zabudované tabulky hodnot, ale využívá krátké programy, které vyčíslí hodnotu příslušného polynomu v daném bodě s požadovanou přesností. Pro určení hodnoty funkce e^x v bodě $x = 0.1$ lze využít Taylorův polynom pátého stupně funkce e^x, který (jak odvodíme později) má tvar

$$P(x) = 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^4}{24} + \tfrac{x^5}{120}.$$

Jeho hodnota pro $x = 0.1$ je $1.1051716666\overline{6}$, zatímco $e^{0.1} \doteq 1.10517091807$. Chyba, tj. rozdíl obou hodnot, je malá, asi $7.5 \cdot 10^{-7}$. Poznamenejme, že pro výpočet hodnoty e^x, např. v bodě $x = 10$, by chyba byla příliš velká, proto bude potřeba jiný polynom.

Pro každou elementární funkci je v kalkulačce naprogramovaný algoritmus, který počítá hodnotu funkce pomocí polynomu. Použitý polynom závisí nejen na funkci, ale i na hodnotě x, ve které chceme hodnotu funkce vyčíslit.

Odvození

Uvažujme funkci $f(x)$, kterou chceme aproximovat polynomem čtvrtého stupně $T_4(x)$ v okolí bodu nula, ve kterém umíme vyčíslit hodnotu funkce i její derivace. Polynom hledáme ve tvaru

$$T_4(x) = c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + c_3\, x^3 + c_4\, x^4\,.$$

Jak zvolit koeficienty c_i? Nejjednodušší je požadovat, aby funkce i polynom měly v bodě $x_0 = 0$ stejné hodnoty i hodnoty derivace:

$$f(0) = T_4(0)\,, \quad f'(0) = T_4'(0)\,, \quad f''(0) = T_4''(0)\,, \quad f^{(3)}(0) = T_4^{(3)}(0)\,, \quad f^{(4)}(0) = T_4^{(4)}(0)\,.$$

První rovnost $f(0) = T_4(0)$ dává

$$f(0) = T_4(x)|_{x=0} = \left[c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + c_3\, x^3 + c_4\, x^4\right]_{x=0} = c_0\,,$$

[1] Brook Taylor (1685-1731), anglický matematik.

protože všechny kladné mocniny x^k jsou v bodě $x = 0$ nulové. Odtud plyne vyjádření nultého koeficientu $c_0 = f(0)$. Druhá rovnost, tedy rovnost prvních derivací, dává

$$f'(0) = f'(x)|_{x=0} = T_4'(x)|_{x=0} = \left[c_1 + 2\,c_2\,x + 3\,c_3\,x^2 + 4\,c_4\,x^3\right]_{x=0} = c_1\,,$$

odkud plyne $c_1 = f'(0)$. Rovnost druhých derivací dává

$$f''(0) = T_k''(x)|_{x=0} = \left[2\,c_2 + 3 \cdot 2\,c_3\,x + 4 \cdot 3\,c_4\,x^2\right]_{x=0} = 2\,c_2\,,$$

odkud plyne $c_2 = \frac{1}{2} f''(0)$. Rovnost třetích derivací dává

$$f^{(3)}(0) = T_4^{(3)}(x)|_{x=0} = \left[3 \cdot 2\,c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2\,c_4\,x\right]_{x=0} = 3 \cdot 2\,c_3\,,$$

odkud plyne $c_3 = \frac{1}{3 \cdot 2}\, f^{(3)}(0)$. Konečně z rovnosti derivací čtvrtého řádu dostáváme

$$f^{(4)}(0) = T_4^{(4)}(x)|_{x=0} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot c_4\,.$$

Označme součin přirozených čísel od 1 do k symbolem $k!$, tzv. faktoriál čísla k, přitom definujeme $1! = 0! = 1$[2]. Potom výsledek můžeme zapsat ve tvaru $c_4 = \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)$. Taylorův polynom čtvrtého stupně funkce $f(x)$ tak můžeme zapsat ve tvaru:

$$T_4(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4\,.$$

V případě polynomu stupně n, k-tý ($k \le n$) člen $c_k\,x^k$ po k-té derivaci dává $k!\,c_k$, tedy z rovnosti $f^{(k)}(0) = T_n^{(k)}(0)$ plyne $c_k = f^{(k)}(0)/k!$. Pokud nás zajímají hodnoty v okolí bodu x_0, polynom stupně n zapíšeme s tzv. středem v bodě x_0 ve tvaru mocnin dvojčlenu $(x - x_0)$:

$$T_n(x) = c_0 + c_1\,(x - x_0) + c_2\,(x - x_0)^2 + c_3\,(x - x_0)^3 + c_4\,(x - x_0)^4 + \cdots + c_n\,(x - x_0)^n\,.$$

V tomto tvaru lze snadno odvodit koeficienty c_k a také vyčíslit hodnoty v okolí bodu x_0.

Definice

Zobecnění předchozího odvození vede k definici Taylorova polynomu:

Definice 7.1. (Taylorův polynom) Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivace do řádu n. Potom Taylorův polynom stupně n se středem v bodě x_0 je polynom

$$T_n^{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k \equiv f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}\,(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\,(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n\,.$$

Pokud je z kontextu jasné, o kterou funkci a střed jde, symboly funkce f a středu x_0 v označení Taylorova polynomu můžeme vynechat a psát jenom $T_n(x)$.

Taylorův polynom se středem $x_0 = 0$ se nazývá také Maclaurinův polynom.

Pro aproximaci hodnot funkce $f(x)$ v bodě x používáme Taylorův polynom se středem v bodě x_0, který je (podle možností) blízký bodu x, aby chyba aproximace byla co nejmenší. V Taylorově polynomu se středem $x_0 \neq 0$ jednotlivé mocniny $(x - x_0)^k$ **neroznásobujeme**, při numerickém vyčíslování jejich hodnoty by docházelo k velkým zaokrouhlovacím chybám.

[2] Hodnota $0! = 1$ plyne z pravidla $(k+1)! = k!(k+1)$, které pro $k = 0$ dává $1 = 1! = 0! \cdot 1$.

Poznámky 7.2.

(a) Často se střed Taylorova polynomu označuje a, potom

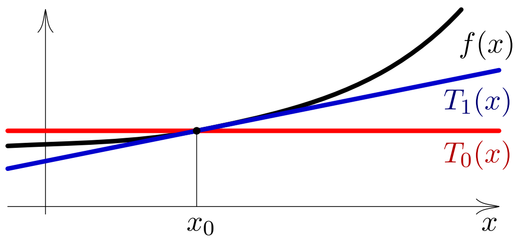
$$T_n^{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \equiv f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n\,.$$

(b) Podmínkou existence Taylorova polynomu stupně n funkce $f(x)$ (rozvoje v bodě x_0) je pouze existence derivací funkce $f(x)$ do řádu n v bodě x_0. Taylorův polynom tak nezávisí na tom, jak se chová funkce $f(x)$ a její derivace v bodech x různých od x_0. Proto odlišné funkce mohou mít stejné Taylorovy polynomy. Například přičtením násobku $(x - x_0)^{n+1}$ k funkci $f(x)$ dostaneme jinou funkci, Taylorův polynom stupně n se přitom nezmění.

(c) Taylorův polynom nultého stupně je konstantní funkce $T_0(x) = f(x_0)$. Taylorův polynom prvního stupně

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

určuje rovnici tečny $y = T_1(x)$ ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0.



Obr. 7.1: Taylorův polynom $T_0(x)$ nultého stupně a $T_1(x)$ prvního stupně funkce $f(x)$.

(d) Taylorův polynom $T_n^{f,x_0}(x)$ funkce $f(x)$ lze zapsat pomocí diferenciálů $\mathrm{d}^k f(x_0)$ s přírůstkem $\mathrm{d}x = x - x_0$. Protože

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x_0)(x-x_0) &= f'(x_0)\cdot(x-x_0)\,,\\ \mathrm{d}^2 f(x_0)(x-x_0) &= f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2\,,\\ \mathrm{d}^3 f(x_0)(x-x_0) &= f^{(3)}(x_0)\cdot(x-x_0)^3\,, \end{aligned}$$

Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě x_0 můžeme zapsat ve tvaru

$$T_3(x) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{3!}\,\mathrm{d}^3 f(x_0)(x-x_0)\,.$$

(e) Je-li funkce $f(x)$ polynom stupně p, tj. $f(x) = b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \cdots + b_p\,x^p$, potom Taylorův polynom této funkce stupně $n \geq p$ se středem v $x_0 = 0$ je polynom se stejnými koeficienty b_i. Pokud $n > p$, potom koeficienty u $x^{p+1}, \ldots, x^n$ jsou nulové, tj. $T_n^{f,0}(x) \equiv f(x)$. Pokud vezmeme Taylorův polynom této funkce s jiným středem $x_0 \neq 0$, tj.

$$T_n^{f,x_0}(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_n(x-x_0)^n\,,$$

potom příslušný Taylorův polynom má sice jiný tvar a jiné koeficienty, ale dává stejné hodnoty $T_n^{f,x_0}(x) = f(x)$ a po roznásobení mocnin $(x - x_0)^k$ a následné úpravě dostaneme původní polynom $f(x)$.

(f) Například polynom $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 7x + 2$ má v bodě $x_0 = 1$ derivace

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - 3 + 4 - 7 + 2 = -3\,,\\ f'(1) &= 4 - 9 + 8 - 7 = -4\,,\\ f''(1) &= 12 - 18 + 8 = 2\,,\\ f^{(3)}(1) &= 24 - 18 = 6\,,\\ f^{(4)}(1) &= 24\,, \end{aligned}$$

vyšší derivace $f^{(k)}(x)$ jsou nulové. Taylorův polynom čtvrtého (i vyššího) stupně je

$$T_4^{f(x),1}(x) = -3 - 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + (x-1)^4$$

a po roznásobení dostaneme původní polynom $f(x) = 2 - 7x + 4x^2 - 3x^3 + x^4$.

(g) Rozdíl hodnoty Taylorova polynomu $T_n(x)$ se středem v bodě x_0 a funkce $f(x)$ se při $x \to x_0$ zmenšuje. Také při zvyšování stupně polynomu se rozdíl obvykle zmenšuje.

(h) Pozor, Taylorův polynom je polynomem, tj. součet mocnin $(x-x_0)^k$: člen $(x-x_0)^k$ násobíme hodnotou derivace funkce v bodě x_0. Studenti však často chybně píší:

$$T_2(x) = f(x) + f'(x)\,(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x)\,(x-x_0)^2\,,$$

což však není polynom! (Kromě případu kdy $f(x)$ je polynom.)

Taylorův polynom vybraných funkcí

Vyčíslením derivací ve vhodném bodě můžeme napsat Taylorův polynom funkce. Uveďme Taylorův polynom vybraných funkcí.

Exponenciální funkce. Funkce e^x je definována na celém $\mathbb{R}$ a má všechny derivace stejné

$$\mathrm{e}^x = [\mathrm{e}^x]' = [\mathrm{e}^x]'' = [\mathrm{e}^x]^{(3)} = \cdots = [\mathrm{e}^x]^{(k)}\,.$$

Zvolíme-li $x_0 = 0$, pak jsou všechny derivace $[\mathrm{e}^x]^{(k)}_{x=0} = 1$. Taylorův polynom stupně n je proto

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,.$$

Vzorec můžeme použít k vyčíslení Eulerovy konstanty e dosazením $x = 1$

$$\mathrm{e} \doteq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{1}{n!}\,.$$

K dané přesnosti stačí mnohem menší n, než při výpočtu pomocí limity $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pro $n \to \infty$. Pokud za střed x_0 zvolíme bod 1, dostáváme polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}}{k!}(x-1)^k = \mathrm{e} + \mathrm{e}\,(x-1) + \frac{\mathrm{e}}{2}\,(x-1)^2 + \frac{\mathrm{e}}{3!}\,(x-1)^3 + \frac{\mathrm{e}}{4!}(x-1)^4 + \cdots + \frac{\mathrm{e}}{n!}\,(x-1)^n\,.$$

Poznamenejme, že pro x „blízká“ 0 dává Taylorův polynom se středem $x_0 = 0$ „dobré“ výsledky, pro jiná x by bylo nutno zvolit dosti vysoký stupeň polynomu. Místo toho k vyčíslení e^x využijeme vlastností exponenciální funkce $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$, $\mathrm{e}^{kx} = (\mathrm{e}^x)^k$ umožňující „zmenšit“ x (v absolutní hodnotě). Například e^5 spočítáme vyčíslením $\mathrm{e}^{1/2}$ a jeho umocněním na desátou.

Logaritmická funkce. Funkce $\ln x$ je definovaná na intervalu $(0, \infty)$. Proto za střed nelze vzít nulu. Vhodný střed je $x_0 = 1$, jednodušší je však funkci „posunout“ na $\ln(1+x)$ a vzít za střed $x_0 = 0$. Spočítejme derivace funkce $\ln(1+x)$:

$$\begin{aligned}
&[\ln(1+x)]' = \tfrac{1}{1+x}\,,\\
&[\ln(1+x)]'' = \tfrac{-1}{(1+x)^2}\,,\\
&[\ln(1+x)]^{(3)} = \tfrac{2}{(1+x)^3}\,,\\
&\dots \quad \dots\,,\\
&[\ln(1+x)]^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!\,\tfrac{1}{(1+x)^k}\,.
\end{aligned}$$

Pro $x_0 = 0$ je $f(x_0) = \ln(1+x_0) = 0$, v dalších členech ve vzorci se nám v podílu $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ faktoriály zkrátí na $(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$. Můžeme proto psát

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n\,.$$

Poznámky 7.3.

(a) Poznamenejme, že tento polynom dává „rozumné“ hodnoty jen pro x „blízké“ 0. Pro $x > 1$ se při zvyšování stupně n Taylorova polynomu chyba zvětšuje, hodnoty $f(x)$ a $T_n(x)$ se stále více „rozbíhají“.

(b) Pro výpočet funkce $\ln(1+x)$ pro $x \ge 1$ lze užít trik $\ln(1+x) = -\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\ln\left(1 - \frac{x}{1+x}\right)$, díky kterému lze hodnoty logaritmu počítat pomocí součtu

$$\ln(1+x) \doteq -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(-\frac{x}{1+x}\right)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k\,.$$

(c) Počítáme-li $\ln(1+x)$ pro „velká“ x, potom $\frac{x}{1+x}$ je číslo blízké jedničce a bylo by nutné volit vysoký stupeň polynomu. Využijeme proto vlastností logaritmu $\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y$ a například $\ln(1000)$ budeme počítat

$$\ln(1000) = \ln\left(2^{10}\cdot\tfrac{1000}{2^{10}}\right) = 10\cdot\ln(2) + \ln\left(\tfrac{1000}{1024}\right) = -10\cdot\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\tfrac{125}{128}\right)\,,$$

přičemž pro vyčíslení výsledných logaritmů není potřeba vysokého stupně polynomu.

(d) Koeficienty Taylorova polynomu pro funkci $\ln(1+x)$ se obvykle odvozují z derivace $[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}$, kterou lze chápat jako součet geometrické řady $\sum_{i=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ s kvocientem $q = -x$. Taylorův polynom potom dostaneme integrací jednotlivých členů. Integraci budeme probírat v dalších kapitolách.

Funkce sinus. Funkce $\sin x$ je definovaná na $\mathbb{R}$. Její derivace řádu $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ jsou

$$\sin x\,,\quad \cos x\,,\quad -\sin x\,,\quad -\cos x\,,\quad \sin x\,,\quad \cos x\,,\quad -\sin x\,,\quad -\cos x\,,\quad \dots.$$

Funkce se opakují s periodou 4, protože $[\sin x]^{(k+4)} = [\sin x]^{(k)}$. Pro střed $x_0 = 0$ dostáváme postupně hodnoty $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$. Taylorův polynom má proto každý druhý člen roven nule, nenulové jsou jen liché mocniny x. Je to v souladu se skutečností, že funkce $\sin x$ je lichá. Polynom funkce $\sin x$ stupně $2n+1$ lze proto zapsat ve tvaru

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{5!}\,x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}\,.$$

Jako cvičení napište Taylorův polynom druhého stupně funkce $\sin x$ se středem $x_0 = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

Funkce kosinus. Funkce $\cos x$ je také definovaná na celém $\mathbb{R}$. Napišme její derivace řádu $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots$

$$\cos x\,, \quad -\sin x\,, \quad -\cos x\,, \quad \sin x\,, \quad \cos x\,, \quad -\sin x\,, \quad -\cos x\,, \quad \sin x\,, \quad \ldots .$$

Funkce se opět opakují s periodou 4: $[\cos x]^{(k+4)} = [\cos x]^{(k)}$. Pro střed $x_0 = 0$ pak dostáváme hodnoty $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0 \ldots$. Taylorův polynom má proto každý druhý člen nulový, nenulové jsou jen sudé mocniny x, což je v souladu se skutečností, že funkce $\cos x$ je sudá. Polynom stupně $2n$ lze zapsat ve tvaru

$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} = 1 - \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{4!}\, x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}\,.$$

Jako cvičení napište Taylorův polynom druhého stupně funkce $\cos x$ se středem $x_0 = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

Poznamenejme, že pro x „vzdálenější“ od nuly k vyčíslení $\sin x$ a $\cos x$ je vhodné „přiblížit“ hodnotu x k nule s využitím známých vzorců $\sin x = \sin(x + 2\pi) = -\sin(x + \pi) = \sin(\pi - x)$ a analogických vzorců pro $\cos x$.

Funkce arkus tangens. Uveďme Taylorův polynom stupně $(2n+1)$ funkce $\operatorname{arctg} x$ pro $x_0 = 0$

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}\,.$$

Vzorec lze pro malé n odvodit derivováním, odvození obecného případu vychází z první derivace $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$, kterou lze brát jako součet geometrické řady s kvocientem $q = -x^2$

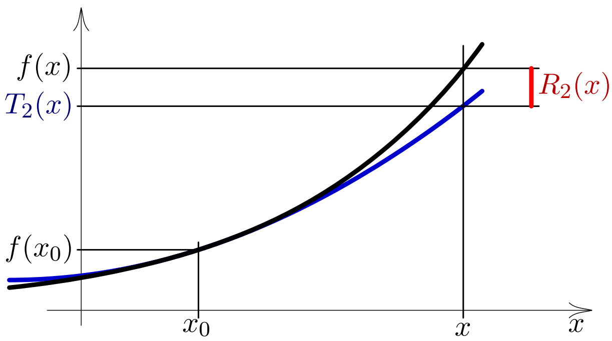
$$[\operatorname{arctg} x]' = \tfrac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \ldots$$

a jednotlivé členy následně integrovat.

Pozor, ačkoliv funkce $\operatorname{arctg} x$ je definovaná v celém $\mathbb{R}$, polynom dává „rozumné“ výsledky aproximace funkce $\operatorname{arctg} x$ jenom pro $|x| < 1$, pro $|x| > 1$ se chyba stále zvětšuje se zvyšováním stupně polynomu.

Taylorův zbytek

Při aproximaci hodnot funkce $f(x)$ příslušným Taylorovým polynomem $T_n(x)$ stupně n nás zajímá „chyba“ aproximace, tj. rozdíl skutečné hodnoty $f(x)$ a hodnoty polynomu $T_n(x)$. Označíme jej písmenem $R_n(x)$ podle slova reziduum znamenající zbytek.



Obr. 7.2: Taylorův zbytek $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$.

Definice 7.4. Buď $T_n(x)$ Taylorův polynom funkce $f(x)$ stupně n se středem v bodě x_0. Rozdíl $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ nazýváme **Taylorův zbytek**.

Jak lze odhadnout Taylorův zbytek? Taylorův polynom nultého stupně se středem x_0 je konstantní funkce $T_0(x) = f(x_0)$. Podle Věty o střední hodnotě pro $x > x_0$ Taylorův zbytek lze vyjádřit pomocí první derivace

$$R_0(x) = f(x) - T_0(x) = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)\,, \quad \xi \in (x_0, x)\,.$$

Taylorův zbytek pro Taylorův polynom vyššího stupně lze vyjádřit v tzv. Lagrangeově tvaru pomocí derivace funkce $f(x)$ řádu $(n+1)$:

Věta 7.5. (Taylorova věta) Nechť funkce $f(x)$ má v okolí bodu x_0 derivace do řádu $(n+1)$. Potom pro každé x v tomto okolí existuje ξ mezi body x_0 a x takové, že Taylorův zbytek $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}\,.$$

Poznámky 7.6.

(a) Taylorův zbytek (v uvedeném tzv. Lagrangeově tvaru) má tvar $(n+1)$-ho členu Taylorova polynomu, jen derivace řádu $n+1$ není v bodě x_0, ale v bodě ξ ležícím mezi x_0 a x. Abychom nemuseli rozlišovat, zda x je menší nebo větší než x_0, lze bod ξ napsat ve tvaru $\xi = x_0 + t(x-x_0)$, kde $t \in (0,1)$.

(b) Místo označení $f(x) - T_n(x) = R_n(x)$ někteří autoři označují zbytek Taylorova polynomu stupně n symbolem $R_{n+1}(x)$, tj. $f(x) - T_n(x) = R_{n+1}(x)$, kvůli podobnosti uvedeného vyjádření zbytku s $(n+1)$-ním členem Taylorova polynomu.

(c) Vedle uvedeného tzv. Lagrangeova tvaru Taylorova zbytku se v literatuře uvádí i tzv. Cauchyův tvar Taylorova zbytku

$$R_n(x) \equiv f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}\,(x-\eta)^n\,(x-x_0)\,,$$

kde η je opět číslo mezi x_0 a x. Čísla η z Cauchyova a ξ z Lagrangeova vzorce nemusí být stejná. Pro úplnost uveďme ještě integrální tvar, který udává přesnou hodnotu Taylorova zbytku ve formě určitého integrálu

$$R_n(x) \equiv f(x) - T_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n(x-x_0)\,\mathrm{d}t\,.$$

Pojem určitého integrálu bude probírán později.

Idea důkazu Taylorovy věty

Pro zájemce odvodíme Taylorův zbytek nejdříve v Cauchyově tvaru pro případ Taylorova polynomu třetího stupně a pro $x > x_0$. Platí

$$R_3(x) \equiv f(x) - T_3(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}\,(x-x_0)^2 - \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}\,(x-x_0)^3\,.$$

Nyní vezmeme x pevné a x_0 nahradíme proměnnou t. Novou funkci proměnné t označíme $F(t)$

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)\,(x-t) - \frac{f''(t)}{2}\,(x-t)^2 - \frac{f^{(3)}(t)}{3!}\,(x-t)^3\,.$$

Tedy pro $t = x_0$ je $F(x_0) = R_3(x)$ a pro $t = x$ je $F(x) = 0$. Funkci $F(t)$ derivujme podle proměnné t — proměnná x je nyní konstanta, přitom pozor na derivaci $[(x-t)^k]' = -k(x-t)^{k-1}$:

$$F'(t) = -f'(t) - f''(t)\,(x-t) + f'(t) - \frac{f^{(3)}(t)}{2}\,(x-t)^2 + f''(t)\,(x-t) - \\ -\frac{f^{(4)}(t)}{3!}\,(x-t)^3 + \frac{f^{(3)}(t)}{2}\,(x-t)^2\,.$$

Tři dvojice členů se navzájem odečtou, čímž získáváme vyjádření derivace funkce $F(t)$

$$F'(t) = -\frac{f^{(4)}(t)}{3!}\,(x-t)^3\,. \tag{*}$$

Odvozený vztah pro derivaci nám umožní odvodit tvar Taylorova zbytku.

Cauchyův tvar zbytku odvodíme pomocí Lagrangeovy Věty o střední hodnotě (Věta 6.24). Pro diferencovatelnou funkci $F(t)$ na intervalu $\langle x_0, x\rangle$, existuje $\eta \in (x_0, x)$, že platí

$$F(x) - F(x_0) = F'(\eta)\cdot(x - x_0)\,.$$

Protože $F(x_0) = R_3(x)$ a $F(x) = 0$, platí $F(x) - F(x_0) = -R_3(x)$. Využijeme-li odvozené vyjádření (*) derivace funkce $F(t)$, dostáváme Cauchyův tvar Taylorova zbytku

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{3!}\,(x-\eta)^3(x-x_0)\,.$$ □

Nejčastější **Lagrangeův tvar zbytku** dostaneme ze vztahu (*) pomocí následující věty:

Věta 7.7. (Zobecněná věta o střední hodnotě) Buďte $F(t)$ a $g(t)$ spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, mající derivace $F'(t)$, $g'(t)$, přičemž $g'(t) \neq 0$ pro $t \in (a, b)$. Potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{F(b) - F(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Tvrzení dokážeme pomocí Rolleovy věty (Věta 6.23). Položme

$$\Phi(t) = (F(t) - F(a))(g(b) - g(a)) - (g(t) - g(a))(F(b) - F(a))\,.$$

Dosazení $t = a$ a $t = b$ dává nulové hodnoty $\Phi(a) = 0$ a $\Phi(b) = 0$, přitom derivace

$$\Phi'(t) = F'(t)(g(b) - g(a)) - g'(t)(F(b) - F(a))\,.$$

Podle Rolleovy věty existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $\Phi'(\xi) = 0$, odkud plyne tvrzení. □

Vraťme se k odvození Taylorova zbytku. Napišme tvrzení předchozí věty pro funkci $F(t)$ a funkci $g(t) = (x-t)^4$ na intervalu (x_0, x), tj. $a = x_0$ a $b = x$:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{(x-x)^4 - (x-x_0)^4} = \frac{F'(\xi)}{-4(x-\xi)^3}\,.$$

Nyní stačí využít $F(x) = 0$, $F(x_0) = R_3(x)$ a dosadit za $F'(\xi)$ z rovnosti (*) pro $t = \xi$. Dostáváme tak

$$\frac{-R_3(x)}{-(x-x_0)^4} = \frac{1}{4(x-\xi)^3}\frac{f^{(4)}(\xi)}{6}(x-\xi)^3 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,,$$

odkud úpravou dostaneme Lagrangeův tvar zbytku. Důkaz případu $x < x_0$ je stejný. Rozšíření důkazu pro Taylorův polynom k-tého stupně také nečiní potíže. □

Příklady odhadu Taylorova zbytku

(a) Ukažme odhad chyby Taylorova polynomu funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$. Uvažujme polynom $T_5(x)$ se středem $x_0 = 0$ v bodě $x > 0$. Podle Taylorovy věty existuje $\xi \in (x_0, x)$ splňující

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\,x^6 = \frac{\mathrm{e}^\xi}{6!}\,x^6\,.$$

Protože e^x je rostoucí funkce a $\xi < x$ platí $\mathrm{e}^\xi < \mathrm{e}^x$. Výsledný odhad vyčíslíme pro $x = 0.2$

$$|R_5(x)| < \frac{\mathrm{e}^x}{6!}\,x^6\,, \qquad |R_5(0.2)| < \frac{\mathrm{e}^{0.2}}{6!}(0.2)^6 \doteq 1.09 \cdot 10^{-7}\,.$$

Jaký stupeň polynomu musíme vzít, aby chyba $\mathrm{e}^{0.2}$ byla menší než 10^{-12}? Platí

$$|R_n(0.2)| < \frac{\mathrm{e}^{0.2}}{(n+1)!}(0.2)^{n+1}\,.$$

Pro $n = 8$ odhad dává chybu $1.7 \cdot 10^{-12}$, pro $n = 9$ je chyba jenom $3.4 \cdot 10^{-14}$. Proto stačí polynom 9. stupně.

(b) Při odhadu chyby vyčíslení funkce $\sin x$ nebo $\cos x$ lze využít toho, že $|\sin x| \le 1$ a $|\cos x| \le 1$, proto pro polynom stupně n se středem v 0 platí

$$|R_n(x)| \le \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

(c) Pro x „vzdálenější“ od středu x_0, tj. pro velké $|x - x_0|$ zbytek $R_n(x)$ je velmi velký. V některých případech (např. Taylorova polynomu pro funkce $\operatorname{arctg} x$) se chyba zvětšuje s vyšším stupněm polynomu. Pro efektivní výpočet hodnoty využijeme vlastností funkce.

Například chceme-li vyčíslit hodnotu $\sin(10)$ Taylorovým polynomem, hodnotu nejprve upravíme „zmenšením“ argumentu $10 = 3\cdot\pi + (10 - 3\cdot\pi) = 3\pi + h$, kde $h \doteq 0.575222038$. Díky vlastnostem funkce $\sin x$ platí $\sin(10) = -\sin(10 - 3\cdot\pi) = -\sin(h)$ a Taylorův polynom 7. stupně dává

$$\sin(10) = -\sin(h) \doteq T_7(x) = -h + \frac{h^3}{3!} - \frac{h^5}{5!} + \frac{h^7}{7!} \doteq -0.5440210918\,.$$

Odhadněme chybu. Jedná se součet typu $s_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^k a_k$, tj. členy součtu střídají znaménko. Přitom navíc velikosti jednotlivých členů a_i se zmenšují $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > 0$. Proto pro lichá k platí $s_{k+2} = s_k + a_{k+1} - a_{k+2} > s_k$ a pro sudá k platí $s_{k+2} = s_k - a_{k+1} + a_{k+2} < s_k$. Označíme-li $s = \lim_{k\to\infty} s_k$, dostáváme posloupnost nerovností

$$s_1 < s_3 < s_5 < s_7 < \cdots < s < \cdots s_6 < s_4 < s_2 < s_0\,.$$

Pro liché k platí $s_k < s < s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$. Odečtení s_k dává $0 < s - s_k < a_{k+1}$. Podobně pro sudé k z nerovností $s_{k+1} = s_k - a_{k+1} < s < s_k$ plyne $-a_{k+1} < s - s_k < 0$, tj. $0 < s_k - s < a_{k+1}$. V obou případech dostáváme odhad rozdílu $|s_k - s| < a_{k+1}$.

V našem případě rozdíl $|\sin(h) - T_7(h)|$ je menší než další člen $h^9/9!$, tj.

$$|R_7(h)| \le \frac{h^9}{9!} \doteq 1.9 \cdot 10^{-8}\,.$$